Обобщенные краевые задачи для замыкания оператора Лапласа в шаре и его частях

Самарова С.С.

ФПМИ, 3 курс, группа Б05-902, УМФ

Учебное пособие для дистанционных занятий

Дистанционное занятие посвящено решению обобщенных краевых задач для замыкания оператора Лапласа в шаре, полушаре и четверти шара. Используемые приемы аналогичны тем, которые применялись ранее при решении обобщенных краевых задач для замыкания оператора Лапласа в круге, полукруге и четверти круга.

Постановка обобщенных задач Дирихле и Неймана для замыкания оператора Лапласа

Приведем необходимые теоретические сведения.

Пусть G – ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с кусочно гладкой границей ∂G, ориентированной полем внешних нормалей.

Оператор Лапласа

$$\Delta \;:\; C^2(\overline{G}) \to L_2(G)$$

На лекциях было доказано, что существует замыкание оператора Лапласа $\overline{\Delta}$.

Пусть $g \in L_2(\partial G)$.

Определение 1 *Обобщенной задачей Дирихле называют поиск функции $u \in D(\overline{\Delta})$, являющейся решением краевой задачи*

$$\begin{cases} \overline{\Delta} u = 0 \quad \text{в } L_2(G), \\ u|_{\partial G} = g \quad \text{в } L_2(\partial G) \end{cases}$$

Для решения обобщенной задачи Дирихле требуется найти последовательность гармонических в области G функций

$$\{u_N\}\,, \quad N = 1, 2, \ldots,$$

таких, что

$$u_N|_{\partial G} \to g \quad \text{в } L_2(\partial G) \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

Определение 2 *Обобщенной задачей Неймана называют поиск функции $u \in D(\overline{\Delta})$, являющейся решением краевой задачи*

$$\begin{cases} \overline{\Delta} u = 0 \quad \text{в } L_2(G), \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial G} = g \quad \text{в } L_2(\partial G) \end{cases}$$

Для решения обобщенной задачи Неймана требуется найти последовательность гармонических в области G функций

$$\{u_N\}\,, \quad N = 1, 2, \ldots,$$

таких, что

$$\left.\frac{\partial u_N}{\partial n}\right|_{\partial G} \to g \quad \text{в } L_2(\partial G) \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

Замечание. Кроме обобщенных задач Дирихле и Неймана встречаются обобщенные краевые задачи, в которых краевое условие содержит как значения искомой функции на границе области, так и значения ее производной по нормали. Такие задачи называют краевыми задачами смешанного типа.

Общий вид гармонических функций в шаре

Для решения задач нам понадобится общий вид гармонических функций в шаре, который мы уже использовали на предыдущем занятии.

Напомним основные формулы.

Полиномы Лежандра $P_n(\xi)$ определяются по формуле

$$P_n(\xi) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n \left(\xi^2 - 1\right)^n}{d\xi^n}, \qquad n = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots, \quad \xi \in [-1, 1].$$

Присоединенные полиномы Лежандра определяются по формуле

$$P_n^{(m)}(\xi) = \left(1 - \xi^2\right)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{d^m P_n(\xi)}{d\xi^m}, \quad 0 \le m \le n, \quad \xi \in [-1, 1].$$

При $m = 0$ присоединенные полиномы Лежандра совпадают с полиномами Лежандра.

Если ввести сферические координаты (r, φ, θ) по формулам

$$\begin{cases} x_1 = r \cos\varphi \sin\theta, \\ x_2 = r \sin\varphi \sin\theta, \\ x_3 = r \cos\theta, \end{cases}$$

то сферические функции $Y_n(\theta, \varphi)$ будут выражаться через присоединенные полиномы Лежандра по формуле

$$Y_n(\theta, \varphi) = \sum_{m=0}^{n} \left(a_m \cos m\varphi + b_m \sin m\varphi\right) P_n^{(m)}(\cos\theta),$$

где a_m и b_m – произвольные числа.

Произвольную гармоническую функцию в шаре можно представить в виде

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \, Y_n(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} r^n \left(a_m \cos m\varphi + b_m \sin m\varphi\right) P_n^{(m)}(\cos\theta),$$

где a_m и b_m – произвольные числа. Эту формулу называют общим видом гармонических функций в шаре.

Пример решения обобщенной задачи Дирихле в шаре

В качестве примера решим задачу из экзаменационной контрольной по УМФ 2018/2019 учебного года.

Задача 1 *Рассматривается оператор Лапласа*

$$\Delta \ : \ C^2(B) \to L_2(B),$$

где B *– замкнутый единичный шар в* $\mathbb{R}^3$ *с центром в нуле. Найти решение задачи*

$$\begin{cases} \overline{\Delta} u = 0, \quad u \in D(\overline{\Delta}), \\ u|_{\partial B} = x_1 \cos x_3, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Решение.

1. Разложение краевого условия в ряд Фурье

Поскольку радиус шара B равен 1, то краевое условие в сферических координатах имеет вид

$$u|_{\partial B} = (x_1 \cos x_3)|_{\partial B} = \big(r \cos\varphi \sin\theta \cos(r\cos\theta)\big)\big|_{r=1} = \cos\varphi \sin\theta \cos(\cos\theta)$$

Раскладывая функцию

$$v(\theta, \varphi) = \cos\varphi \sin\theta \cos(\cos\theta)$$

в ряд Фурье в $L_2(\partial B)$ по сферическим функциям $\{Y_n(\theta, \varphi)\}_{n=0}^{\infty}$, получаем

$$v(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \Big(a_{n,m} P_n^{(m)}(\cos\theta) \cos m\varphi + b_{n,m} P_n^{(m)}(\cos\theta) \sin m\varphi \Big)$$

В силу ортогональности тригонометрической системы $\{\sin m\varphi \, , \, \cos m\varphi\}$ коэффициенты Фурье удовлетворяют условиям:

$$\begin{cases} a_{n,m} = 0 \quad \text{при} \quad m \neq 1; \\ b_{n,m} = 0 \quad \text{при всех значениях } m \text{ и } n. \end{cases}$$

Таким образом,

$$v(\theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,1} P_n^{(1)}(\cos\theta) \cos\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,1} \sin\theta P_n'(\cos\theta) \cos\varphi \, ,$$

где коэффициенты $a_{n,1}$ вычисляются по формулам

$$a_{n,1} = \frac{\big(\cos\varphi \sin\theta \cos(\cos\theta) \, , \, \sin\theta P_n'(\cos\theta) \cos\varphi\big)}{\big(\sin\theta P_n'(\cos\theta) \cos\varphi \, , \, \sin\theta P_n'(\cos\theta) \cos\varphi\big)} =$$

$$
= \frac{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} \sin^3\theta \cos(\cos\theta) P_n'(\cos\theta)\cos^2\varphi \, d\varphi \, d\theta}{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} \sin^3\theta \, \left(P_n'(\cos\theta)\right)^2 \cos^2\varphi \, d\varphi \, d\theta} =
$$

$$
= \frac{\int\limits_0^{\pi} \sin^3\theta \cos(\cos\theta) P_n'(\cos\theta) \, d\theta}{\int\limits_0^{\pi} \sin^3\theta \, \left(P_n'(\cos\theta)\right)^2 d\theta}
$$

2. Построение последовательности гармонических в шаре функций $\{u_N\}_{N=1}^{\infty}$

Рассмотрим последовательность гармонических в шаре B функций

$$
u_N = \sum_{n=1}^{N} a_{n,1} r^n \sin\theta P_n'(\cos\theta)\cos\varphi \, , \quad N = 1, 2, \ldots ,
$$

Эти функции выбраны так, чтобы их значения на границе шара совпадали с частичными суммами ряда Фурье функции $v(\theta, \varphi)$:

$$
u_N|_{\partial B} = \sum_{n=1}^{N} a_{n,1} \sin\theta P_n'(\cos\theta)\cos\varphi \, .
$$

3. Доказательство фундаментальности последовательности $\{u_N\}_{N=1}^{\infty}$

Докажем, что последовательность функций $\{u_N\}_{N=1}^{\infty}$ является фундаментальной в $L_2(B)$. Поскольку

$$
\|u_{N+p} - u_N\|^2_{L_2(B)} = \left\| \sum_{n=N+1}^{N+p} a_{n,1} r^n \sin\theta P_n'(\cos\theta)\cos\varphi \right\|^2_{L_2(B)}
$$

то с помощью равенства Парсеваля получаем

$$
\|u_{N+p} - u_N\|^2_{L_2(B)} = \sum_{n=N+1}^{N+p} |a_{n,1}|^2 \, \| \, r^n \sin\theta P_n'(\cos\theta)\cos\varphi\|^2_{L_2(B)} =
$$

$$= \sum_{n=N+1}^{N+p} |a_{n,1}|^2 \int\limits_B r^{2n} \sin^2\theta (P_n'(\cos\theta))^2 \cos^2\varphi \, r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= \sum_{n=N+1}^{N+p} |a_{n,1}|^2 \int\limits_0^1 r^{2n+2}\, dr \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \sin^2\theta (P_n'(\cos\theta))^2 \cos^2\varphi \; \sin\theta \, d\theta\, d\varphi =$$

$$= \sum_{n=N+1}^{N+p} |a_{n,1}|^2 \left. \frac{r^{2n+3}}{2n+3}\right|_0^1 \cdot \|\sin\theta P_n'(\cos\theta)\cos\varphi\,\|^2_{L_2(\partial B)} <$$

$$< \sum_{n=N+1}^{N+p} |a_{n,1}|^2 \,\|\sin\theta P_n'(\cos\theta)\cos\varphi\,\|^2_{L_2(\partial B)}$$

Итак, мы получили оценку

$$\|u_{N+p} - u_N\|^2_{L_2(B)} < \sum_{n=N+1}^{N+p} |a_{n,1}|^2 \,\|\sin\theta P_n'(\cos\theta)\cos\varphi\,\|^2_{L_2(\partial B)} \qquad (1)$$

Поскольку разложение в ряд Фурье краевого условия $v(\theta,\varphi) \in L_2(\partial B)$ имеет вид

$$v(\theta,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,1} \sin\theta P_n'(\cos\theta)\cos\varphi\,,$$

то этот ряд сходится в $L_2(\partial B)$. Из равенства Парсеваля отсюда следует сходимость числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n,1}|^2 \,\|\sin\theta P_n'(\cos\theta)\cos\varphi\,\|^2_{L_2(\partial B)}$$

По критерию Коши для числовых рядов это означает, что $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_0(\varepsilon):\quad \forall N > N_0(\varepsilon)$ и $\forall p \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$\sum_{n=N+1}^{N+p} |a_{n,1}|^2 \,\|\sin\theta P_n'(\cos\theta)\cos\varphi\,\|^2_{L_2(\partial B)} < \varepsilon$$

Но тогда из неравенства (1) получаем, что $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N_0(\varepsilon) : \quad \forall N > N_0(\varepsilon)$ и $\quad \forall p \in \mathbb{N} \quad$ выполнены неравенства

$$\|u_{N+p} - u_N\|^2_{L_2(B)} < \sum_{n=N+1}^{N+p} |a_{n,1}|^2 \, \| \sin\theta P_n'(\cos\theta)\cos\varphi \, \|^2_{L_2(\partial B)} < \varepsilon$$

Таким образом, последовательность функций $\{u_N\}_{N=1}^{\infty}$ является фундаментальной в $L_2(B)$.

4. Построение решения краевой задачи $u(x)$

Поскольку последовательность $\{u_N\}_{N=1}^{\infty}$ является фундаментальной в $L_2(B)$, а пространство $L_2(B)$ – полное, то существует функция $u \in L_2(B)$ такая, что

$$u_N \to u \quad \text{в } L_2(B) \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

Покажем, что эта функция u является решением краевой задачи.

5. Проверка выполнения условий: $u(x) \in D(\overline{\Delta})$ и $\overline{\Delta}u = 0$.

По построению функции $u_N \in C^2(B)$ и гармонические, поэтому

$$\begin{pmatrix} u_N \\ \Delta u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_N \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Gr}(\Delta)$$

Тогда при $N \to \infty$ получим

$$\begin{pmatrix} u_N \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Gr}(\overline{\Delta})$$

Значит, $u(x) \in D(\overline{\Delta})$ и $\overline{\Delta}u = 0$.

6. Проверка выполнения условия: $u|_{\partial B} = v(\theta,\varphi)$.

Другими словами, нам необходимо проверить, что

$$\| \, u_N - v \, \|^2_{L_2(\partial B)} \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

Действительно, по построению

$$u_N|_{\partial B} = \left(\sum_{n=1}^{N} a_{n,1} r^n \sin\theta P_n'(\cos\theta)\cos\varphi \right)\Bigg|_{r=1} = \sum_{n=1}^{N} a_{n,1} \sin\theta P_n'(\cos\theta)\cos\varphi$$

а ряд Фурье для функции $v \in L_2(\partial B)$ имеет вид

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,1} \sin\theta P_n'(\cos\theta)\cos\varphi$$

Поэтому

$$\| u_N - v \|^2_{L_2(\partial B)} = \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_{n,1}|^2 \| \sin\theta P_n'(\cos\theta)\cos\varphi \|^2_{L_2(\partial B)} \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

Решение задачи 1 завершено.

Пример решения обобщенной краевой задачи в четверти шара

В качестве примера решим задачу из экзаменационной контрольной по УМФ 2020/2021 учебного года.

Задача 2 *Множество* $B \subset \mathbb{R}^3$ *имеет вид*

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x > 0, \quad y > 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 < 1\}.$$

Границу множества B *обозначим* $\partial B = S_1 \cup S_2 \cup S_c$, *где*

$$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x > 0, \quad y = 0, \quad x^2 + z^2 < 1\},$$

$$S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x = 0, \quad y > 0, \quad y^2 + z^2 < 1\},$$

$$S_c = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x > 0, \quad y > 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Оператор Лапласа

$$\Delta \; : \; C^2(\overline{B}) \to L_2(B).$$

Найти функцию $u \in D(\overline{\Delta})$ *– решение задачи*

$$\begin{cases} \overline{\Delta} u = 0, \quad \textit{в} \quad L_2(B), \\ u|_{S_1} = x^2, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{S_2} = 0, \quad u|_{S_c} = 0. \end{cases}$$

Решение.

1. Сведение исходной задачи к задаче с нулевыми краевыми условиями на полукругах S_1 и S_2

Подберем какую-нибудь гармоническую функцию $g(x, y, z)$, удовлетворяющую на полукругах S_1 и S_2 условиям:

$$g|_{S_1} = x^2, \quad \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{S_2} = 0\,.$$

Например, возьмем функцию

$$g(x, y, z) = x^2 - y^2.$$

Нетрудно проверить, что эта функция удовлетворяет условиям

$$g \in C^2(\overline{B}), \quad \Delta g = 0, \quad g|_{S_1} = x^2, \quad \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{S_2} = 0\,.$$

Будем искать решение исходной задачи в виде

$$u(x, y, z) = x^2 - y^2 + w(x, y, z)$$

Тогда для функции $w(x, y, z)$ получим задачу

$$\begin{cases} \overline{\Delta} w = 0, \quad w \in D(\overline{\Delta}), \\ w|_{S_1} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial w}{\partial x}\right|_{S_2} = 0, \quad w|_{S_c} = -x^2 + y^2. \end{cases}$$

2. Выбор подходящего базиса в $L_2(S_c)$, сохраняющего нулевые краевые условия на полуокружностях $S_1 \cap S_c$ и $S_2 \cap S_c$.

Перепишем сначала краевые условия на S_1 и S_2 в сферических координатах

$$w|_{S_1} = w|_{\,\varphi=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{S_2} = -\left.\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right|_{\,\varphi=\,\frac{\pi}{2}} = 0\,.$$

Поскольку на четверти сферы S_c

$$\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\,, \quad \theta \in [0, \pi]\,,$$

то, как мы знаем еще со второго курса, в качестве базиса для пространства функций $f(\varphi) \in L_2\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ есть возможность выбрать любой из четырех вариантов базиса $\{F_k(\varphi)\}$:

$$\{\cos 2k\varphi\}; \quad \{\cos(2k+1)\varphi\}; \quad \{\sin 2k\varphi\}; \quad \{\sin(2k+1)\varphi\}.$$

Возьмем тот базис $\{F_k(\varphi)\}$, который удовлетворяет нулевым краевым условиям для φ , заданным в нашей задаче:

$$F_k(0) = 0, \quad F_k'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Непосредственная проверка показывает, что нам подойдет базис

$$\{\sin(2k+1)\varphi\},$$

и в качестве базиса в $L_2(S_c)$ выбираем базис из сферических функций

$$\{P_n^{(2k+1)}(\cos\theta)\sin(2k+1)\varphi\}, \quad 2k+1 \leqslant n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

3. Разложение краевого условия на сферической части границы в ряд Фурье

Поскольку радиус четверти шара B равен 1, то краевое условие на S_c в сферических координатах имеет вид

$$w|_{S_c} = (-x^2+y^2)\big|_{S_c} = \left(-r^2\cos^2\varphi\sin^2\theta + r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta\right)\big|_{r=1} = -\cos 2\varphi\sin^2\theta$$

Раскладывая функцию

$$v(\theta,\varphi) = -\cos 2\varphi\sin^2\theta$$

в ряд Фурье в $L_2(S_c)$ по сферическим функциям (2), получаем

$$v(\theta,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} b_{n,2k+1} P_n^{(2k+1)}(\cos\theta)\sin(2k+1)\varphi$$

где коэффициенты $b_{n,2k+1}$ вычисляются по формулам

$$b_{n,2k+1} = \frac{\left(-\cos 2\varphi\sin^2\theta\,,\ P_n^{(2k+1)}(\cos\theta)\sin(2k+1)\varphi\right)}{\left(P_n^{(2k+1)}(\cos\theta)\sin(2k+1)\varphi\,,\ P_n^{(2k+1)}(\cos\theta)\sin(2k+1)\varphi\right)} =$$

$$= -\frac{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{\pi} \sin^3\theta P_n^{(2k+1)}(\cos\theta)\cos 2\varphi \sin(2k+1)\varphi \, d\varphi \, d\theta}{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{\pi} \sin\theta \left(P_n^{(2k+1)}(\cos\theta)\right)^2 \sin^2(2k+1)\varphi \, d\varphi \, d\theta}$$

4. Построение последовательности гармонических в четверти шара функций $\{w_N\}_{N=1}^{\infty}$

Рассмотрим последовательность гармонических в четверти шара B функций

$$w_N = \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} b_{n,2k+1}\, r^n P_n^{(2k+1)}(\cos\theta)\sin(2k+1)\varphi\,, \quad N = 1, 2, \ldots,$$

Эти функции выбраны так, чтобы их значения на сферической части границы четверти шара S_c совпадали с частичными суммами ряда Фурье функции $v(\theta,\varphi)$:

$$w_N|_{S_c} = \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} b_{n,2k+1} P_n^{(2k+1)}(\cos\theta)\sin(2k+1)\varphi\,.$$

5. Доказательство фундаментальности последовательности $\{w_N\}_{N=1}^{\infty}$

Докажем, что последовательность функций $\{w_N\}_{N=1}^{\infty}$ является фундаментальной в $L_2(B)$. Поскольку

$$\|w_{N+p} - w_N\|^2_{L_2(B)} = \left\| \sum_{n=N+1}^{N+p}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} b_{n,2k+1} r^n P_n^{(2k+1)}(\cos\theta)\sin(2k+1)\varphi \right\|^2_{L_2(B)}$$

то с помощью равенства Парсеваля получаем

$$\|w_{N+p} - w_N\|^2_{L_2(B)} = \sum_{n=N+1}^{N+p}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} |b_{n,2k+1}|^2 \left\| r^n P_n^{(2k+1)}(\cos\theta)\sin(2k+1)\varphi \right\|^2_{L_2(B)} =$$

$$= \sum_{n=N+1}^{N+p} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} |b_{n,2k+1}|^2 \int\limits_B \ r^{2n} \left(P_n^{(2k+1)}(\cos\theta) \right)^2 \sin^2(2k+1)\varphi \, r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi =$$

$$= \sum_{n=N+1}^{N+p} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} |b_{n,2k+1}|^2 \int\limits_0^1 \ r^{2n+2} \, dr \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(P_n^{(2k+1)}(\cos\theta) \right)^2 \sin^2(2k{+}1)\varphi \sin\theta \, d\theta \, d\varphi =$$

$$= \sum_{n=N+1}^{N+p} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} |b_{n,2k+1}|^2 \left. \frac{r^{2n+3}}{2n+3} \right|_0^1 \cdot \left\| \, P_n^{(2k+1)}(\cos\theta) \sin(2k+1)\varphi \, \right\|^2_{L_2(S_c)} <$$

$$< \sum_{n=N+1}^{N+p} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} |b_{n,2k+1}|^2 \left\| \, P_n^{(2k+1)}(\cos\theta) \sin(2k+1)\varphi \, \right\|^2_{L_2(S_c)}$$

Итак, мы получили оценку

$$\|w_{N+p} - w_N\|^2_{L_2(B)} <$$

$$< \sum_{n=N+1}^{N+p} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} |b_{n,2k+1}|^2 \left\| \, P_n^{(2k+1)}(\cos\theta) \sin(2k+1)\varphi \, \right\|^2_{L_2(S_c)} \qquad (3)$$

Поскольку разложение в ряд Фурье краевого условия $v(\theta,\varphi) \in L_2(S_c)$ имеет вид

$$v(\theta,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} b_{n,2k+1} P_n^{(2k+1)}(\cos\theta) \sin(2k+1)\varphi \, ,$$

то этот ряд сходится в $L_2(S_c)$. Из равенства Парсеваля отсюда следует сходимость числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} |b_{n,2k+1}|^2 \left\| \, P_n^{(2k+1)}(\cos\theta) \sin(2k+1)\varphi \, \right\|^2_{L_2(S_c)}$$

По критерию Коши для числовых рядов это означает, что $\forall\varepsilon > 0$ $\exists N_0(\varepsilon):\quad \forall N > N_0(\varepsilon)$ и $\forall p \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$\sum_{n=N+1}^{N+p}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}|b_{n,2k+1}|^2\left\| P_n^{(2k+1)}(\cos\theta)\sin(2k+1)\varphi\right\|^2_{L_2(S_c)} < \varepsilon$$

Но тогда из неравенства (3) получаем, что $\forall\varepsilon > 0$ $\exists N_0(\varepsilon):$ $\forall N > N_0(\varepsilon)$ и $\forall p \in \mathbb{N}$ выполнены неравенства

$$\|w_{N+p} - w_N\|^2_{L_2(B)} < \sum_{n=N+1}^{N+p}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}|b_{n,2k+1}|^2\left\| P_n^{(2k+1)}(\cos\theta)\sin(2k+1)\varphi\right\|^2_{L_2(S_c)} < \varepsilon$$

Таким образом, последовательность функций $\{w_N\}_{N=1}^{\infty}$ является фундаментальной в $L_2(B)$.

6. Построение решения краевой задачи $w(x)$

Поскольку последовательность $\{w_N\}_{N=1}^{\infty}$ является фундаментальной в $L_2(B)$, а пространство $L_2(B)$ – полное, то существует функция $w \in L_2(B)$ такая, что

$$w_N \to w \quad \text{в } L_2(B) \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

Покажем, что эта функция w является решением краевой задачи.

7. Проверка выполнения условий: $w(x) \in D(\overline{\Delta})$ и $\overline{\Delta}w = 0$.

По построению функции $w_N \in C^2(B)$ гармонические, поэтому

$$\begin{pmatrix} w_N \\ \Delta w_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_N \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Gr}(\Delta)$$

Тогда при $N \to \infty$ получим

$$\begin{pmatrix} w_N \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Gr}(\overline{\Delta})$$

Значит, $w(x) \in D(\overline{\Delta})$ и $\overline{\Delta}w = 0$.

8. Проверка выполнения условия: $w|_{S_c} = v(\theta,\varphi)$.

Другими словами, нам необходимо проверить, что

$$\|\, w_N - v\,\|^2_{L_2(S_c)} \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

Действительно, по построению

$$w_N\big|_{S_c} = \left.\left(\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} b_{n,2k+1} r^n P_n^{(2k+1)}(\cos\theta)\sin(2k+1)\varphi\right)\right|_{r=1} =$$

$$= \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} b_{n,2k+1} P_n^{(2k+1)}(\cos\theta)\sin(2k+1)\varphi$$

а ряд Фурье для функции $v \in L_2(\partial B)$ имеет вид

$$v = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} b_{n,2k+1} r^n P_n^{(2k+1)}(\cos\theta)\sin(2k+1)\varphi$$

Поэтому

$$\|\, w_N - v\,\|^2_{L_2(S_c)} = \sum_{n=N+1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} |b_{n,2k+1}|^2 \left\|\, P_n^{(2k+1)}(\cos\theta)\sin(2k+1)\varphi\,\right\|^2_{L_2(S_c)} \to 0$$

при $N \to \infty$.

9. Проверка выполнения условия: $w\big|_{S_1} = 0$.

Действительно,

$$\|\, w_N\|^2_{L_2(S_1)} = \|\, w_N|_{\varphi=0}\|^2_{L_2(S_1)} = 0 \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

10. Проверка выполнения условия: $\frac{\partial w}{\partial x}\big|_{S_2} = 0$.

Действительно,

$$\left\|\frac{\partial w_N}{\partial x}\right\|^2_{L_2(S_2)} = \left\|\left.\frac{\partial w_N}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\frac{\pi}{2}}\right\|^2_{L_2(S_2)} = 0 \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

Решение задачи 2 завершено.

Спасибо за внимание.

Не болейте!