Обобщенная задача Коши для уравнения теплопроводности. Примеры решения задач

Самарова С.С.

ФОПФ, 3 курс, УМФ

Учебное пособие для дистанционных занятий

В этом пособии для дистанционного занятия мы найдем функцию Грина оператора теплопроводности и рассмотрим примеры решения обобщенных задач Коши для уравнения теплопроводности.

Постановка обобщенной задачи Коши для уравнения теплопроводности в пространстве $S'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$.

Пусть $a > 0$ и обобщенная функция $f(t, x) \in S'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ такова, что ее носитель содержится в полупространстве $\{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : t \geqslant 0\}$.

Определение 1 *Обобщенной задачей Коши для уравнения теплопроводности*

$$u_t - a^2 \Delta_x u = f(t, x), \quad t \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

называют задачу, в которой требуется найти решения $u(t, x) \in S'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ *уравнения* (1)*, у которых носители содержатся в полупространстве*

$$\{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : t \geqslant 0, \, x \in \mathbb{R}^n\}$$

Определение 2 *Оператор*
$$\frac{\partial}{\partial t} - -a^2\Delta_x$$
стоящий в левой части уравнения (1), *называют* *оператором теплопроводности*.

Замечание 1. Классическую задачу Коши для уравнения теплопроводности

$$\begin{aligned} &u_t - a^2\Delta_x u = f(t,x), \quad t>0, \quad x\in\mathbb{R}^n,\\ &u|_{t=0} = u_0(x). \end{aligned}$$

можно свести к решению обобщенной задачи Коши для уравнения теплопроводности
$$u_t - a^2\Delta_x u = f(t,x) + \delta(t)\, u_0(x)$$
в случае, когда функции $u_0(x)$, $f(x,t)$ являются функциями медленного роста.

Вычисление функции Грина для оператора теплопроводности в пространстве $S'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$.

Задача 1 *Найти в* $S'(\mathbb{R}^{n+1})$ *функцию Грина* $\mathcal{E}(t,x)$ *оператора теплопроводности*

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - a^2\Delta_x$$

удовлетворяющую условию

$$\operatorname{supp}\mathcal{E}(t,x) \subset \{(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n : \, t\geqslant 0,\, x\in\mathbb{R}^n\}$$

Решение.

Функция $\mathcal{E}(t,x)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t} - a^2\Delta_x\,\mathcal{E} = \delta(t,x)$$

Возьмем преобразование Фурье по x

$$\frac{\partial}{\partial t}\,F_x\big[\mathcal{E}\big] - a^2\Big((-i\xi_1)^2 + \ldots + (-i\xi_n)^2\Big)F_x\big[\mathcal{E}\big] = \delta(t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} F_x\big[\mathcal{E}\big] + a^2|\xi|^2 F_x\big[\mathcal{E}\big] = \delta(t)$$

Обозначим $g(t,\xi) = F_x[\mathcal{E}](t,\xi)$ и для каждого фиксированного ξ решим уравнение

$$\frac{\partial g}{\partial t} + a^2|\xi|^2 g = \delta(t) \tag{2}$$

в $S'(\mathbb{R})$.

Сначала найдем частное решение уравнения (2). Для этого решим задачу Коши

$$\begin{aligned} &y' + a^2|\xi|^2 y = 0,\\ &y(0) = 1. \end{aligned}$$

и получим

$$y = e^{-a^2|\xi|^2 t}$$

Следовательно, частное решение уравнения (2)

$$g_{\text{част}}(t,\xi) = \theta(t)\, e^{-a^2|\xi|^2 t}$$

Теперь решим однородное уравнение

$$\frac{\partial g}{\partial t} + a^2|\xi|^2 g = 0$$

Взяв преобразование Фурье по t, получим

$$(-i\tau)F_t[g] + a^2|\xi|^2 F_t[g] = 0$$

$$\big(-i\tau + a^2|\xi|^2\big) F_t[g] = 0 \tag{3}$$

Рассмотрим два случая.

1. $|\xi| > 0$.

   В этом случае для всех $\tau \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство

   $$\big|-i\tau + a^2|\xi|^2\big| \geqslant a^2|\xi|^2 > 0$$

   Поэтому уравнение (3) имеет только нулевое решение, и, следовательно, уравнение (2) имеет единственное решение

   $$g(t,\xi) = g_{\text{част}}(t,\xi) = \theta(t)\, e^{-a^2|\xi|^2 t}$$

2. $\xi = 0$

При $\xi = 0$ уравнение (3) принимает вид

$$\tau \cdot F_t[g](\tau) = 0$$

и все его решения в пространстве $S'(\mathbb{R})$ описываются формулой

$$F_t[g](\tau) = C\delta(\tau)$$

Следовательно,

$$g_{\text{одн}}(t,0) = F^{-1}\big[\, C\delta(\tau)\big] = \frac{C}{2\pi}$$

и общее решение уравнения (2) имеет вид

$$g(t,0) = g_{\text{част}}(t,0) + g_{\text{одн}}(t,0) = \theta(t) + \frac{C}{2\pi}$$

Поскольку по условию задачи нам нужно, чтобы $g(t,0) = 0$ при $t < 0$, то $C = 0$ и мы находим единственную функцию, удовлетворяющую этому условию

$$g(t,0) = \theta(t)$$

Результаты каждого из рассмотренных случаев 1 и 2 описываются общей формулой

$$g(t,\xi) = \theta(t)\, e^{-a^2|\xi|^2 t}$$

Покажем, что $g(t,\xi)$ будет решением уравнения (2) в $S'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$.

Для любой основной функции $\varphi(t,\xi) \in S(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ справедливы равенства

$$\big\langle g_t\,,\, \varphi \big\rangle = -\big\langle g\,,\, \varphi_t \big\rangle = -\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} \theta(t)\, e^{-a^2|\xi|^2 t}\, \varphi_t\, dt d\xi$$

В силу абсолютной интегрируемости подынтегральной функции получаем

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} \theta(t)\, e^{-a^2|\xi|^2 t}\, \varphi_t\, dt d\xi = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} d\xi \int\limits_0^{+\infty} e^{-a^2|\xi|^2 t}\, \varphi_t\, dt =$$

$$= -\int\limits_{\mathbb{R}^n} d\xi \left(e^{-a^2|\xi|^2 t}\,\varphi\Big|_0^{+\infty} + a^2|\xi|^2 \int\limits_0^{+\infty} e^{-a^2|\xi|^2 t}\,\varphi\,dt \right) =$$

$$= -\int\limits_{\mathbb{R}^n} d\xi \left(-\varphi(0,\xi) + a^2|\xi|^2 \int\limits_0^{+\infty} e^{-a^2|\xi|^2 t}\,\varphi\,dt \right) = \left\langle \delta(t) - a^2|\xi|^2 g\,,\,\varphi \right\rangle$$

Доказано.

Теперь найдем функцию Грина

$$\mathcal{E}(t,x) = F_\xi^{-1}[g](t,x) = F_\xi^{-1}\left[\theta(t)\,e^{-a^2|\xi|^2 t}\right](t,x) = \theta(t) F_\xi^{-1}\left[e^{-a^2|\xi|^2 t}\right](t,x)$$

Для любой основной функции $\varphi(t,x) \in S(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ выполнены равенства

$$\left\langle F_\xi^{-1}\left[e^{-a^2|\xi|^2 t}\right]\,,\,\varphi \right\rangle = \left\langle e^{-a^2|\xi|^2 t}\,,\,F_x^{-1}[\varphi] \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} dt d\xi \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-a^2|\xi|^2 t}\,e^{-i(\xi,x)}\,\varphi(t,x) dx$$

Поскольку подынтегральная функция абсолютно интегрируема по всем переменным, то, применяя теорему Фубини, получаем

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} dt d\xi \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-a^2|\xi|^2 t}\,e^{-i(\xi,x)}\,\varphi(t,x) dx =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} dt dx\,\varphi(t,x) \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-a^2|\xi|^2 t - i(\xi,x)} d\xi \tag{4}$$

Вычислим отдельно интеграл

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-a^2|\xi|^2 t - i(\xi,x)} d\xi = \prod_{k=1}^n \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 t \xi_k^2 - i\xi_k x_k}\,d\xi_k = \prod_{k=1}^n J_k(a^2 t, x_k)$$

где

$$J_k(a^2t, x_k) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2t\xi_k^2 - i\xi_k x_k}\, d\xi_k =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2t\xi_k^2} \cos(\xi_k x_k)\, d\xi_k - i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2t\xi_k^2} \sin(\xi_k x_k)\, d\xi_k$$

Второй интеграл равен нулю в силу нечетности подынтегральной функции, поэтому имеем

$$J_k(a^2t, x_k) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2t\xi_k^2} \cos(\xi_k x_k)\, d\xi_k$$

Продифференцировав формально интеграл по x_k, получим

$$-\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi_k\, e^{-a^2t\xi_k^2} \sin(\xi_k x_k) d\xi_k$$

Поскольку продифференцированный интеграл сходится равномерно по x_k, то

$$\big(J_k(a^2t, x_k)\big)'_{x_k} = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi_k\, e^{-a^2t\xi_k^2} \sin(\xi_k x_k)\, d\xi_k$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\big(J_k(a^2t, x_k)\big)'_{x_k} = \frac{e^{-a^2t\xi_k^2}}{2a^2t}\ \sin(\xi_k x_k)\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{x_k}{2a^2t} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2t\xi_k^2} \cos(\xi_k x_k)\, d\xi_k =$$

$$= -\frac{x_k}{2a^2t}\ J_k(a^2t, x_k)$$

Замечая, что при $x_k = 0$ интеграл J_k превращается в интеграл Пуассона

$$J_k(a^2t, 0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2t\xi_k^2} d\xi_k = \sqrt{\frac{\pi}{a^2t}}$$

Найдем $J_k(a^2t, x_k)$, решив задачу Коши

$$\big(J_k(a^2t, x_k)\big)'_{x_k} = -\frac{x_k}{2a^2t}\; J_k(a^2t, x_k)\,, \qquad J_k(a^2t, 0) = \sqrt{\frac{\pi}{a^2t}}\,,$$

$$J_k(a^2t, x_k) = \sqrt{\frac{\pi}{a^2t}} e^{-\frac{x_k^2}{4a^2t}}$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-a^2|\xi|^2t - i(\xi,x)}\, d\xi = \prod_{k=1}^{n} J_k(a^2t, x_k) = \left(\sqrt{\frac{\pi}{a^2t}}\right)^n e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}$$

Подставляя полученный результат в формулу (4), находим

$$\left\langle F_\xi^{-1}\left[e^{-a^2|\xi|^2t}\right]\,,\,\varphi\right\rangle = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} \varphi(t,x)\left(\sqrt{\frac{\pi}{a^2t}}\right)^n e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}\,dtdx =$$

$$= \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}\,\varphi(t,x)\,dtdx = \left\langle \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\; e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}\,,\,\varphi\right\rangle$$

Ответ. $\quad \mathcal{E}(t,x) = \dfrac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\; e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}$

Пример решения обобщенной задачи Коши для уравнения теплопроводности

Задача 2 (задание 2.23 г)) *В пространстве* $S'(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ *решить обобщенную задачу Коши для уравнения теплопроводности*

$$u_t - u_{xx} = \theta(t)\,\theta(1-|x|)$$

Решение. Искомое решение будет сверткой правой части уравнения с функцией Грина для оператора теплопроводности

$$u(t,x) = \big(\theta(t)\,\theta(1-|x|)\big) * \left(\frac{\theta(t)}{2\sqrt{\pi t}}\; e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)$$

По определению свертки обобщенных функций для любой основной функции $\varphi(t,x) \in S(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ и любой 1-срезки $\eta_1(t,x)$ должно быть выполнено равенство

$$\left\langle \Big(\theta(t)\,\theta(1-|x|)\Big) * \left(\frac{\theta(t)}{2\sqrt{\pi t}}\,e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)\,,\,\varphi(t,x)\right\rangle =$$

$$= \lim_{R\to+\infty}\left\langle \theta(t)\,\theta(1-|x|)\,,\,\eta_1\left(\frac{t}{R},\frac{x}{R}\right)\left\langle \frac{\theta(\tau)}{2\sqrt{\pi\tau}}\,e^{-\frac{y^2}{4\tau}}\,,\,\varphi(t+\tau,x+y)\right\rangle\right\rangle =$$

$$= \lim_{R\to+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^2} dx\,dt\,\theta(t)\,\theta(1-|x|)\,\eta_1\left(\frac{t}{R},\frac{x}{R}\right)\int\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{\theta(\tau)}{2\sqrt{\pi\tau}}\,e^{-\frac{y^2}{4\tau}}\,\varphi(t+\tau,x+y)\,d\tau dy$$

Сделав во внутреннем интеграле замену переменных

$$\begin{cases} s = t+\tau, \\ z = x+y, \end{cases} \qquad |J| = 1,$$

получим

$$\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^2} dx\,dt\,\theta(t)\,\theta(1-|x|)\,\eta_1\left(\frac{t}{R},\frac{x}{R}\right)\int\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{\theta(s-t)}{2\sqrt{\pi(s-t)}}\,e^{-\frac{(z-x)^2}{4(s-t)}}\,\varphi(s,z)\,dsdz \tag{5}$$

Оценим подынтегральную функцию. Для этого, воспользовавшись ограниченностью 1-срезки и свойствами функции $\varphi(s,z) \in S(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, получаем, что $\exists M>0 \quad \exists A>0$ такие, что

$$\left|\eta_1\left(\frac{t}{R},\frac{x}{R}\right)\right| \leqslant M$$

$$|\,\varphi(s,z)| \leqslant \frac{A}{(1+s^2)^2(1+z^2)}$$

Кроме того, заметим, что подынтегральная функция в формуле (5) может быть отлична от нуля лишь при $0<t<s$, поэтому

$$\left|\theta(t)\,\theta(1-|x|)\,\eta_1\left(\frac{t}{R},\frac{x}{R}\right)\frac{\theta(s-t)}{2\sqrt{\pi(s-t)}}\,e^{-\frac{(z-x)^2}{4(s-t)}}\,\varphi(s,z)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M\cdot A\cdot\theta(1-|x|)}{(1+s^2)^2(1+z^2)} \leqslant \frac{M\cdot A\cdot\theta(1-|x|)}{(1+s^2)(1+t^2)(1+z^2)}$$

Поскольку полученная оценка не зависит от R и является абсолютно интегрируемой функцией по всем переменным, то к интегралу (5) можно применить и теорему Фубини, и теорему об ограниченной сходимости. Таким образом,

$$\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^2} dx\,dt\,\theta(t)\,\theta(1-|x|)\,\eta_1\left(\frac{t}{R},\frac{x}{R}\right)\int\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{\theta(s-t)}{2\sqrt{\pi(s-t)}}\,e^{-\frac{(z-x)^2}{4(s-t)}}\,\varphi(s,z)\,dsdz =$$

$$= \lim_{R\to+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^4}\theta(t)\,\theta(1-|x|)\,\eta_1\left(\frac{t}{R},\frac{x}{R}\right)\frac{\theta(s-t)}{2\sqrt{\pi(s-t)}}\,e^{-\frac{(z-x)^2}{4(s-t)}}\,\varphi(s,z)\,ds\,dt\,dx\,dz =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^4}\theta(t)\,\theta(1-|x|)\,\frac{\theta(s-t)}{2\sqrt{\pi(s-t)}}\,e^{-\frac{(z-x)^2}{4(s-t)}}\,\varphi(s,z)\,ds\,dt\,dx\,dz =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^2} dsdz\,\theta(s)\,\varphi(s,z)\int\limits_0^s dt\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{2\sqrt{\pi(s-t)}}\,e^{-\frac{(z-x)^2}{4(s-t)}}dx$$

После замены переменной во внутреннем интеграле

$$v = \frac{x-z}{\sqrt{2(s-t)}},\qquad dv = \frac{dx}{\sqrt{2(s-t)}}$$

получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} dsdz\,\theta(s)\,\varphi(s,z)\int\limits_0^s dt\int\limits_{\frac{-1-z}{\sqrt{2(s-t)}}}^{\frac{1-z}{\sqrt{2(s-t)}}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{v^2}{2}}dv =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^2} dsdz\,\theta(s)\,\varphi(s,z)\int\limits_0^s\left(\Phi_0\left(\frac{1-z}{\sqrt{2(s-t)}}\right)-\Phi_0\left(\frac{-1-z}{\sqrt{2(s-t)}}\right)\right)dt$$

где функция

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

как мы помним из курса теории вероятностей, носит название функции Лапласа.

Таким образом, мы вычислили, что

$$\left\langle \Big(\theta(t)\,\theta(1-|x|)\Big) * \left(\frac{\theta(t)}{2\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}}\right),\, \varphi(t,x) \right\rangle =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^2} dsdz\, \theta(s)\, \varphi(s,z) \int\limits_0^s \left(\Phi_0\left(\frac{1-z}{\sqrt{2(s-t)}}\right) - \Phi_0\left(\frac{-1-z}{\sqrt{2(s-t)}}\right)\right) dt$$

Ответ.

$$\Big(\theta(t)\theta(1-|x|)\Big) * \left(\frac{\theta(t)}{2\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}}\right) =$$

$$= \theta(s) \int\limits_0^s \left(\Phi_0\left(\frac{1-z}{\sqrt{2(s-t)}}\right) - \Phi_0\left(\frac{-1-z}{\sqrt{2(s-t)}}\right)\right) dt$$

где $\Phi_0(x)$ - функция Лапласа.

На этом мы заканчиваем решение задач, связанных с обобщенной задачей Коши для уравнения теплопроводности.

Спасибо за внимание.
Не болейте!