Пространство обобщенных функций $S'(\mathbb{R}^m)$

Самарова С.С.

ФОПФ, 3 курс, УМФ

Учебное пособие для дистанционных занятий

В данном пособии мы начинаем изучение пространства Шварца основных функций $S(\mathbb{R}^m)$ и пространства обобщенных функций $S'(\mathbb{R}^m)$.

На занятии мы рассмотрим операцию умножения обобщенных функций на бесконечно дифференцируемые функции медленного роста и операцию предельного перехода в пространстве $S'(\mathbb{R}^m)$.

Мультииндексы

Для работы с функциями нескольких переменных удобно использовать мультииндексы

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)\,,$$

где $\alpha_k = 0, 1, 2, \ldots$ для всех $k = 1, 2, \ldots, m$.

Для мультииндексов приняты следующие обозначения:

- $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m$
- $\alpha! = \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \ldots \cdot \alpha_m!$
- $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_m^{\alpha_m}$, где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$
- $\partial^\alpha f = \dfrac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdot \partial x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot \partial x_m^{\alpha_m}}$

Пространство Шварца основных функций $S(\mathbb{R}^m)$

Нашей основной целью является определение обобщенных функций, которое коротко звучит так: «Обобщенные функции – это линейные непрерывные функционалы». Объясним, что это значит.

Как мы уже знаем, каждый функционал отображает некоторое множество («область определения») в пространство $\mathbb{C}$. Для того, чтобы определить свойства линейности и непрерывности функционала, нужно, чтобы область его определения являлась линейным пространством со сходимостью.

Область определения обобщенных функций называют пространством основных функций.

В пособии мы будем рассматривать обобщенные функции, областью определения которых является пространство Шварца $S(\mathbb{R}^m)$ основных функций.

Определение 1 *Пространством Шварца $S(\mathbb{R}^m)$ называют множество бесконечно дифференцируемых функций*

$$\varphi(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}\,,$$

таких, что для любого числа $p = 0, 1, 2, \ldots$ и любого мультииндекса α выполнено соотношение

$$|x|^p\, \partial^\alpha \varphi(x) \to 0 \quad \text{при} \quad x \to \infty$$

Другими словами, любая частная производная основной функции убывает к 0 на бесконечности быстрее, чем любая степень $\dfrac{1}{|x|}$.

Последовательность основных функций $\varphi_n(x)$ сходится к основной функции $\varphi(x)$ в пространстве $S(\mathbb{R}^m)$, т.е.

$$\varphi_n(x) \xrightarrow{S(\mathbb{R}^m)} \varphi(x) \quad \text{при} \quad n \to \infty\,,$$

если для любого числа $p = 0, 1, 2, \ldots$ и любого мультииндекса α имеет место равномерная сходимость

$$|x|^p\, \partial^\alpha \varphi_n(x) \underset{\mathbb{R}^m}{\rightrightarrows} |x|^p\, \partial^\alpha \varphi(x) \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

Пространство обобщенных функций $S'(\mathbb{R}^m)$

Рассмотрим функционал

$$f : S(\mathbb{R}^m) \to \mathbb{C}$$

и будем обозначать

$$\langle f\,,\, \varphi \rangle$$

его действие на основную функцию φ из пространства $S(\mathbb{R}^m)$.

Определение 2 *Пространством обобщенных функций* $S'(\mathbb{R}^m)$ *называют множество функционалов*

$$f : S(\mathbb{R}^m) \to \mathbb{C},$$

обладающих следующими свойствами:

- *Для любых основных функций* φ_1 *и* φ_2 *из пространства* $S(\mathbb{R}^m)$ *и любых комплексных чисел* α *и* β *выполнено равенство*

  $$\langle f\,,\, \alpha\,\varphi_1 + \beta\,\varphi_2 \rangle = \alpha\,\langle f\,,\, \varphi_1 \rangle + \beta\,\langle f\,,\, \varphi_2 \rangle \qquad (\textit{линейность функционала})$$

- *Для любой сходящейся последовательности основных функций*

  $$\varphi_n(x) \xrightarrow{S(\mathbb{R}^m)} \varphi(x) \quad \textit{при} \quad n \to \infty\,,$$

  выполнено соотношение

  $$\langle f\,,\, \varphi_n \rangle \to \langle f\,,\, \varphi \rangle \quad \textit{при} \quad n \to \infty \qquad (\textit{непрерывность функционала})$$

Функции медленного роста

Определение 3 *Функцию*

$$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C},$$

называют функцией медленного роста, если она обладает следующими свойствами:

- $f(x)$ *интегрируема на любом шаре из* $\mathbb{R}^m$*;*

- *существуют действительное число* $C > 0$ *и целое неотрицательное число* p*, такие, что для всех* $x \in \mathbb{R}^m$ *выполнена оценка*

  $$|f(x)| \leqslant C(1 + |x|^{2p})$$

Регулярные и сингулярные функционалы

Определение 4 *Функция* $f(x)$ *задает регулярный функционал*

$$\langle f\,,\,\varphi\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x)\varphi(x)dx\,,$$

на пространстве $S(\mathbb{R}^m)$, *если этот функционал определен для всех основных функций* $\varphi \in S(\mathbb{R}^m)$ *и является линейным и непрерывным.*

Утверждение. Каждая функция медленного роста задает регулярный функционал на пространстве $S(\mathbb{R}^m)$.

Обобщенные функции из пространства $S'(\mathbb{R}^m)$, не являющиеся регулярными функционалами, называют сингулярными функционалами.

Самым известным примером сингулярного функционала является δ-функция, которая действует на основные функции по формуле

$$\langle \delta(x), \varphi(x)\rangle = \varphi(0)$$

На лекциях будет доказано, что $\delta(x)$ не является регулярным функционалом. Поэтому запись

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} \delta(x)\varphi(x)dx\,, \tag{1}$$

которую любят использовать физики и наши студенты, не является математически корректной. Эту запись можно понимать только как символическое обозначение действия δ-функции на основную функцию, а вовсе не как интеграл, который не существует.

Во избежание несчастных случаев с тяжелыми последствиями запись (1) в курсе УМФ использовать не рекомендуется.

Умножение обобщенных функций на бесконечно дифференцируемые функции медленного роста

Определение 5 *Пусть* f *– произвольная обобщенная функция из* $S'(\mathbb{R}^m)$, *а* h *– произвольная бесконечно дифференцируемая функция медленного роста, у которой любая частная производная также является функцией медленного роста.*

Произведением hf *называют обобщенную функцию из* $S'(\mathbb{R}^m)$, *действие которой на основные функции* $\varphi \in S(\mathbb{R}^m)$ *определяется формулой*

$$\langle hf\,,\,\varphi\rangle = \langle f\,,\,h\,\varphi\rangle$$

Замечание. Из свойств функций медленного роста и свойств основных функций пространства $S(\mathbb{R}^m)$ следует, что функция $h\,\varphi$ является основной функцией, т.е. определение произведения hf является корректным.

Функция $\mathcal{P}\dfrac{1}{x}$

Еще одним важным примером сингулярного функционала из $S'(\mathbb{R})$ является обобщенная функция $\mathcal{P}\dfrac{1}{x}$, действие которой на основную функцию $\varphi \in S(\mathbb{R})$ определяется формулой

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}\,,\,\varphi(x)\right\rangle = \text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx \qquad (2)$$

Интеграл в правой части формулы (2) берется в смысле главного значения.

Задача 1 (задание, задача 1.8) *Доказать, что*

а) функционал $\mathcal{P}\dfrac{1}{x}$ *принадлежит пространству* $S'(\mathbb{R})$;

б) справедливо равенство

$$x\,\mathcal{P}\frac{1}{x} = 1$$

Решение.

Докажем сначала пункт а).

1. <u>Корректность определения функционала</u> $\mathcal{P}\dfrac{1}{x}$.

   Докажем, что для любой $\varphi \in S(\mathbb{R})$ интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx \qquad (3)$$

существует в смысле главного значения. Для этого представим интеграл (3) в виде суммы трех интегралов

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx + \int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx + \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$$

- Так как $\varphi \in S(\mathbb{R})$, то

  $$(1 + x^2)\,\varphi(x) \to 0 \quad \text{при} \quad x \to \pm\infty$$

  Поэтому существует такая константа $C > 0$, что

  $$|(1 + x^2)\,\varphi(x)| \leqslant C, \qquad \forall x \in (-\infty, +\infty).$$

  Следовательно, для всех $|x| \geqslant 1$ выполнено неравенство

  $$\left|\frac{\varphi(x)}{x}\right| \leqslant |\varphi(x)| \leqslant \frac{C}{1 + x^2}$$

  Поскольку

  $$\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{C}{1 + x^2}\,dx < \infty \qquad \text{и} \qquad \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{C}{1 + x^2}\,dx < \infty\,,$$

  то по теореме сравнения получаем, что

  $$\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx \qquad \text{и} \qquad \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$$

  существуют.

- Теперь покажем, что интеграл

  $$\int\limits_{-1}^{+1} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$$

  существует в смысле главного значения. Для этого воспользуемся равенством

$$\text{v.p.}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \text{v.p.}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx + \text{v.p.}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{\varphi(0)}{x}\,dx$$

Поскольку

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} \to \varphi'(0) \quad \text{при} \quad x \to 0\,,$$

то функция

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}$$

ограничена на $[-1,1]$ и, следовательно, интегрируема по Лебегу на $[-1,1]$.

Таким образом,

$$\int\limits_{-1}^{+1}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx$$

существует.

В то же время

$$\text{v.p.}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{\varphi(0)}{x}\,dx = \varphi(0)\ \text{v.p.}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{dx}{x} = 0\,,$$

так как под интегралом стоит нечетная функция.

Корректность определения функционала $\mathcal{P}\dfrac{1}{x}$ доказана.

2. <u>Линейность функционала</u> $\mathcal{P}\dfrac{1}{x}$.

Для любых основных функций φ_1 и φ_2 из пространства $S(\mathbb{R})$ и любых комплексных чисел α и β выполнено равенство

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}\,,\,\alpha\,\varphi_1+\beta\,\varphi_2 \right\rangle = \text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(\alpha\,\varphi_1+\beta\,\varphi_2)}{x}\,dx =$$

$$= \alpha\ \text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi_1}{x}\,dx + \beta\ \text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi_2}{x}\,dx = \alpha\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}\,,\,\varphi_1 \right\rangle + \beta\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}\,,\,\varphi_2 \right\rangle$$

Это равенство и означает, что функционал $\mathcal{P}\dfrac{1}{x}$ является линейным.

3. <u>Непрерывность функционала</u> $\mathcal{P}\dfrac{1}{x}$.

   В силу линейности функционала $\mathcal{P}\dfrac{1}{x}$ его непрерывность достаточно доказать только в нуле.

   Для доказательства непрерывности функционала в нуле рассмотрим произвольную последовательность основных функций, сходящуюся к нулю

$$\varphi_n(x) \xrightarrow{S(\mathbb{R})} 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty\,,$$

   и докажем, что

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}\,,\,\varphi_n \right\rangle = \text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi_n(x)}{x}\,dx \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty\,.$$

   Для этого воспользуемся равенством

$$\text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi_n(x)}{x}\,dx = \int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{\varphi_n(x)}{x}\,dx + \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\varphi_n(x)}{x}\,dx +$$

$$+ \int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi_n(x) - \varphi_n(0)}{x}\,dx + \text{v.p.}\int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi_n(0)}{x}\,dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{\varphi_n(x)}{x}\,dx + \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\varphi_n(x)}{x}\,dx + \int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi_n(x) - \varphi_n(0)}{x}\,dx$$

   и докажем, что каждый из интегралов стремится к нулю при $n \to \infty$.

   - Из определения сходимости в пространстве $S(\mathbb{R})$ следует равномерная сходимость к нулю последовательности функций

$$(1 + x^2)\,\varphi_n(x) \underset{(-\infty,+\infty)}{\rightrightarrows} 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

Поэтому существует такая константа $C > 0$, что для всех $n \in \mathbb{N}$ и всех $x \in \{(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\}$ выполнено неравенство

$$\left| \frac{\varphi_n(x)}{x} \right| \leqslant |\varphi_n(x)| \leqslant \frac{C}{1+x^2}$$

Поскольку

$$\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{C}{1+x^2}\,dx < \infty \quad \text{и} \quad \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{C}{1+x^2}\,dx < \infty\,,$$

то по теореме Лебега об ограниченной сходимости получаем равенство нулю пределов

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{\varphi_n(x)}{x}\,dx = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\varphi_n(x)}{x}\,dx = 0\,.$$

- Теперь рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi_n(x) - \varphi_n(0)}{x}\,dx$$

По теореме Лагранжа о среднем существует точка $\xi_n \in (0, x)$ такая, что

$$\frac{\varphi_n(x) - \varphi_n(0)}{x} = \varphi_n'(\xi_n)$$

Кроме того, из сходимости

$$\varphi_n(x) \xrightarrow{S(\mathbb{R})} 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty\,,$$

следует равномерная сходимость

$$\varphi_n'(x) \underset{(-\infty,+\infty)}{\rightrightarrows} 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

Следовательно, найдется такая константа $M > 0$, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$|\varphi_n'(\xi_n)| \leqslant M$$

причем

$$\int\limits_{-1}^{1} M\;dx = 2M < \infty$$

Поэтому по теореме Лебега об ограниченной сходимости получаем

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\varphi_n(x)-\varphi_n(0)}{x}\;dx = 0\;.$$

Непрерывность функционала $\mathcal{P}\dfrac{1}{x}$ доказана.

Теперь перейдем к доказательству пункта б).

Поскольку функция x является функцией медленного роста, то для $\forall\varphi\in S(\mathbb{R})$ выполнены равенства

$$\left\langle x\,\mathcal{P}\frac{1}{x}\;,\;\varphi(x)\right\rangle = \left\langle\mathcal{P}\frac{1}{x}\;,\;x\,\varphi(x)\right\rangle = \text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,\varphi(x)}{x}\;dx =$$

$$= \text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\;dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\;dx = \Big\langle 1\,,\,\varphi(x)\Big\rangle\;,$$

что и требовалось доказать.

Решение задачи 1 завершено.

Предельный переход в пространстве $S'(\mathbb{R}^m)$

Определение 6 *Обобщенные функции* $f_\alpha(x)$ *сходятся в пространстве* $S'(\mathbb{R}^m)$ *при* $\alpha\to\alpha_0$ *к обобщенной функции* $f(x)$*, т.е.*

$$f_\alpha(x)\xrightarrow{S'(\mathbb{R}^m)} f(x)\quad\textit{при}\quad\alpha\to\alpha_0\,,$$

если для каждой основной функции $\varphi\in S(\mathbb{R}^m)$ *имеет место сходимость*

$$\big\langle f_\alpha(x)\,,\,\varphi(x)\big\rangle\to\big\langle f(x)\,,\,\varphi(x)\big\rangle\quad\textit{при}\quad\alpha\to\alpha_0\,.$$

Задача 2 *В пространстве* $S'(\mathbb{R})$ *вычислить*

$$\lim_{n\to\infty} \sin nx$$

Решение.

Как мы уже знаем из курса математического анализа, предел последовательности функций

$$\lim_{n\to\infty} \sin nx$$

не существует.

Однако функции $\sin nx$ являются функциями медленного роста, и, следовательно, задают регулярные функционалы в пространстве $S'(\mathbb{R})$. Покажем, что в отличие от обычных функций в пространстве $S'(\mathbb{R})$ предел последовательности обобщенных функций

$$\lim_{n\to\infty} \sin nx$$

существует и найдем его.

Как мы уже знаем, действие регулярного функционала $\sin nx$ на каждую основную функцию $\varphi \in S(\mathbb{R})$ задается формулой

$$\left\langle \sin nx\,,\, \varphi(x) \right\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \sin nx\, dx$$

Из леммы Римана об осциляции следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \sin nx\, dx = 0 = \left\langle 0\,,\, \varphi(x) \right\rangle$$

Таким образом, для $\forall \varphi \in S(\mathbb{R})$ выполнено равенство

$$\lim_{n\to\infty} \left\langle \sin nx\,,\, \varphi(x) \right\rangle = \left\langle 0\,,\, \varphi(x) \right\rangle$$

По определению сходимости в пространстве $S'(\mathbb{R})$ получаем

$$\sin nx \xrightarrow{S'(\mathbb{R})} 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty\,.$$

Решение задачи 2 закончено.

Теперь решим задачу из домашнего задания, результат которой в дальнейшем будем использовать неоднократно.

Задача 3 (задание, задача 1.6 б)) *В пространстве* $S'(\mathbb{R})$ *вычислить предел*

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \frac{1}{x}\sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

Решение.

Действие регулярного функционала

$$\frac{1}{x}\sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

на каждую основную функцию $\varphi \in S(\mathbb{R})$ задается формулой

$$\left\langle \frac{1}{x}\sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),\, \varphi(x)\right\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x}\sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\varphi(x)\,dx \tag{4}$$

Представим интеграл в правой части равенства (4) в виде суммы нескольких интегралов

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x}\sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\varphi(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{\varphi(x)}{x}\sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)dx + \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)dx +$$

$$+\int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)dx + \int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(0)}{x}\sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)dx$$

- Докажем сначала, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{\varphi(x)}{x}\sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)dx = 0$$

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)dx = 0$$

Действительно, поскольку

$$(1+x^2)\,\varphi(x) \to 0 \quad \text{при} \quad x \to \pm\infty$$

то существует такая константа $C > 0$, что

$$|(1+x^2)\,\varphi(x)| \leqslant C, \qquad \forall x \in (-\infty, +\infty).$$

Следовательно, для всех $|x| \geqslant 1$ выполнено неравенство

$$\left|\frac{\varphi(x)}{x}\right| \leqslant\ |\varphi(x)| \leqslant\ \frac{C}{1+x^2}$$

и по теореме сравнения получаем, что функция

$$\frac{\varphi(x)}{x}$$

интегрируема на промежутках $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$.

Применяя лемму Римана об осцилляции, получаем предельные соотношения

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{\varphi(x)}{x}\,\sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx = 0$$

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,\sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx = 0$$

- Теперь докажем, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{-1}^{+1} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,\sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx = 0$$

Поскольку существует предел

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} \to \varphi'(0) \quad \text{при} \quad x \to 0$$

то функция

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}$$

ограничена на $[-1, 1]$ и, следовательно, интегрируема на $[-1, 1]$.

Опять применяя лемму Римана об осцилляции, получаем, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{-1}^{+1} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,\sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx = 0$$

- Рассмотрим, наконец, интеграл

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(0)}{x} \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx$$

и сделаем в нем замену переменной

$$y = \frac{x}{\varepsilon}\,; \quad dy = \frac{1}{\varepsilon}\, dx$$

В результате этого получим

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(0)}{x} \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \varphi(0) \int\limits_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{1}{y} \sin y \, dy$$

Следовательно,

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(0)}{x} \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \varphi(0) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin y}{y}\, dy = \pi\, \varphi(0)$$

Здесь было использовано хорошо известное со 2 курса значение интеграла Дирихле

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin y}{y}\, dy = \pi$$

Окончательно, получаем

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \left\langle \frac{1}{x} \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),\, \varphi(x) \right\rangle = \pi\, \varphi(0) = \left\langle \pi\, \delta(x)\,,\, \varphi(x) \right\rangle$$

Таким образом,

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \frac{1}{x} \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \pi\, \delta(x)$$

Решение задачи 3 завершено.

Замечание. Если в условиях задачи 3 вместо предела при $\varepsilon \to +0$ рассмотреть предел по последовательности

$$\varepsilon_n = \frac{1}{n}\,,$$

то мы получим последовательность функций

$$f_n(x) = \frac{\sin\, nx}{\pi x} \xrightarrow{S'(\mathbb{R})} \delta(x) \quad \text{при} \quad n \to \infty\,.$$

Такие последовательности называют «δ-образными последовательностями».

Формулы Сохоцкого

Решим еще одну задачу из домашнего задания, результатом которой являются формулы, известные как «Формулы Сохоцкого».

Задача 4 (задание, задача 1.9) *Вычислить пределы в пространстве* $S'(\mathbb{R})$ *при* $\varepsilon \to +0$

$$\text{а)} \quad \frac{1}{x + i\varepsilon}\,; \qquad \text{б)} \quad \frac{1}{x - i\varepsilon}\,.$$

Решение.

Сначала вычислим предел в пункте а).

Действие регулярного функционала

$$\frac{1}{x + i\varepsilon}$$

на каждую основную функции $\varphi \in S(\mathbb{R})$ задается формулой

$$\left\langle \frac{1}{x + i\varepsilon}\,,\, \varphi(x) \right\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x + i\varepsilon}\, \varphi(x)\, dx \tag{5}$$

Представим интеграл в правой части равенства (5) в виде суммы нескольких интегралов

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x + i\varepsilon}\, \varphi(x)\, dx = \int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{\varphi(x)}{x + i\varepsilon}\, dx + \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x + i\varepsilon}\, dx +$$

$$+\int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x+i\varepsilon}\,dx + \int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(0)}{x+i\varepsilon}\,dx$$

и рассмотрим по очереди переход к пределу при $\varepsilon \to +0$ в каждом из интегралов.

- Сначала обоснуем переход к пределу в интегралах

$$\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon}\,dx \quad \text{и} \quad \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon}\,dx$$

Поскольку существует такая константа $C > 0$, что для всех $|x| \geqslant 1$ выполнена оценка

$$\left|\frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon}\right| = \frac{|\,\varphi(x)\,|}{\sqrt{x^2+\varepsilon^2}} \leqslant \frac{|\,\varphi(x)\,|}{|x|} \leqslant |\varphi(x)| \leqslant \frac{C}{1+x^2}$$

и

$$\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{C}{1+x^2}\,dx < \infty \quad \text{и} \quad \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{C}{1+x^2}\,dx < \infty\,,$$

то по теореме Лебега об ограниченной сходимости справедливы предельные соотношения

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon}\,dx = \int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$$

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon}\,dx = \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$$

- Теперь докажем,что справедливо равенство

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{-1}^{+1} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x+i\varepsilon}\,dx = \text{v.p.} \int\limits_{-1}^{+1} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$$

Для этого воспользуемся оценкой

$$\left|\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x+i\varepsilon}\right| = \frac{|\varphi(x)-\varphi(0)|}{\sqrt{x^2+\varepsilon^2}} \leqslant \frac{|\varphi(x)-\varphi(0)|}{|x|}$$

По теореме Лагранжа о среднем существует такое число $\xi \in (0, x)$, что выполнено равенство

$$\varphi(x)-\varphi(0) = \varphi'(\xi)\cdot x$$

Поэтому

$$\frac{|\varphi(x)-\varphi(0)|}{|x|} = |\varphi'(\xi)|$$

Для каждой основной функции $\varphi(x)$ ее производная $\varphi'(x)$ непрерывна на отрезке $[-1,1]$, а, значит, ограничена на $[-1,1]$.

Таким образом, существует такая константа $M>0$, что

$$\left|\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x+i\varepsilon}\right| \leqslant |\varphi'(\xi)| \leqslant M\,.$$

Поскольку константа $M > 0$ интегрируема на $[-1,1]$, то по теореме Лебега об ограниченной сходимости можно перейти к пределу под знаком интеграла.

В итоге получаем

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x+i\varepsilon}\,dx = \int\limits_{-1}^{+1}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx = \text{v.p.}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx =$$

$$= \text{v.p.}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx - \underbrace{\text{v.p.}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{\varphi(0)}{x}\,dx}_{\substack{=0\,,\\ \text{т.к. функция нечетная}}} = \text{v.p.}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx$$

- Рассмотрим, наконец, интеграл

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{\varphi(0)}{x+i\varepsilon}\,dx$$

и домножим в нем числитель и знаменатель дроби на комплексно сопряженное число

$$\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(0)}{x+i\varepsilon}\,dx = \varphi(0)\int_{-1}^{1} \frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\,dx =$$

$$= \underbrace{\varphi(0)\int_{-1}^{1} \frac{x}{x^2+\varepsilon^2}\,dx}_{\substack{=0\,, \\ \text{т.к. функция нечетная}}} -i\varepsilon\,\varphi(0)\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2+\varepsilon^2}\,dx = -i\varepsilon\,\varphi(0)\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2+\varepsilon^2}\,dx =$$

$$= -i\varepsilon\,\varphi(0)\,\frac{1}{\varepsilon}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\varepsilon}\,\Big|_{-1}^{1} = -2i\,\varphi(0)\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{\varepsilon} \;\to -i\,\pi\,\varphi(0) \quad \text{при} \quad \varepsilon\to+0$$

Таким образом, мы получили

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left\langle \frac{1}{x+i\varepsilon}\,,\,\varphi(x)\right\rangle = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x+i\varepsilon}\,\varphi(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{-1} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx + \int_{1}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx + \mathrm{v.p.}\int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx - i\,\pi\,\varphi(0) =$$

$$= \mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx - i\,\pi\,\varphi(0) = \left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x} - i\pi\,\delta(x)\,,\,\varphi(x)\right\rangle$$

Таким образом, мы доказали, что в пункте а)

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\;\frac{1}{x+i\varepsilon} = \mathcal{P}\frac{1}{x} - i\pi\,\delta(x) \tag{6}$$

Для того, чтобы вычислить предел в пункте б), достаточно взять комплексное сопряжение в формуле (6):

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\;\frac{1}{x-i\varepsilon} = \mathcal{P}\frac{1}{x} + i\pi\,\delta(x)$$

Решение задачи 5 завершено.

Следующее занятие будет посвящено дифференцированию обобщенных функций, а также методам решения простейших линейных алгебраических уравнений в пространстве $S'(\mathbb{R})$.

Спасибо за внимание.
Не болейте!