Обобщенные решения уравнений Пуассона и Гельмгольца в $S'(\mathbb{R}^3)$. Примеры решения задач

Самарова С.С.

ФОПФ, 3 курс, УМФ

Учебное пособие для дистанционных занятий

В данном пособии для дистанционного занятия рассматриваются методы решения уравнений Пуассона

$$\Delta u(x) = f(x)$$

и Гельмгольца

$$\Delta u(x) - a^2 u(x) = f(x)$$

в пространстве $S'(\mathbb{R}^3)$.

Вычисление функций Грина для операторов Гельмгольца и Лапласа в пространстве $S'(\mathbb{R}^3)$.

Задача 1 (задание 2.7) *Пусть* $a > 0$.

1. *Доказать, что оператор Гельмгольца*

$$\Delta - a^2$$

   имеет в пространстве $S'(\mathbb{R}^3)$ *единственную функцию Грина* $\mathcal{E}_a(x)$.

2. *Вычислить* $\mathcal{E}_a(x) \in S'(\mathbb{R}^3)$ *и найти в* $S'(\mathbb{R}^3)$ *ее предел* $\mathcal{E}_0(x)$ *при* $a \to +0$.

3. Доказать, что $\mathcal{E}_0(x)$ – функция Грина оператора Лапласа в $S'(\mathbb{R}^3)$.

Решение.

1. Функция Грина $\mathcal{E}_a(x)$ оператора Гельмгольца является решением уравнения

$$\Delta\,\mathcal{E}_a(x) - a^2\mathcal{E}_a(x) = \delta(x)$$

Взяв преобразование Фурье от обеих частей этого уравнения, получим

$$\Big((-iy_1)^2 + (-iy_2)^2 + (-iy_3)^2\Big)F\big[\mathcal{E}_a\big](y) - a^2F\big[\mathcal{E}_a\big](y) = 1$$

$$\big(-|y|^2 - a^2\big)\,F\big[\mathcal{E}_a\big](y) = 1 \qquad (1)$$

Поскольку для любого $y \in \mathbb{R}^3$ выполнено неравенство

$$\Big|-|y|^2 - a^2\Big| \geqslant a^2 > 0$$

то решение уравнение (1) единственно и имеет вид

$$F\big[\mathcal{E}_a\big](y) = -\,\frac{1}{|y|^2 + a^2}$$

Таким образом, доказано, что оператор Гельмгольца имеет в пространстве $S'(\mathbb{R}^3)$ единственную функцию Грина $\mathcal{E}_a(x)$.

2. Поскольку

$$\mathcal{E}_a(x) = -F^{-1}\left[\frac{1}{|y|^2 + a^2}\right]$$

то для любой основной функции $\varphi(y) \in S(\mathbb{R}^3)$ выполнены равенства

$$\big\langle\mathcal{E}_a(x)\,,\,\varphi(x)\big\rangle = -\left\langle F^{-1}\left[\frac{1}{|y|^2 + a^2}\right]\,,\,\varphi(x)\right\rangle = -\left\langle\frac{1}{|y|^2 + a^2}\,,\,F^{-1}\left[\varphi(x)\right]\right\rangle =$$

$$= -\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{dy}{|y|^2 + a^2}\,F^{-1}\left[\varphi(x)\right] = -\,\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3}dy\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{|y|^2 + a^2}\,e^{-i(x,y)}\,\varphi(x)\,dx \qquad (2)$$

Заметим, что в пространстве $\mathbb{R}^3$ подынтегральная функция не является абсолютно интегрируемой по y, и сразу применять теорему Фубини нельзя.

Поэтому, воспользовавшись сходимостью интеграла в правой части формулы (2), перепишем правую часть в другом виде

$$- \frac{1}{(2\pi)^3} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dy \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|y|^2 + a^2} \, e^{-i(x,y)} \, \varphi(x) \, dx =$$

$$= - \frac{1}{(2\pi)^3} \lim_{R \to +\infty} \int\limits_{|y|<R} dy \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|y|^2 + a^2} \, e^{-i(x,y)} \, \varphi(x) \, dx$$

Теперь, применяя теорему Фубини, получаем

$$-\frac{1}{(2\pi)^3} \lim_{R \to +\infty} \int\limits_{|y|<R} dy \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|y|^2 + a^2} \, e^{-i(x,y)} \, \varphi(x) \, dx =$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^3} \lim_{R \to +\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dx \, \varphi(x) \int\limits_{|y|<R} \frac{1}{|y|^2 + a^2} \, e^{-i(x,y)} \, dy \tag{3}$$

Вычислим отдельно внутренний интеграл из формулы (3)

$$\int\limits_{|y|<R} \frac{1}{|y|^2 + a^2} \, e^{-i(x,y)} \, dy$$

Для этого перейдем к сферическим координатам, выбрав в качестве угла θ угол между направлениями векторов y и x, а в качестве угла ψ угол с произвольно выбранным фиксированным направлением в плоскости, перпендикулярной x. Тогда

$$(x,y) = r|x|\cos\theta, \quad |J| = r^2 \sin\theta,$$

и интеграл (3) можно преобразовать

$$\int\limits_{|y|<R} \frac{1}{|y|^2 + a^2} \, e^{-i(x,y)} \, dy = \int\limits_0^{2\pi} d\psi \int\limits_0^R dr \int\limits_0^{\pi} \frac{e^{-ir|x|\cos\theta} r^2 \sin\theta}{r^2 + a^2} \, d\theta =$$

$$= \frac{2\pi}{|x|} \int\limits_0^R \left. \frac{e^{-ir|x|\cos\theta} r}{i(r^2 + a^2)} \right|_0^{\pi} dr =$$

$$= \frac{2\pi}{|x|} \int\limits_0^R \frac{r\left(e^{ir|x|} - e^{-ir|x|}\right)}{i(r^2+a^2)}\, dr = \frac{4\pi}{|x|} \int\limits_0^R \frac{r\sin\bigl(r|x|\bigr)}{r^2+a^2}\, dr$$

Подставим полученный результат в формулу

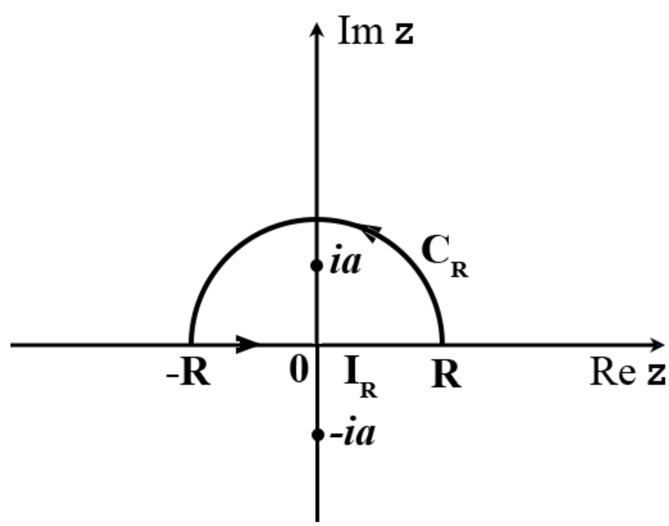
$$-\frac{1}{(2\pi)^3} \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dx\, \varphi(x) \int\limits_{|y|<R} \frac{1}{|y|^2+a^2}\, e^{-i(x,y)}\, dy =$$

$$= -\frac{1}{2\pi^2} \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dx\, \frac{\varphi(x)}{|x|} \int\limits_0^R \frac{r\sin\bigl(r|x|\bigr)}{r^2+a^2}\, dr \qquad (4)$$

Докажем, что к интегралу (4) можно применить теорему Лебега об ограниченной сходимости. Для этого получим оценку модуля интеграла

$$I(R,|x|) = \int\limits_0^R \frac{r\sin\bigl(r|x|\bigr)}{r^2+a^2}\, dr = \frac{1}{2}\int\limits_{-R}^R \frac{r\sin\bigl(r|x|\bigr)}{r^2+a^2}\, dr = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\left(\int\limits_{-R}^R \frac{re^{i|x|r}}{r^2+a^2}\, dr\right)$$

не зависящую от R и x, используя методы ТФКП.



Обозначим

$$f(z) = \frac{ze^{i|x|z}}{(z+ia)(z-ia)};$$

$$I_R = \{\operatorname{Im} z = 0,\ \operatorname{Re} z \in [-R, R]\};$$
$$C_R = \{|z| = R, \operatorname{Im} z > 0\}$$

и рассмотрим на комплексной плоскости ориентированный против часовой стрелки замкнутый контур

$$\gamma_R = I_R \cup C_R,$$

состоящий из отрезка I_R на действительной оси и полуокружности C_R в верхней полуплоскости.

Поскольку единственной особой точкой в верхней полуплоскости у функции $f(z)$ является полюс первого порядка $z_0 = ia$, то, как мы знаем из ТФКП, при $R > a$

$$\oint\limits_{\gamma_R} f(z)dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=ia} f(z) = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=ia} \frac{ze^{i|x|z}}{(z+ia)(z-ia)} = 2\pi i\, \frac{iae^{-a|x|}}{2ia} = \pi i\ e^{-a|x|}$$

При $R > a\sqrt{2}$ оценим модуль интеграла

$$\left| \int\limits_{I_R} f(z)dz \right| = \left| \oint\limits_{\gamma_R} f(z)dz - \int\limits_{C_R} f(z)dz \right| \leqslant \left| \oint\limits_{\gamma_R} f(z)dz \right| + \left| \int\limits_{C_R} f(z)dz \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \ \pi i\ e^{-a|x|} \ \right| + \pi R \max_{C_R} \left| f(z) \right| \leqslant \pi + \pi R \max_{C_R} \left| \ \frac{ze^{i|x|z}}{z^2+a^2} \ \right| \leqslant$$

$$\leqslant \pi + \pi R^2 \max_{C_R}\ \frac{1}{|z^2+a^2|} \leqslant \pi + \pi R^2 \max_{C_R}\ \frac{1}{|z|^2-a^2}\ =$$

$$= \pi + \frac{\pi R^2}{R^2-a^2}\ = 2\pi + \frac{\pi a^2}{R^2-a^2} < 3\pi$$

Следовательно,

$$\left| \ I\Big(R, |x|\Big) \ \right| = \frac{1}{2} \left| \operatorname{Im} \left(\int\limits_{-R}^{R} \frac{re^{i|x|r}}{r^2+a^2}\, dr \right) \right| = \frac{1}{2} \left| \operatorname{Im} \left(\int\limits_{I_R} f(z)dz \right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left|\int\limits_{I_R} f(z)dz\right| \leqslant \frac{3\pi}{2}$$

Кроме того, в силу леммы Жордана

$$\int\limits_{C_R} \frac{ze^{i|x|z}}{z^2+a^2}dz \;\to 0 \quad \text{при } R \to +\infty\,,$$

поэтому

$$\lim_{R\to+\infty} I\Big(R,|x|\Big) = \frac{1}{2}\lim_{R\to+\infty} \operatorname{Im}\left(\int\limits_{-R}^{R} \frac{re^{i|x|r}}{r^2+a^2}\,dr\right) = \frac{1}{2}\lim_{R\to+\infty} \operatorname{Im}\left(\oint\limits_{\gamma_R} f(z)dz\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{R\to+\infty} \operatorname{Im}\Big(\pi i\; e^{-a|x|}\Big) = \frac{\pi}{2}e^{-a|x|}$$

Желаемая оценка получена, и мы можем применить теорему Лебега об ограниченной сходимости к интегралу (4)

$$-\frac{1}{2\pi^2}\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dx\;\frac{\varphi(x)}{|x|}\int\limits_{0}^{R}\frac{r\sin\big(r|x|\big)}{r^2+a^2}\;dr = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{e^{-a|x|}}{|x|}\;\varphi(x)\,dx$$

Таким образом,

$$\Big\langle \mathcal{E}_a(x)\,,\,\varphi(x)\Big\rangle = \left\langle -\frac{e^{-a|x|}}{4\pi|x|}\,,\,\varphi(x)\right\rangle$$

Следовательно, функция Грина оператора Гельмгольца имеет вид

$$\mathcal{E}_a(x) = -\frac{e^{-a|x|}}{4\pi|x|}$$

Теперь найдем предел

$$\lim_{a\to+0}\mathcal{E}_a(x)$$

в пространстве обобщенных функций $S'(\mathbb{R}^3)$. Для этого рассмотрим действие предела на произвольную основную функцию $\varphi \in S(\mathbb{R}^3)$

$$\left\langle \lim_{a\to+0} \mathcal{E}_a(x)\,,\,\varphi(x) \right\rangle = \lim_{a\to+0} \left\langle \mathcal{E}_a(x)\,,\,\varphi(x) \right\rangle = \lim_{a\to+0} \left\langle -\frac{e^{-a|x|}}{4\pi|x|}\,,\,\varphi(x) \right\rangle =$$

$$= -\lim_{a\to+0} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-a|x|}}{4\pi|x|}\,\varphi(x)\,dx \qquad (5)$$

Для произвольной основной функции $\varphi \in S(\mathbb{R}^3)$ существует константа $A > 0$ такая, что выполнены неравенства

$$\left| \frac{e^{-a|x|}}{4\pi|x|}\,\varphi(x) \right| \leqslant \frac{|\varphi(x)|}{4\pi|x|} \leqslant \frac{A}{4\pi|x|\,(1+|x|^4)}$$

Поэтому к интегралу (5) можно применить теорему Лебега об ограниченной сходимости

$$-\lim_{a\to+0} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-a|x|}}{4\pi|x|}\,\varphi(x)\,dx = -\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi|x|}\,\varphi(x)\,dx = \left\langle -\frac{1}{4\pi|x|}\,,\,\varphi(x) \right\rangle$$

Следовательно,

$$\lim_{a\to+0} \mathcal{E}_a(x) = -\frac{1}{4\pi|x|} = \mathcal{E}_0(x)$$

3. Докажем, что $\mathcal{E}_0(x)$ – функция Грина оператора Лапласа в пространстве $\varphi \in S(\mathbb{R}^3)$.

Из решения задания 1.17 б) следует формула для преобразования Фурье обобщенной функции

$$F\big[\mathcal{E}_0(x)\big](y) = F\left[-\frac{1}{4\pi|x|}\right](y) = -\frac{1}{|y|^2}$$

(см. пособие для дистанционного занятия «Преобразование Фурье обобщенных функций в многомерном случае»).

Для того, чтобы доказать, что функция $\mathcal{E}_0(x)$ является решением уравнения

$$\Delta\,\mathcal{E} = \delta(x) \qquad (6)$$

возьмем преобразование Фурье от обеих частей равенства (6)

$$\Big((-iy_1)^2+(-iy_2)^2+(-iy_3)^2\Big)F\big[\mathcal{E}\big](y)=1$$

$$-|y|^2F\big[\mathcal{E}\big](y)=1 \tag{7}$$

Легко видеть, что преобразование Фурье $F\big[\mathcal{E}_0(x)\big]$ является решением уравнения (7).

Следовательно, сама функция $F\big[\mathcal{E}_0(x)\big]$ является решением уравнения (6), т.е. функцией Грина трехмерного оператора Лапласа

Доказано.

Свойства обобщенных решений уравнений Гельмгольца и Пуассона в пространстве $S'(\mathbb{R}^3)$.

Свойство 1. Свертка $f*\mathcal{E}_0$ является обобщенным решением уравнения Пуассона

$$\Delta\, u=f \tag{8}$$

Свойство 2. Свертка $f*\mathcal{E}_a$ является обобщенным решением уравнения Гельмгольца

$$\Delta\, u-a^2u=f \tag{9}$$

Свойство 3. Для любой абсолютно интегрируемой функции $f(x)$ существует свертка $f*\mathcal{E}_0$ регулярного функционала $f(x)$ и функции Грина оператора Лапласа $\mathcal{E}_0$, которая вычисляется по формуле

$$f(x)*\mathcal{E}_0(x)=f(x)*\left(-\frac{1}{4\pi|x|}\right)=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{f(y)}{|x-y|}\,dy \tag{10}$$

Эту свертку называют **объемным потенциалом с плотностью** $f(x)$.

Поиск обобщенных решений уравнений Гельмгольца и Пуассона в пространстве $S'(\mathbb{R}^3)$.

Начнем с задачи из экзаменационной контрольной по УМФ 2018/2019 учебного года.

Задача 2 *Доказать, что для любого* $\varepsilon > 0$ *в пространстве* $S'(\mathbb{R}^3)$ *уравнение*

$$\Delta u(x) = \varepsilon u(x) + \theta\Big(2 - |x|\Big)|x|^{-\frac{4}{3}}, \quad x \in \mathbb{R}^3$$

имеет единственное решение $u_\varepsilon(x) \in S'(\mathbb{R}^3)$ *, и найти предел*

$$u_0(x) = \lim_{\varepsilon \to +0} u_\varepsilon(x)$$

в пространстве $S'(\mathbb{R}^3)$

Решение. Заметим, что данное в задаче уравнение является уравнением Гельмгольца с $a = \sqrt{\varepsilon}$, записывая это уравнение в виде

$$\Delta u(x) - (\sqrt{\varepsilon})^2 u(x) = \theta\Big(2 - |x|\Big)|x|^{-\frac{4}{3}} \tag{11}$$

Поскольку, как мы видели в задаче 1, однородное уравнение

$$\Delta u(x) - (\sqrt{\varepsilon})^2 u(x) = 0$$

имеет только нулевое решение в пространстве $S'(\mathbb{R}^3)$, то единственным решением уравнения (11) будет свертка правой части уравнения (11) с функцией Грина оператора Гельмгольца

$$u_\varepsilon(x) = \left(\theta\Big(2 - |x|\Big)|x|^{-\frac{4}{3}}\right) * \left(-\frac{e^{-\sqrt{\varepsilon}|x|}}{4\pi|x|}\right)$$

В силу финитности функции

$$\theta\Big(2 - |x|\Big)|x|^{-\frac{4}{3}}$$

эта свертка существует для любого $\varepsilon > 0$.

Найдем предел

$$u_0(x) = \lim_{\varepsilon \to +0} u_\varepsilon(x)$$

в пространстве $S'(\mathbb{R}^3)$

Для любой основной функции $\varphi \in S(\mathbb{R}^3)$ получаем

$$\Big\langle u_0(x)\,,\, \varphi(x)\Big\rangle = \Big\langle \lim_{\varepsilon \to +0} u_\varepsilon(x)\,,\, \varphi(x)\Big\rangle = \lim_{\varepsilon \to +0}\Big\langle u_\varepsilon(x)\,,\, \varphi(x)\Big\rangle =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0} \left\langle \left(\theta\Big(2-|x|\Big)|x|^{-\frac{4}{3}}\right) * \left(-\frac{e^{-\sqrt{\varepsilon}|x|}}{4\pi|x|}\right), \varphi(x) \right\rangle =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0} \lim_{R\to+\infty} \left\langle \theta\Big(2-|x|\Big)|x|^{-\frac{4}{3}}, \eta_1\left(\frac{x}{R}\right) \left\langle -\frac{e^{-\sqrt{\varepsilon}|y|}}{4\pi|y|}, \varphi(x+y) \right\rangle \right\rangle =$$

$$= - \lim_{\varepsilon\to+0} \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{|x|<2} dx\, |x|^{-\frac{4}{3}} \eta_1\left(\frac{x}{R}\right) \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-\sqrt{\varepsilon}|y|}}{4\pi|y|} \varphi(x+y)\, dy$$

Сделав замену переменной

$$z = x + y$$

во внутреннем интеграле, находим

$$- \lim_{\varepsilon\to+0} \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{|x|<2} dx\, |x|^{-\frac{4}{3}} \eta_1\left(\frac{x}{R}\right) \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-\sqrt{\varepsilon}|y|}}{4\pi|y|} \varphi(x+y)\, dy =$$

$$= - \lim_{\varepsilon\to+0} \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{|x|<2} dx\, |x|^{-\frac{4}{3}} \eta_1\left(\frac{x}{R}\right) \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-\sqrt{\varepsilon}|z-x|}}{4\pi|z-x|} \varphi(z)\, dz =$$

$$= - \lim_{\varepsilon\to+0} \lim_{R\to+\infty} \left(\int\limits_{|x|<2} dx \int\limits_{|z|<3} |x|^{-\frac{4}{3}} \eta_1\left(\frac{x}{R}\right) \frac{e^{-\sqrt{\varepsilon}|z-x|}}{4\pi|z-x|} \varphi(z)\, dz + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{|x|<2} dx \int\limits_{|z|\geqslant 3} |x|^{-\frac{4}{3}} \eta_1\left(\frac{x}{R}\right) \frac{e^{-\sqrt{\varepsilon}|z-x|}}{4\pi|z-x|} \varphi(z)\, dz \right) =$$

Рассмотрим интеграл

$$- \lim_{\varepsilon\to+0} \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{|x|<2} dx \int\limits_{|z|<3} |x|^{-\frac{4}{3}} \eta_1\left(\frac{x}{R}\right) \frac{e^{-\sqrt{\varepsilon}|z-x|}}{4\pi|z-x|} \varphi(z)\, dz \tag{12}$$

В силу ограниченности 1-срезки

$$\left|\eta_1\left(\frac{x}{R}\right)\right| \leqslant M$$

выполнена оценка сверху, не зависящая от R и от ε и абсолютно интегрируемая по всем переменным

$$\left|\theta\Bigl(2-|x|\Bigr)\,\theta\Bigl(3-|z|\Bigr)|x|^{-\frac{4}{3}}\,\eta_1\left(\frac{x}{R}\right)\frac{e^{-\sqrt{\varepsilon}\,|z-x|}}{4\pi|z-x|}\,\varphi(z)\right| \leqslant$$

$$\leqslant M|x|^{-\frac{4}{3}}\;\frac{\bigl|\varphi(z)\bigr|\,\theta\Bigl(2-|x|\Bigr)\,\theta\Bigl(3-|z|\Bigr)}{4\pi|z-x|}$$

Поэтому к интегралу (12) можно применить теорему Фубини и теорему Лебега об ограниченной сходимости

$$-\lim_{\varepsilon\to+0}\;\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{|x|<2}dx\int\limits_{|z|<3}|x|^{-\frac{4}{3}}\,\eta_1\left(\frac{x}{R}\right)\frac{e^{-\sqrt{\varepsilon}\,|z-x|}}{4\pi|z-x|}\,\varphi(z)\,dz=$$

$$=-\int\limits_{|z|<3}dz\,\varphi(z)\int\limits_{|x|<2}\frac{|x|^{-\frac{4}{3}}}{4\pi|z-x|}\,dx \tag{13}$$

Теперь рассмотрим интеграл

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\;\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{|x|<2}dx\int\limits_{|z|\geqslant 3}|x|^{-\frac{4}{3}}\,\eta_1\left(\frac{x}{R}\right)\frac{e^{-\sqrt{\varepsilon}\,|z-x|}}{4\pi|z-x|}\,\varphi(z)\,dz \tag{14}$$

и оценим подынтегральную функцию

$$\left|\theta\Bigl(2-|x|\Bigr)\,\theta\Bigl(|z|-3\Bigr)|x|^{-\frac{4}{3}}\,\eta_1\left(\frac{x}{R}\right)\frac{e^{-\sqrt{\varepsilon}\,|z-x|}}{4\pi|z-x|}\,\varphi(z)\right| \leqslant$$

$$\leqslant\theta\Bigl(|z|-3\Bigr)\,\theta\Bigl(2-|x|\Bigr)\,\frac{M|x|^{-\frac{4}{3}}|\varphi(z)|}{4\pi\bigl(|z|-|x|\bigr)}\leqslant\theta\Bigl(2-|x|\Bigr)\,\frac{M|x|^{-\frac{4}{3}}A}{4\pi\Bigl(1+|z|^4\Bigr)}$$

Поскольку полученная оценка не зависит от R и от ε и абсолютно интегрируема по всем переменным, то к интегралу (14) можно применить теорему

Фубини и теорему Лебега об ограниченной сходимости, следствием которых является равенство

$$-\lim_{\varepsilon\to+0}\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{|x|<2}dx\int\limits_{|z|\geqslant 3}|x|^{-\frac{4}{3}}\,\eta_1\left(\frac{x}{R}\right)\frac{e^{-\sqrt{\varepsilon}\,|z-x|}}{4\pi|z-x|}\,\varphi(z)\,dz=$$

$$=-\int\limits_{|z|\geqslant 3}dz\,\varphi(z)\int\limits_{|x|<2}\frac{|x|^{-\frac{4}{3}}}{4\pi|z-x|}\,dx \tag{15}$$

Складывая интегралы (13) и (15), окончательно получаем

$$\Big\langle u_0(x),\varphi(x)\Big\rangle=-\int\limits_{\mathbb{R}^3}dz\,\varphi(z)\int\limits_{|x|<2}\frac{|x|^{-\frac{4}{3}}}{4\pi|z-x|}\,dx \tag{16}$$

Поэтому

$$u_0(z)=-\int\limits_{|x|<2}\frac{|x|^{-\frac{4}{3}}}{4\pi|z-x|}\,dx$$

и мы переходим к вычислению этого интеграла.

Для вычисления интеграла используем сферические координаты, выбрав в качестве угла θ угол между направлениями векторов z и x, а в качестве угла ψ угол с произвольно выбранным фиксированным направлением в плоскости, перпендикулярной z. Кроме того, записывая модуль разности векторов z и x по теореме косинусов

$$|z-x|=\sqrt{|z|^2+|x|^2-2|z||x|\cos\theta}$$

получаем

$$\int\limits_{|x|<2}\frac{|x|^{-\frac{4}{3}}}{4\pi|z-x|}\,dx=\int\limits_0^2 dr\int\limits_0^{2\pi}d\psi\int\limits_0^{\pi}\frac{r^{-\frac{4}{3}}\,r^2\sin\theta}{4\pi\sqrt{|z|^2+r^2-2|z|r\cos\theta}}\,d\theta=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^2 dr\,r^{\frac{2}{3}}\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin\theta}{\sqrt{|z|^2+r^2-2|z|r\cos\theta}}\,d\theta=$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^2 r^{\frac{2}{3}} \, \frac{\sqrt{|z|^2 + r^2 - 2|z| r \cos\theta}}{|z| r} \Bigg|_0^\pi \, dr =$$

$$= \frac{1}{2|z|} \int\limits_0^2 r^{-\frac{1}{3}} \Big(\big(|z| + r \big) - \Big| |z| - r \Big| \Big) \, dr =$$

$$= \frac{1}{2|z|} \begin{cases} \int\limits_0^2 r^{-\frac{1}{3}} \Big(|z| + r - |z| + r \Big) \, dr, & |z| > 2, \\ \int\limits_0^{|z|} r^{-\frac{1}{3}} \Big(|z| + r - |z| + r \Big) \, dr + \int\limits_{|z|}^2 r^{-\frac{1}{3}} \Big(|z| + r + |z| - r \Big) \, dr, & |z| \leqslant 2, \end{cases} =$$

$$= \frac{1}{2|z|} \begin{cases} 2 \int\limits_0^2 r^{\frac{2}{3}} \, dr, & |z| > 2, \\ 2 \int\limits_0^{|z|} r^{\frac{2}{3}} \, dr + 2|z| \int\limits_{|z|}^2 r^{-\frac{1}{3}} \, dr, & |z| \leqslant 2, \end{cases} =$$

$$= \frac{1}{2|z|} \begin{cases} \dfrac{6 \cdot 2^{\frac{5}{3}}}{5}, & |z| > 2, \\ \dfrac{6 \cdot |z|^{\frac{5}{3}}}{5} + 3|z| \Big(2^{\frac{2}{3}} - |z|^{\frac{2}{3}} \Big), & |z| \leqslant 2, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{6 \cdot 2^{\frac{2}{3}}}{5|z|}, & |z| > 2, \\ \dfrac{3 \cdot |z|^{\frac{2}{3}}}{5} + \dfrac{3}{2} \cdot 2^{\frac{2}{3}} - \dfrac{3}{2} |z|^{\frac{2}{3}}, & |z| \leqslant 2, \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{6 \cdot 2^{\frac{2}{3}}}{5|z|}, & |z| > 2, \\ -\dfrac{9 \cdot |z|^{\frac{2}{3}}}{10} + \dfrac{3}{2} \cdot 2^{\frac{2}{3}}, & |z| \leqslant 2, \end{cases} =$$

$$= \frac{6 \cdot 2^{\frac{2}{3}}}{5|z|} \, \theta\Big(|z| - 2 \Big) + \left(-\frac{9 \cdot |z|^{\frac{2}{3}}}{10} + \frac{3}{2} \cdot 2^{\frac{2}{3}} \right) \theta(2 - |z|)$$

Ответ.

$$u_0(x) = -\frac{6\cdot 2^{\frac{2}{3}}}{5|z|}\,\theta\Big(|z|-2\Big) + \left(\frac{9\cdot|z|^{\frac{2}{3}}}{10} - \frac{3}{2}\cdot 2^{\frac{2}{3}}\right)\theta(2-|z|)$$

Решим еще одну задачу, в которой используется формула для объемного потенциала.

Задача 3 (задание 2.8 (б)) *Пусть* $a>0$. *Найти обобщенное решение* $u(x)\in S'(\mathbb{R}^3)$ *уравнения Пуасссона*

$$\Delta u(x) = \frac{\theta\Big(|x|-a\Big)}{|x|^4} \tag{17}$$

Решение. Обобщенным решением уравнения (17) будет свертка правой части уравнения (17) с функцией Грина оператора Лапласа

$$u(x) = \frac{\theta\Big(|x|-a\Big)}{|x|^4} * \left(-\frac{1}{4\pi|x|}\right)$$

Воспользовавшись формулой (10), получаем

$$u(x) = -\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\theta\Big(|y|-a\Big)}{4\pi|x-y||y|^4}\,dy = -\int\limits_{|y|>a} \frac{1}{4\pi|x-y||y|^4}\,dy$$

Для вычисления этого интеграла переходим к сферическим координатам, выбрав в качестве угла θ угол между направлениями векторов y и x, а в качестве угла ψ угол с произвольно выбранным фиксированным направлением в плоскости, перпендикулярной y. Записывая модуль разности векторов y и x по теореме косинусов

$$|y-x| = \sqrt{|y|^2+|x|^2-2|y||x|\cos\theta}$$

получаем

$$\int\limits_{|y|>a} \frac{1}{4\pi|x-y||y|^4}\,dy = \int\limits_a^{+\infty} dr \int\limits_0^{2\pi} d\psi \int\limits_0^{\pi} \frac{r^2\sin\theta}{4\pi r^4\sqrt{|x|^2+r^2-2|x|r\cos\theta}}\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_a^{+\infty}\frac{dr}{r^2}\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin\theta}{\sqrt{|x|^2+r^2-2|x|r\cos\theta}}\,d\theta = \frac{1}{2}\int\limits_a^{+\infty}\left.\frac{\sqrt{|x|^2+r^2-2|x|r\cos\theta}}{|x|r}\right|_0^{\pi}\frac{dr}{r^2} =$$

$$= \frac{1}{2|x|}\int\limits_a^{+\infty}\frac{1}{r^3}\Big(\Big(|x|+r\Big)-\Big||x|-r\Big|\Big)\,dr =$$

$$= \frac{1}{2|x|}\begin{cases}\displaystyle\int\limits_a^{+\infty}\frac{1}{r^3}\,\Big(|x|+r+|x|-r\Big)\,dr, & |x|<a,\\[2em] \displaystyle\int\limits_a^{|x|}\frac{1}{r^3}\,\Big(|x|+r-|x|+r\Big)\,dr+\int\limits_{|x|}^{+\infty}\frac{1}{r^3}\,\Big(|x|+r+|x|-r\Big)\,dr, & |x|\geqslant a,\end{cases} =$$

$$= \frac{1}{2|x|}\begin{cases}\displaystyle 2|x|\int\limits_a^{+\infty}\frac{1}{r^3}\,dr, & |x|<a,\\[2em] \displaystyle 2\int\limits_a^{|x|}\frac{1}{r^2}\,dr+2|x|\int\limits_{|x|}^{+\infty}\frac{1}{r^3}\,dr, & |x|\geqslant a,\end{cases} =$$

$$= \frac{1}{2|x|}\begin{cases}\dfrac{|x|}{a^2}, & |x|<a,\\[1.5em] -\dfrac{2}{|x|}+\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{|x|}, & |x|\geqslant a,\end{cases} = \begin{cases}\dfrac{1}{2a^2}, & |x|<a,\\[1.5em] \dfrac{1}{a|x|}-\dfrac{1}{2|x|^2}, & |x|\geqslant a,\end{cases} =$$

$$= \frac{1}{2a^2}\,\theta\Big(a-|x|\Big)+\left(\frac{1}{a|x|}-\frac{1}{2|x|^2}\right)\theta\Big(|x|-a\Big)$$

Ответ.

$$u(x) = -\frac{1}{2a^2}\,\theta\Big(a-|x|\Big)+\left(-\frac{1}{a|x|}+\frac{1}{2|x|^2}\right)\theta\Big(|x|-a\Big)$$

На этом мы заканчиваем решение задач, связанных с обобщенными решениями уравнений Гельмгольца и Пуассона.

Спасибо за внимание.
Не болейте!