Решение простейших линейных однородных уравнений в пространстве $S'(\mathbb{R})$

Самарова С.С.

ФОПФ, 3 курс, УМФ

Учебное пособие для дистанционных занятий

В данном пособии мы продолжаем изучение пространства обобщенных функций $S'(\mathbb{R})$.

Нашей целью является поиск общих решений линейных уравнений вида

$$P(x)f(x) = 0\,,$$

где $P(x)$ – заданный многочлен, а $f(x)$ – неизвестная обобщенная функция из пространства $S'(\mathbb{R})$.

Приведем сначала необходимые теоретические сведения.

Определение 1 *Функцию*

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

называют финитной, если существует такой отрезок $[-A, A]$, *что* $h(x) = 0$ *для всех* $x \notin [-A, A]$.

Определение 2 *Носителем функции*

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

называют замыкание множества тех точек, в которых функция отлична от нуля, т.е.

$$\operatorname{supp} h = \overline{\{x \in \mathbb{R} : \quad h(x) \neq 0\}}$$

Из определения 1 следует, что носитель финитной функции ограничен.

Определение 3 *Бесконечно дифференцируемую финитную функцию* $\eta_R(x)$ *называют* R*-срезкой, если* $\eta_R(x) = 1$ *для всех* $x \in [-R, R]$.

Утверждение 1 *Для любой пары чисел* R *и* r *таких, что* $0 < R < r$, *существует* R*-срезка (рис.1), удовлетворяющая для всех* $x \in [-r, r]$ *неравенству*

$$0 \leqslant \eta_R(x) \leqslant 1\,,$$

носитель которой содержится в отрезке $[-r, r]$.

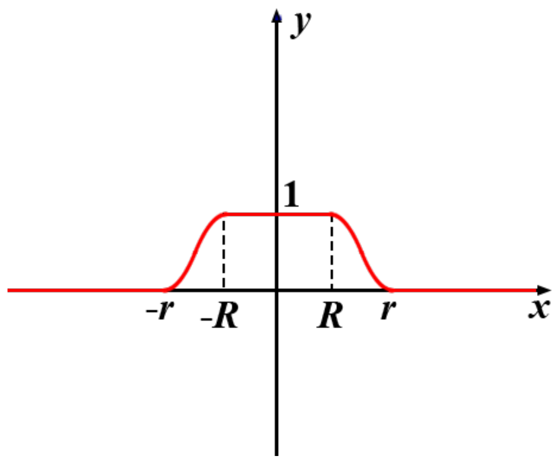

Рис.1

Утверждение 1 будет доказано на лекциях.

Кроме того, для решения задач нам потребуется следующая наглядная лемма, доказательство которой также будет приведено на лекциях.

Лемма 1. *Для любой бесконечно дифференцируемой на* $(-\infty, +\infty)$ *функции* $\varphi(x)$, *любой точки* $x_0 \in (-\infty, +\infty)$ *и любого натурального числа* n *функция*

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(x) - \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{\varphi^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k}{(x-x_0)^n}\,, & \text{при} \quad x \neq x_0\,, \\[2ex] \dfrac{\varphi^{(n)}(x_0)}{n!}\,, & \text{при} \quad x = x_0\,, \end{cases}$$

является бесконечно дифференцируемой на $(-\infty, +\infty)$.

Начнем с самого простого примера.

Задача 1 *В пространстве* $S'(\mathbb{R})$ *найти все решения уравнения*

$$(x^2+2)\, f(x) = 0 \tag{1}$$

Решение.

Пусть обобщенная функция $f(x)$ является решением уравнения (1). Ее действие на произвольную основную функцию $\varphi(x) \in S(\mathbb{R})$ можно записать в виде

$$\big\langle f(x)\,,\, \varphi(x) \big\rangle = \left\langle f(x)\,,\, (x^2+2)\,\frac{\varphi(x)}{x^2+2} \right\rangle$$

Поскольку для всех $x \in (-\infty, +\infty)$ выполнено неравенство

$$x^2 + 2 \geqslant 2,$$

то

$$\left| \frac{\varphi(x)}{x^2+2} \right| \leqslant \frac{|\varphi(x)|}{2}$$

Следовательно,

$$\frac{\varphi(x)}{x^2+2} \in S(\mathbb{R})$$

Поэтому,

$$\big\langle f(x)\,,\, \varphi(x) \big\rangle = \left\langle f(x)\,,\, (x^2+2)\,\frac{\varphi(x)}{x^2+2} \right\rangle = \left\langle (x^2+2)\, f(x)\,,\, \frac{\varphi(x)}{x^2+2} \right\rangle = 0$$

Таким образом, все решения уравнения (1) – это функция $f = 0$.

Ответ. $f = 0$.

Задача 2 *В пространстве* $S'(\mathbb{R})$ *найти все решения уравнения*

$$x^3\, f(x) = 0 \tag{2}$$

Решение.

Обобщенная функция $f(x)$ является решением уравнения (2) в том, и только в том случае, если для каждой основной функции $\varphi(x) \in S(\mathbb{R})$ выполнено равенство

$$\big\langle x^3 f(x)\,,\, \varphi(x) \big\rangle = \big\langle f(x)\,,\, x^3 \varphi(x) \big\rangle = 0$$

Если бы множество функций вида $x^3\varphi(x)$ совпадало с множеством всех основных функций, то решением уравнения (2) была бы только функция $f = 0$. Однако это не так, и у уравнения (2) есть и другие решения. Для того, чтобы их найти, поступим следующим образом.

Пусть $f(x)$ является решением уравнения (2). Представим произвольную основную функцию $\varphi(x) \in S(\mathbb{R})$ в виде

$$\varphi(x) = \eta_1(x)\varphi(x) + \big(1 - \eta_1(x)\big)\varphi(x),$$

где $\eta_1(x)$ – произвольная 1-срезка.

Тогда действие $f(x)$ на основную функцию $\varphi(x)$ является суммой двух слагаемых

$$\big\langle f(x)\,,\, \varphi(x) \big\rangle = \big\langle f(x)\,,\, \eta_1(x)\varphi(x) \big\rangle + \Big\langle f(x)\,,\, \big(1 - \eta_1(x)\big)\varphi(x) \Big\rangle \tag{3}$$

Вычислим каждое из них.

- Первое слагаемое запишем в виде

$$\big\langle f(x)\,,\, \eta_1(x)\varphi(x) \big\rangle = \left\langle f(x)\,,\, \eta_1(x)\left(\varphi(x) - \varphi(0) - \varphi'(0)\,x - \frac{\varphi''(0)}{2}\,x^2\right) \right\rangle +$$
$$+\left\langle f(x)\,,\, \eta_1(x)\left(\varphi(0) + \varphi'(0)\,x + \frac{\varphi''(0)}{2}\,x^2\right) \right\rangle \tag{4}$$

  и обозначим через $\psi_3(x)$ функцию

$$\psi_3(x) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(x) - \varphi(0) - \varphi'(0)\,x - \dfrac{\varphi''(0)}{2}\,x^2}{x^3}\,, & \text{при} \quad x \neq 0\,, \\[2ex] \dfrac{\varphi^{(3)}(0)}{6}\,, & \text{при} \quad x = 0\,. \end{cases}$$

По лемме 1 функция $\psi_3(x)$ является бесконечно дифференцируемой, откуда следует, что $\psi_3(x) \in S(\mathbb{R})$.

Кроме того, поскольку функция $\eta_1(x)$ бесконечно дифференцируема и ограничена, то функция

$$\eta_1(x)\psi_3(x) \in S(\mathbb{R}).$$

С помощью функции $\psi_3(x)$ равенство (4) можно записать в виде

$$\Big\langle f(x)\,,\,\eta_1(x)\varphi(x)\Big\rangle = \Big\langle f(x)\,,\,x^3\,\eta_1(x)\psi_3(x)\Big\rangle + \\ + \left\langle f(x)\,,\,\eta_1(x)\left(\varphi(0) + \varphi'(0)\,x + \frac{\varphi''(0)}{2}\,x^2\right)\right\rangle \tag{5}$$

Заметим, что поскольку $f(x)$ является решением уравнения (2), то

$$\Big\langle f(x)\,,\,x^3\,\eta_1(x)\psi_3(x)\Big\rangle = \Big\langle x^3\,f(x)\,,\,\eta_1(x)\psi_3(x)\Big\rangle = 0$$

и из (5) следуют равенства

$$\Big\langle f(x)\,,\,\eta_1(x)\varphi(x)\Big\rangle = \left\langle f(x)\,,\,\eta_1(x)\left(\varphi(0) + \varphi'(0)\,x + \frac{\varphi''(0)}{2}\,x^2\right)\right\rangle =$$

$$= \varphi(0)\,\Big\langle f(x)\,,\,\eta_1(x)\Big\rangle + \varphi'(0)\,\Big\langle f(x)\,,\,x\,\eta_1(x)\Big\rangle + \frac{\varphi''(0)}{2}\,\Big\langle f(x)\,,\,x^2\,\eta_1(x)\Big\rangle$$

Вводя константы

$$C_1 = \Big\langle f(x)\,,\,\eta_1(x)\Big\rangle, \quad C_2 = -\Big\langle f(x)\,,\,x\,\eta_1(x)\Big\rangle, \quad C_3 = \frac{1}{2}\,\Big\langle f(x)\,,\,x^2\,\eta_1(x)\Big\rangle,$$

окончательно получаем

$$\Big\langle f(x)\,,\,\eta_1(x)\varphi(x)\Big\rangle = C_1\,\varphi(0) - C_2\,\varphi'(0) + C_3\,\varphi''(0) =$$

$$= C_1\,\Big\langle \delta(x)\,,\,\varphi(x)\Big\rangle + C_2\,\Big\langle \delta'(x)\,,\,\varphi(x)\Big\rangle + C_3\,\Big\langle \delta''(x)\,,\,\varphi(x)\Big\rangle =$$

$$= \Big\langle C_1\,\delta(x) + C_2\,\delta'(x) + C_3\,\delta''(x)\,,\,\varphi(x)\Big\rangle$$

- Теперь вычислим второе слагаемое в правой части формулы (3). Для этого заметим, что функция $1-\eta_1(x)$ равна нулю при всех $x \in [-1,1]$. Поэтому, вводя функцию

$$\psi(x) = \begin{cases} \dfrac{\big(1-\eta_1(x)\big)\varphi(x)}{x^3}\,, & \text{при} \quad x \notin [-1,1]\,, \\ \\ 0\,, & \text{при} \quad x \in [-1,1]\,, \end{cases}$$

получим, что $\psi(x) \in S(\mathbb{R})$ и

$$\big(1-\eta_1(x)\big)\varphi(x) = x^3\,\psi(x)$$

Следовательно,

$$\Big\langle f(x)\,,\,\big(1-\eta_1(x)\big)\varphi(x)\Big\rangle = \Big\langle f(x)\,,\,x^3\,\psi(x)\Big\rangle = \Big\langle x^3\,f(x)\,,\,\psi(x)\Big\rangle = 0$$

Таким образом, для каждой основной функции $\varphi(x) \in S(\mathbb{R})$ справедливо равенство

$$\big\langle f(x)\,,\,\varphi(x)\big\rangle = \Big\langle C_1\,\delta(x) + C_2\,\delta'(x) + C_3\,\delta''(x)\,,\,\varphi(x)\Big\rangle$$

Значит, если обобщенная функция $f(x)$ является решением уравнения

$$x^3\,f(x) = 0\,,$$

то найдутся такие константы C_1, C_2, C_3, что

$$f(x) = C_1\,\delta(x) + C_2\,\delta'(x) + C_3\,\delta''(x)$$

Докажем, что верно и обратное. Проверим, что любая функция вида

$$f(x) = C_1\,\delta(x) + C_2\,\delta'(x) + C_3\,\delta''(x)$$

удовлетворяет уравнению

$$x^3\,f(x) = 0\,.$$

Действительно, для любой основной функции $\varphi(x) \in S(\mathbb{R})$ имеем

$$\big\langle x^3\,f(x)\,,\,\varphi(x)\big\rangle = \big\langle f(x)\,,\,x^3\,\varphi(x)\big\rangle = \Big\langle C_1\,\delta(x)+C_2\,\delta'(x)+C_3\,\delta''(x)\,,\,x^3\,\varphi(x)\Big\rangle =$$

$$= C_1 \left\langle \delta(x)\,,\, x^3\,\varphi(x) \right\rangle - C_2 \left\langle \delta(x)\,,\, \left(x^3\,\varphi(x)\right)' \right\rangle + C_3 \left\langle \delta(x)\,,\, \left(x^3\,\varphi(x)\right)'' \right\rangle =$$

$$= -C_2 \left\langle \delta(x)\,,\, 3x^2\,\varphi(x) + x^3\,\varphi'(x) \right\rangle + C_3 \left\langle \delta(x)\,,\, 6x\,\varphi(x) + 6x^2\varphi'(x) + x^3\,\varphi''(x) \right\rangle = 0$$

Ответ. $f(x) = C_1\,\delta(x) + C_2\,\delta'(x) + C_3\,\delta''(x)$.

Замечание. Точно так же, как это было сделано в задаче 1, можно решить уравнение

$$(x - x_0)^n\,f(x) = 0.$$

Решение такого уравнения имеет вид

$$f(x) = C_1\,\delta(x - x_0) + C_2\,\delta'(x - x_0) + \ldots + C_n\,\delta^{(n-1)}(x - x_0)$$

Перейдем к более сложному уравнению.

Задача 3 *В пространстве* $S'(\mathbb{R})$ *найти все решения уравнения*

$$(x^3 - 5x^2)\,f(x) = 0$$

Решение. Заметим сначала, что у многочлена

$$x^3 - 5x^2$$

два различных корня: $x = 0$ кратности 2 и $x = 5$ кратности 1.

Выберем R-срезку $\eta_R(x)$ с такими R и r, чтобы носители срезок $\eta_R(x)$ и $\eta_R(x-5)$ не пересекались (см. рис.2). В силу утверждения 1 такая возможность всегда существует. В нашем случае мы возьмем $R = 1$ и $r = 2$.

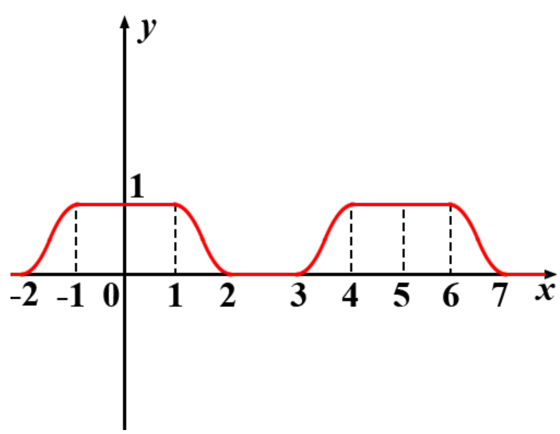

Рис.2

Пусть $f(x)$ является решением уравнения

$$x^2(x-5)\,f(x)=0 \tag{6}$$

Тогда действие $f(x)$ на произвольную основную функцию $\varphi(x)$ можно записать в виде

$$\begin{gathered}\big\langle f(x)\,,\,\varphi(x)\big\rangle=\big\langle f(x)\,,\,\eta_1(x)\varphi(x)\big\rangle+\big\langle f(x)\,,\,\eta_1(x-5)\varphi(x)\big\rangle+\\+\Big\langle f(x)\,,\,\big(1-\eta_1(x)-\eta_1(x-5)\big)\varphi(x)\Big\rangle\end{gathered} \tag{7}$$

Вычислим каждое из слагаемых, действуя по аналогии с решением задачи 1.

- Так как $x=0$ является корнем кратности 2, то первое слагаемое представим в виде

$$\begin{gathered}\big\langle f(x)\,,\,\eta_1(x)\varphi(x)\big\rangle=\left\langle f(x)\,,\,\eta_1(x)\Big(\varphi(x)-\varphi(0)-\varphi'(0)\,x\Big)\right\rangle+\\+\left\langle f(x)\,,\,\eta_1(x)\Big(\varphi(0)+\varphi'(0)\,x\Big)\right\rangle\end{gathered}$$

Обозначая через $\psi_2(x)$ функцию

$$\psi_2(x)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)-\varphi'(0)\,x}{x^2}\,, & \text{при}\quad x\neq 0\,,\\[2ex] \dfrac{\varphi^{(2)}(0)}{2}\,, & \text{при}\quad x=0\,,\end{cases}$$

получаем

$$\begin{gathered}\big\langle f(x)\,,\,\eta_1(x)\varphi(x)\big\rangle=\\=\Big\langle f(x)\,,\,x^2\,\eta_1(x)\psi_2(x)\Big\rangle+\left\langle f(x)\,,\,\eta_1(x)\Big(\varphi(0)+\varphi'(0)\,x\Big)\right\rangle=\end{gathered}$$

$$=\left\langle f(x)\,,\,x^2(x-5)\,\frac{\eta_1(x)\psi_2(x)}{x-5}\right\rangle+\varphi(0)\,\Big\langle f(x)\,,\,\eta_1(x)\Big\rangle+\varphi'(0)\,\Big\langle f(x)\,,\,x\,\eta_1(x)\Big\rangle$$

Заметим, что функция
$$\frac{\eta_1(x)\psi_2(x)}{x-5}$$
может быть отличной от нуля только на носителе $\eta_1(x)$, а именно, на отрезке $[-2,2]$. Однако на этом отрезке $(x-5)\neq 0$ и
$$\left|\frac{\eta_1(x)\psi_2(x)}{x-5}\right| \leqslant \frac{|\psi_2(x)|}{3}\ ,$$
откуда, воспользовавшись леммой 1, заключаем, что
$$\frac{\eta_1(x)\psi_2(x)}{x-5} \in S(\mathbb{R})$$
Поскольку $f(x)$ является решением уравнения (6), то выполнено равенство
$$\left\langle f(x)\,,\, x^2(x-5)\,\frac{\eta_1(x)\psi_2(x)}{x-5}\right\rangle = \left\langle x^2(x-5)\,f(x)\,,\,\frac{\eta_1(x)\psi_2(x)}{x-5}\right\rangle = 0$$
Следовательно,
$$\big\langle f(x)\,,\,\eta_1(x)\varphi(x)\big\rangle = \varphi(0)\Big\langle f(x)\,,\,\eta_1(x)\Big\rangle + \varphi'(0)\Big\langle f(x)\,,\,x\,\eta_1(x)\Big\rangle$$
Вводя константы
$$C_1 = \Big\langle f(x)\,,\,\eta_1(x)\Big\rangle,\quad C_2 = -\Big\langle f(x)\,,\,x\,\eta_1(x)\Big\rangle,$$
окончательно получаем
$$\Big\langle f(x)\,,\,\eta_1(x)\varphi(x)\Big\rangle = C_1\,\varphi(0) - C_2\,\varphi'(0) =$$
$$= C_1\Big\langle\delta(x)\,,\,\varphi(x)\Big\rangle + C_2\Big\langle\delta'(x)\,,\,\varphi(x)\Big\rangle = \Big\langle C_1\,\delta(x) + C_2\,\delta'(x)\,,\,\varphi(x)\Big\rangle$$

- Теперь преобразуем второе слагаемое в правой части формулы (7)
$$\big\langle f(x)\,,\,\eta_1(x-5)\varphi(x)\big\rangle$$
Так как $x=5$ является корнем кратности 1, то представим эту формулу в виде
$$\big\langle f(x)\,,\,\eta_1(x-5)\varphi(x)\big\rangle =$$

$$= \Big\langle f(x)\,,\, \eta_1(x-5)\Big(\varphi(x)-\varphi(5)\Big) \Big\rangle + \Big\langle f(x)\,,\, \eta_1(x-5)\varphi(5) \Big\rangle$$

Обозначая через $\psi_1(x)$ функцию

$$\psi_1(x) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(x)-\varphi(5)}{x-5}\,, & \text{при} \quad x \neq 5\,, \\ \\ \varphi'(5)\,, & \text{при} \quad x = 5\,, \end{cases}$$

получаем

$$\Big\langle f(x)\,,\, \eta_1(x-5)\varphi(x) \Big\rangle = \Big\langle f(x)\,,\, (x-5)\,\eta_1(x-5)\psi_1(x) \Big\rangle + \Big\langle f(x)\,,\, \eta_1(x-5)\varphi(5) \Big\rangle =$$

$$= \left\langle f(x)\,,\, x^2(x-5)\,\frac{\eta_1(x-5)\psi_1(x)}{x^2} \right\rangle + \varphi(5)\,\Big\langle f(x)\,,\, \eta_1(x-5) \Big\rangle$$

Поскольку на носителе $\eta_1(x-5)$ знаменатель дроби

$$\frac{\eta_1(x-5)\psi_1(x)}{x^2}$$

не обращается в нуль и

$$\left| \frac{\eta_1(x-5)\psi_1(x)}{x^2} \right| \leqslant \frac{|\psi_1(x)|}{9}\,,$$

с помощью леммы 1, получаем, что

$$\frac{\eta_1(x-5)\psi_1(x)}{x^2} \in S(\mathbb{R})$$

Тогда, так как $f(x)$ является решением уравнения (6), то выполнено равенство

$$\left\langle f(x)\,,\, x^2(x-5)\,\frac{\eta_1(x-5)\psi_1(x)}{x^2} \right\rangle = \left\langle x^2(x-5)\,f(x)\,,\, \frac{\eta_1(x-5)\psi_1(x)}{x^2} \right\rangle = 0$$

Следовательно,

$$\Big\langle f(x)\,,\, \eta_1(x-5)\varphi(x) \Big\rangle = \varphi(5)\,\Big\langle f(x)\,,\, \eta_1(x-5) \Big\rangle$$

Введя обозначение

$$C_3 = \Big\langle f(x)\,,\, \eta_1(x-5) \Big\rangle,$$

окончательно получаем

$$\Big\langle f(x)\,,\, \eta_1(x-5)\varphi(x) \Big\rangle = C_3\,\varphi(5) = C_3\,\Big\langle \delta(x-5)\,,\, \varphi(x) \Big\rangle$$

- Вычислим, наконец, третье слагаемое в правой части формулы (7). Для этого заметим, что функция $1-\eta_1(x)-\eta_1(x-5)$ равна нулю при всех $x\in[-1,1]\cup[4,6]$. Поэтому, введем функцию

$$\psi(x) = \begin{cases} \dfrac{\big(1-\eta_1(x)-\eta_1(x-5)\big)\varphi(x)}{x^2(x-5)}\,, & \text{при} \quad x\notin[-1,1]\cup[4,6]\,, \\ \\ 0\,, & \text{при} \quad x\in[-1,1]\cup[4,6]\,. \end{cases}$$

Тогда $\psi(x)\in S(\mathbb{R})$ и

$$\big(1-\eta_1(x)-\eta_1(x-5)\big)\varphi(x) = x^2(x-5)\,\psi(x)$$

Следовательно,

$$\Big\langle f(x)\,,\, \big(1-\eta_1(x)-\eta_1(x-5)\big)\varphi(x) \Big\rangle = \Big\langle f(x)\,,\, x^2(x-5)\,\psi(x) \Big\rangle =$$

$$= \Big\langle x^2(x-5)\,f(x)\,,\, \psi(x) \Big\rangle = 0$$

Таким образом, для каждой основной функции $\varphi(x)\in S(\mathbb{R})$ мы получили равенство

$$\big\langle f(x)\,,\, \varphi(x) \big\rangle = \Big\langle C_1\,\delta(x) + C_2\,\delta'(x) + C_3\,\delta(x-5)\,,\, \varphi(x) \Big\rangle$$

Значит, если обобщенная функция $f(x)$ является решением уравнения

$$x^2(x-5)\,f(x) = 0\,,$$

то найдутся такие константы C_1, C_2, C_3, что

$$f(x) = C_1\,\delta(x) + C_2\,\delta'(x) + C_3\,\delta(x-5)$$

Докажем, что верно и обратное. Проверим, что любая функция вида

$$f(x) = C_1\,\delta(x) + C_2\,\delta'(x) + C_3\,\delta(x-5)$$

удовлетворяет уравнению

$$x^2(x-5)\,f(x)=0\,.$$

Действительно, для любой основной функции $\varphi(x)\in S(\mathbb{R})$ имеем

$$\big\langle x^2(x-5)\,f(x)\,,\,\varphi(x)\big\rangle=\big\langle f(x)\,,\,x^2(x-5)\,\varphi(x)\big\rangle=$$

$$=\Big\langle C_1\,\delta(x)+C_2\,\delta'(x)+C_3\,\delta(x-5)\,,\,(x^3-5x^2)\,\varphi(x)\Big\rangle=$$

$$=C_1\Big\langle\delta(x)\,,\,(x^3-5x^2)\,\varphi(x)\Big\rangle-C_2\Big\langle\delta(x)\,,\,\big((x^3-5x^2)\,\varphi(x)\big)'\Big\rangle+$$

$$+C_3\Big\langle\delta(x-5)\,,\,(x^3-5x^2)\,\varphi(x)\Big\rangle=$$

$$=-\,C_2\Big\langle\delta(x)\,,\,(3x^2-10x)\,\varphi(x)+(x^3-5x^2)\,\varphi'(x)\Big\rangle=0$$

Ответ. $f(x)=C_1\,\delta(x)+C_2\,\delta'(x)+C_3\,\delta(x-5)$.

Задача 4 *В пространстве* $S'(\mathbb{R})$ *найти все решения уравнения*

$$(x^4-16)\,f(x)=0 \tag{8}$$

Решение. Перепишем уравнение (8) в виде

$$(x^2+4)(x-2)(x+2)\,f(x)=0$$

и обозначим

$$g(x)=(x-2)(x+2)\,f(x)$$

Тогда для функции $g(x)$ мы получим уравнение

$$(x^2+4)\,g(x)=0$$

Как мы уже знаем (см. задачу 1), единственным решением этого уравнения является функция

$$g(x)=0$$

Таким образом, решение уравнения (8) свелось к решению уравнения

$$(x-2)(x+2)\,f(x)=0$$

Поскольку многочлен

$$(x-2)(x+2)$$

имеет два корня $x = 2$ и $x = -2$, кратности которых равны 1, то, действуя аналогично решению задачи 3, получаем

$$f(x) = C_1\delta(x-2) + C_2\delta(x+2),$$

где C_1 и C_2 – произвольные константы.

Ответ. $f(x) = C_1\,\delta(x-2) + C_2\,\delta(x+2)$.

На следующем занятии мы разберем методы решения простейших линейных неоднородных уравнений в пространстве $S'(\mathbb{R}^m)$.

Спасибо за внимание.
Не болейте!