Решение простейших линейных неоднородных уравнений в пространстве $S'(\mathbb{R})$

Самарова С.С.

ФОПФ, 3 курс, УМФ

Учебное пособие для дистанционных занятий

В данном пособии мы продолжаем изучение линейных уравнений в пространстве $S'(\mathbb{R})$. Теперь мы будем решать линейные неоднородные уравнения.

Мы уже знакомы с обобщенной функцией $\mathcal{P}\dfrac{1}{x}$.

Для решения неоднородных уравнений нам потребуются обобщенные функции $\mathcal{P}\dfrac{1}{(x-x_0)^n}$, где n – натуральное число, а x_0 – действительное число.

Определение 1 *Для произвольного действительного числа x_0 функцией $\mathcal{P}\dfrac{1}{x-x_0}$ называют обобщенную функцию из пространства $S'(\mathbb{R})$, действие которой на основную функцию $\varphi(x)$ определяется формулой*

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x-x_0}\,,\,\varphi(x)\right\rangle = \text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x-x_0}\,dx$$

Определение 2 *Для любого натурального числа n и любого действительного числа x_0 обобщенная функция $\mathcal{P}\dfrac{1}{(x-x_0)^n}$ определяется по формуле*

$$\mathcal{P}\frac{1}{(x-x_0)^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\,\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\,\mathcal{P}\frac{1}{x-x_0}$$

Задача 1 (задание, задача 1.11) *В пространстве* $S'(\mathbb{R})$

а) доказать равенство

$$x^n\,\mathcal{P}\frac{1}{x^n}=1 \tag{1}$$

б) найти общее решение уравнения

$$x^n\,f(x)=1$$

Решение.

а) Доказем равенство (1) по индукции.

- База индукции.
  При $n=1$ равенство (1) имеет вид
  $$x\,\mathcal{P}\frac{1}{x}=1$$
  и было доказано ранее (см. «Пространство обобщенных функций $S'(\mathbb{R}^m)$», задача 1 (задание, задача 1.8)).

- Шаг индукции.
  Пусть равенство (1) верно для всех $k=1,2,\ldots,n-1$. Докажем, что оно будет верным и для $k=n$.
  Действительно, для любой $\varphi(x)\in S(\mathbb{R})$ справедливы равенства

$$\left\langle x^n\,\mathcal{P}\frac{1}{x^n}\,,\,\varphi(x)\right\rangle=\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x^n}\,,\,x^n\,\varphi(x)\right\rangle=$$

$$=\left\langle \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\,\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\,\mathcal{P}\frac{1}{x}\,,\,x^n\,\varphi(x)\right\rangle=$$

$$=-\frac{1}{n-1}\left\langle \frac{d}{dx}\,\mathcal{P}\frac{1}{x^{n-1}}\,,\,x^n\,\varphi(x)\right\rangle=\frac{1}{n-1}\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x^{n-1}}\,,\,\Big(x^n\,\varphi(x)\Big)'\right\rangle=$$

$$=\frac{1}{n-1}\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x^{n-1}}\,,\,n\,x^{n-1}\,\varphi(x)+x^n\varphi'(x)\right\rangle=$$

$$= \frac{1}{n-1}\left\langle x^{n-1}\,\mathcal{P}\frac{1}{x^{n-1}}\,,\; n\,\varphi(x) + x\,\varphi'(x)\right\rangle$$

По предположению индукции

$$x^{n-1}\,\mathcal{P}\frac{1}{x^{n-1}} = 1$$

Следовательно,

$$\frac{1}{n-1}\left\langle x^{n-1}\,\mathcal{P}\frac{1}{x^{n-1}}\,,\; n\,\varphi(x)+x\,\varphi'(x)\right\rangle = \frac{1}{n-1}\left\langle 1\,,\; n\,\varphi(x)+x\,\varphi'(x)\right\rangle =$$

$$= \frac{1}{n-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(n\,\varphi(x) + x\,\varphi'(x))dx =$$

$$= \frac{n}{n-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,dx + \frac{1}{n-1}\,x\,\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{n-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,dx = \big\langle 1\,,\;\varphi(x)\big\rangle$$

Таким образом, равенство

$$x^{n}\,\mathcal{P}\frac{1}{x^{n}} = 1$$

доказано.

б) Как и всегда в случае линейных уравнений, общее решение линейного неоднородного уравнения равно сумме произвольного частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения.

В нашем случае мы уже нашли в пункте а) частное решение

$$f_{\text{частн}}(x) = \mathcal{P}\frac{1}{x^{n}}$$

неоднородного уравнения

$$x^{n}\,f(x) = 1. \tag{2}$$

Остается найти общее решение однородного уравнения

$$x^n\, f(x) = 0. \tag{3}$$

Поскольку $x = 0$ – корень кратности n для многочлена

$$P(x) = x^n,$$

то, как мы видели на предыдущем занятии (см. «Решение простейших линейных однородных уравнений в пространстве $S'(\mathbb{R})$»), общее решение уравнения (3) имеет вид

$$f_{\text{одн}}(x) = C_1\, \delta(x) + C_2\, \delta'(x) + \ldots + C_n\, \delta^{(n-1)}(x),$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – произвольные константы.

Таким образом, общее решение уравнения (2) имеет вид

$$f(x) = f_{\text{частн}}(x) + f_{\text{одн}}(x) = \mathcal{P}\frac{1}{x^n} + C_1\, \delta(x) + C_2\, \delta'(x) + \ldots + C_n\, \delta^{(n-1)}(x)$$

Ответ.

б) $f(x) = \mathcal{P}\dfrac{1}{x^n} + C_1\, \delta(x) + C_2\, \delta'(x) + \ldots + C_n\, \delta^{(n-1)}(x)$,

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – любые комплексные числа.

Задача 2 *В пространстве* $S'(\mathbb{R})$ *найти общее решение уравнения*

$$(x^3 + 1)\, f(x) = 3 \tag{4}$$

Решение.

Сначала найдем частное решение неоднородного уравнения (4). С этой целью разложим дробь

$$\frac{3}{x^3 + 1}$$

на простейшие дроби:

$$\frac{3}{x^3 + 1} = \frac{3}{(x + 1)(x^2 - x + 1)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 - x + 1}$$

Число A можно найти сразу

$$A = \left.\frac{3}{x^2 - x + 1}\right|_{x=-1} = 1$$

Далее получаем

$$\frac{Bx+C}{x^2-x+1} = \frac{3}{(x+1)(x^2-x+1)} - \frac{1}{x+1} = \frac{3-x^2+x-1}{(x+1)(x^2-x+1)} =$$

$$= \frac{-(x^2-x-2)}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{-(x-2)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} = -\frac{x-2}{x^2-x+1}$$

Таким образом,

$$\frac{3}{x^3+1} = \frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-x+1}$$

Исходя из полученного разложения на простейшие дроби выпишем частное решение неоднородного уравнения (4) по следующему правилу:

- каждой дроби, знаменатель которой может обращаться в нуль при действительных значениях x, т.е. дроби вида

  $$\frac{A}{(x-x_0)^n},$$

  где x_0 – действительное число, будет соответствать слагаемое

  $$A \cdot \mathcal{P}\frac{1}{(x-x_0)^n},$$

- каждой дроби, знаменатель которой не обращается в нуль при действительных значениях x, будет соответствовать регулярный функционал, заданный этой дробью.

В нашем случае простейшей дроби

$$\frac{1}{x+1}$$

соответствует обобщенная функция

$$\mathcal{P}\frac{1}{x+1}$$

Теперь покажем, что простейшей дроби

$$\frac{x-2}{x^2-x+1}$$

соответствует регулярный функционал на пространстве $S(\mathbb{R})$.

Действительно, поскольку

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geqslant \frac{3}{4}$$

то для всех $x \in (-\infty, +\infty)$ выполнено неравенство

$$\left|\frac{x-2}{x^2-x+1}\right| \leqslant \frac{4}{3}\,|x-2| < 2|x| + 3$$

Следовательно,

$$\frac{x-2}{x^2-x+1}$$

является функцией медленного роста и задает регулярный функционал на пространстве $S'(\mathbb{R})$.

Мы получили обобщенную функцию

$$\mathcal{P}\frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-x+1}$$

Докажем, что она является решением уравнения (4).

Действительно,

$$(x^3+1)\left(\mathcal{P}\frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-x+1}\right) = (x^2-x+1)(x+1)\,\mathcal{P}\frac{1}{x+1} - (x+1)(x-2)$$

Поскольку для любой $\varphi \in S(\mathbb{R})$ справедливы равенства

$$\left\langle (x{+}1)\,\mathcal{P}\frac{1}{x+1}\,,\,\varphi(x)\right\rangle = \left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x+1}\,,\,(x{+}1)\,\varphi(x)\right\rangle = \text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x+1)\,\varphi(x)}{x+1}\,dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,dx = \big\langle 1\,,\,\varphi(x)\big\rangle,$$

то

$$(x+1)\,\mathcal{P}\frac{1}{x+1} = 1$$

Поэтому

$$(x^2-x+1)(x+1)\,\mathcal{P}\frac{1}{x+1} - (x+1)(x-2) = x^2 - x + 1 - x^2 + x + 2 = 3$$

Итак, частное решение уравнения (4) найдено:

$$f_{\text{частн}}(x) = \mathcal{P}\frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-x+1}$$

Остается найти общее решение однородного уравнения

$$(x^3+1)\, f(x) = 0 \tag{5}$$

Поскольку многочлен

$$P(x) = x^3+1$$

имеет единственный корень $x = -1$ кратности 1, то общее решение однородного уравнения (5) имеет вид

$$f_{\text{одн}}(x) = C\,\delta(x+1),$$

где C – произвольная константа.

Таким образом, общее решение уравнения (4) имеет вид

$$f(x) = f_{\text{частн}}(x) + f_{\text{одн}}(x) = \mathcal{P}\frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-x+1} + C\,\delta(x+1)$$

Ответ. $\quad f(x) = \mathcal{P}\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{x-2}{x^2-x+1} + C\,\delta(x+1),$

где C – любое комплексное число.

Задача 3 *В пространстве* $S'(\mathbb{R})$ *найти все решения уравнения*

$$(x^3+2i\,x^2)\, f(x) = 4 \tag{6}$$

Решение. Сначала найдем частное решение неоднородного уравнения (6). С этой целью разложим дробь

$$\frac{4}{x^3+2i\,x^2}$$

на простейшие дроби в области комплексных чисел:

$$\frac{4}{x^3+2i\,x^2} = \frac{4}{x^2\,(x+2i)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+2i}$$

Числа A и C можно найти сразу

$$A = \left.\frac{4}{x+2i}\right|_{x=0} = -2i\,; \qquad C = \left.\frac{4}{x^2}\right|_{x=-2i} = -1\,.$$

Далее получаем

$$\frac{B}{x} = \frac{4}{x^2\,(x+2i)} + \frac{2i}{x^2} + \frac{1}{x+2i} = \frac{4+2i\,x-4+x^2}{x^2\,(x+2i)} = \frac{x\,(x+2i)}{x^2\,(x+2i)} = \frac{1}{x}$$

Таким образом,

$$\frac{4}{x^3+2i\,x^2} = -\frac{2i}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2i}$$

Исходя из полученного разложения на простейшие дроби выпишем частное решение неоднородного уравнения (6)

$$f_{\text{частн}}(x) = -2i\,\mathcal{P}\frac{1}{x^2} + \mathcal{P}\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2i}$$

Заметим, что дробь

$$\frac{1}{x+2i}$$

действительно порождает регулярный функционал в силу неравенства

$$\left|\frac{1}{x+2i}\right| = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} \leqslant \frac{1}{2}\,, \qquad \forall x \in (-\infty, +\infty)\,.$$

Теперь найдем общее решение однородного уравнения

$$x^2\,(x+2i)\,f(x) = 0 \tag{7}$$

Поскольку у многочлена

$$P(x) = x^2\,(x+2i)$$

имеется единственный вещественный корень $x = 0$, кратность которого равна 2, то общее решение однородного уравнения (7) имеет вид

$$f_{\text{одн}}(x) = C_1\,\delta(x) + C_2\,\delta'(x),$$

где C_1, C_2 – произвольные комплексные числа.

Таким образом, общее решение уравнения (6) имеет вид

$$f(x) = -2i\,\mathcal{P}\frac{1}{x^2} + \mathcal{P}\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2i} + C_1\,\delta(x) + C_2\,\delta'(x)$$

Ответ. $$f(x) = -2i\,\mathcal{P}\frac{1}{x^2} + \mathcal{P}\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2i} + C_1\,\delta(x) + C_2\,\delta'(x),$$

где $C_1,\, C_2$ – произвольные комплексные числа.

В заключение решим неоднородное уравнение с более сложной правой частью. Для этого нам потребуется еще одно определение.

Определение 3 *Функцией* $\mathcal{P}\dfrac{1}{|x|}$ *называют обобщенную функцию, действие которой на основную функцию* $\varphi(x)$ *определяется формулой*

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{|x|}\,,\,\varphi(x) \right\rangle = \int\limits_{|x|<1} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{|x|}\,dx + \int\limits_{|x|\geqslant 1} \frac{\varphi(x)}{|x|}\,dx \tag{8}$$

Задача 4 (задание, задача 1.13)

а) *Доказать, что функционал* $\mathcal{P}\dfrac{1}{|x|}$ *принадлежит пространству* $S'(\mathbb{R})$*;*

б) *доказать, что справедливо равенство*

$$x\,\mathcal{P}\frac{1}{|x|} = \operatorname{sign}(x)$$

в) *найти в пространстве* $S'(\mathbb{R})$ *общее решение уравнения*

$$x\,f(x) = \operatorname{sign}(x)$$

Решение.
Докажем сначала пункт а).

1. <u>Корректность определения функционала</u> $\mathcal{P}\dfrac{1}{|x|}$.

   Докажем, что для любой $\varphi \in S(\mathbb{R})$ интегралы из правой части формулы (8) существуют.

- Поскольку для любой $\varphi \in S(\mathbb{R})$ существует

$$\varphi'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}$$

то существуют и интегралы

$$\int\limits_{-1}^{0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}\, dx \qquad \text{и} \qquad \int\limits_{0}^{1} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}\, dx$$

- Так как $\varphi \in S(\mathbb{R})$, то

$$(1 + x^2)\, \varphi(x) \to 0 \quad \text{при} \quad x \to \pm\infty$$

Поэтому существует такая константа $C > 0$, что

$$|(1 + x^2)\, \varphi(x)| \leqslant C, \qquad \forall x \in (-\infty, +\infty).$$

Следовательно, для всех $|x| \geqslant 1$ выполнено неравенство

$$\left| \frac{\varphi(x)}{|x|} \right| \leqslant |\varphi(x)| \leqslant \frac{C}{1 + x^2}$$

Поскольку

$$\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{C}{1 + x^2}\, dx < \infty \qquad \text{и} \qquad \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{C}{1 + x^2}\, dx < \infty\,,$$

то по теореме сравнения получаем, что

$$\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{\varphi(x)}{|x|}\, dx \qquad \text{и} \qquad \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{|x|}\, dx$$

существуют.

Корректность определения функционала $\mathcal{P}\dfrac{1}{|x|}$ доказана.

2. <u>Линейность функционала</u> $\mathcal{P}\dfrac{1}{|x|}$ следует непосредственно из линейности интеграла Лебега.

3. Непрерывность функционала $\mathcal{P}\dfrac{1}{|x|}$.

В силу линейности функционала $\mathcal{P}\dfrac{1}{|x|}$ его непрерывность достаточно доказать только в нуле.

Для доказательства непрерывности функционала в нуле рассмотрим произвольную последовательность основных функций, сходящуюся к нулю

$$\varphi_n(x) \xrightarrow{S(\mathbb{R})} 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty\,.$$

Поскольку

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{|x|}\,,\, \varphi_n \right\rangle = \int\limits_{|x|<1} \frac{\varphi_n(x) - \varphi_n(0)}{|x|}\,dx + \int\limits_{|x|\geqslant 1} \frac{\varphi_n(x)}{|x|}\,dx\,,$$

то докажем, что каждый из этих интегралов стремится к нулю при $n \to \infty$.

- Представим первый интеграл в виде

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi_n(x) - \varphi_n(0)}{|x|}\,dx = -\int\limits_{-1}^{0} \frac{\varphi_n(x) - \varphi_n(0)}{x}\,dx + \int\limits_{0}^{1} \frac{\varphi_n(x) - \varphi_n(0)}{x}\,dx$$

  По теореме Лагранжа о среднем существует точка $\xi_n \in (0, x)$ такая, что

$$\frac{\varphi_n(x) - \varphi_n(0)}{x} = \varphi_n'(\xi_n)$$

  Кроме того, из сходимости

$$\varphi_n(x) \xrightarrow{S(\mathbb{R})} 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty\,,$$

  следует равномерная сходимость

$$\varphi_n'(x) \underset{(-\infty,+\infty)}{\rightrightarrows} 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

  Следовательно, найдется такая константа $M > 0$, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$|\varphi_n'(\xi_n)| \leqslant M$$

причем

$$\int\limits_0^1 M\,dx = M < \infty$$

Поэтому по теореме Лебега об ограниченной сходимости получаем

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 \frac{\varphi_n(x) - \varphi_n(0)}{x}\,dx = 0\,.$$

В точности такое же рассуждение доказывает, что и

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{-1}^0 \frac{\varphi_n(x) - \varphi_n(0)}{x}\,dx = 0\,.$$

- Из определения сходимости в пространстве $S(\mathbb{R})$ следует равномерная сходимость к нулю последовательности функций

$$(1+x^2)\,\varphi_n(x) \underset{(-\infty,+\infty)}{\rightrightarrows} 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty$$

Поэтому существует такая константа $C>0$, что для всех $n\in\mathbb{N}$ и всех $x\in\big\{(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)\big\}$ выполнено неравенство

$$\left|\frac{\varphi_n(x)}{|x|}\right| \leqslant |\varphi_n(x)| \leqslant \frac{C}{1+x^2}$$

Поскольку

$$\int\limits_{|x|\geqslant 1} \frac{C}{1+x^2}\,dx < \infty,$$

то по теореме Лебега об ограниченной сходимости

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{|x|\geqslant 1} \frac{\varphi_n(x)}{|x|}\,dx = 0\,.$$

Непрерывность функционала $\mathcal{P}\dfrac{1}{|x|}$ доказана.

Перейдем к доказательству пункта б).

Поскольку функция x является функцией медленного роста, то для $\forall \varphi \in S(\mathbb{R})$ выполнены равенства

$$\left\langle x\,\mathcal{P}\frac{1}{|x|}\;,\;\varphi(x)\right\rangle = \left\langle \mathcal{P}\frac{1}{|x|}\;,\;x\,\varphi(x)\right\rangle =$$

$$= \int\limits_{|x|<1} \frac{x\,\varphi(x) - 0\cdot\varphi(0)}{|x|}\,dx + \int\limits_{|x|\geqslant 1} \frac{x\,\varphi(x)}{|x|}\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sign}(x)\,\varphi(x)\,dx =$$

$$= \Big\langle \operatorname{sign}(x)\,,\,\varphi(x)\Big\rangle\;,$$

что и требовалось доказать.

Теперь найдем общее решение неоднородного уравнения (пункт в))

$$x\;f(x) = \operatorname{sign}(x) \tag{9}$$

В пункте б) мы установили, что частным решением уравнения (9) является функция

$$f_{\text{частн}}(x) = \mathcal{P}\frac{1}{|x|}$$

Как мы уже знаем, общее решение однородного уравнения

$$x\;f(x) = 0$$

имеет вид

$$f_{\text{одн}}(x) = C\,\delta(x),$$

где C – произвольное комплексное число.

Поэтому общее решение уравнения (9) имеет вид

$$f(x) = \mathcal{P}\frac{1}{|x|} + C\,\delta(x)$$

Решение задачи 4 закончено.

На этом мы завершаем изучение способов решения линейных уравнений в пространстве $S'(\mathbb{R})$. В дальнейшем мы будем применять полученные знания при поиске функций Грина линейных дифференциальных операторов в пространстве $S'(\mathbb{R}^m)$.

Нашей следующей темой будет преобразование Фурье обобщенных функций в пространстве $S'(\mathbb{R}^m)$.

Спасибо за внимание.
Не болейте!