Линейные замены в аргументе обобщенной функции. Примеры решения задач

Самарова С.С.

ФОПФ, 3 курс, УМФ

Учебное пособие для дистанционных занятий

В ряде задач требуется совершить линейную замену переменных в аргументе обобщенной функции, например, определить обобщенную функцию $\delta(x-y+z)$ в пространстве $S(\mathbb{R}^3)$. Решение типовых задач на эту тему и является целью настоящего пособия.

Начнём с формулировки определения, введенного на лекциях.

Определение 1 *Пусть* $f \in S'(\mathbb{R}^m)$, $x \in \mathbb{R}^n$, *матрица* A *размера* $m \times n$ *имеет ранг* m, *столбец* $b \in \mathbb{R}^m$. *Тогда обобщенной функцией*

$$f(Ax+b) \in S'(\mathbb{R}^n)$$

называют отображение $S(\mathbb{R}^n) \mapsto \mathbb{R}$, *заданное для* $\forall \varphi(x) \in S(\mathbb{R}^n)$ *формулой*

$$\Big\langle f(Ax+b)\,,\,\varphi(x)\Big\rangle = \Big\langle F^{-1}\big[f\big](y)\,,\,e^{i(b,y)}F\big[\varphi(x)\big]\big(A^T y\big)\Big\rangle$$

Докажем корректность этого определения.

Задача 1 (задание 1.19)

1. *Доказать, что отображение* $S(\mathbb{R}^n) \mapsto \mathbb{R}$ *из определения 1 действительно является линейным непрерывным функционалом на* $S(\mathbb{R}^n)$.

2. *Доказать, что в случае $m = n$ определение 1 принимает вид*

$$\Big\langle f\big(Ax+b\big)\,,\,\varphi(x)\Big\rangle = \Big\langle f(y)\,,\,\varphi\Big(A^{-1}(y-b)\Big)\,\frac{1}{|\det A|}\Big\rangle \tag{1}$$

Решение.

1. Покажем, что определение 1 является корректным.

- **Линейность.**

  Для любых основных функций $\varphi_1, \varphi_2 \in S(\mathbb{R}^n)$ и любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ в силу линейности прямого и обратного преобразований Фурье получаем

$$\Big\langle f\big(Ax+b\big)\,,\,\alpha\,\varphi_1(x) + \beta\,\varphi_2(x)\Big\rangle =$$

$$= \Big\langle F^{-1}\big[f\big](y)\,,\,e^{i(b,y)}F\big[\alpha\,\varphi_1(x) + \beta\,\varphi_2(x)\big](A^T y)\Big\rangle =$$

$$= \Big\langle F^{-1}\big[f\big](y)\,,\,\alpha\,e^{i(b,y)}F\big[\varphi_1(x)\big]\big(A^T y\big) + \beta\,e^{i(b,y)}F\big[\varphi_2(x)\big]\big(A^T y\big)\Big\rangle =$$

$$= \alpha\,\Big\langle F^{-1}\big[f\big](y)\,,\,e^{i(b,y)}F\big[\varphi_1(x)\big]\big(A^T y\big)\Big\rangle +$$

$$+\beta\,\Big\langle F^{-1}\big[f\big](y)\,,\,e^{i(b,y)}F\big[\varphi_2(x)\big]\big(A^T y\big)\Big\rangle =$$

$$= \alpha\Big\langle f\big(Ax+b\big)\,,\,\varphi_1(x)\Big\rangle + \beta\Big\langle f\big(Ax+b\big)\,,\,\varphi_2(x)\Big\rangle$$

  Линейность доказана.

- **Непрерывность.**

  Рассмотрим произвольную последовательность основных функций

$$\varphi_k \xrightarrow{S(\mathbb{R}^n)} \varphi \quad \text{при} \quad k \to \infty\,,$$

  и докажем, что

$$\Big\langle f\big(Ax+b\big)\,,\,\varphi_k(x)\Big\rangle \to \Big\langle f\big(Ax+b\big)\,,\,\varphi(x)\Big\rangle \quad \text{при} \quad k \to \infty\,.$$

  В силу линейности функционала $f\big(Ax+b\big)$, которую мы уже доказали, достаточно рассмотреть случай $\varphi = 0$.

В этом случае, воспользовавшись утверждением 1 из нашего пособия «Преобразование Фурье обобщенных функций из $S'(\mathbb{R}^m)$», для любой последовательности основных функций, такой, что

$$\varphi_k \xrightarrow{S(\mathbb{R}^n)} 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty\,,$$

получаем

$$e^{\,i(b,y)} F\big[\varphi_k(x)\big]\big(A^T y\big) \xrightarrow{S(\mathbb{R}^m)} 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty\,.$$

Применяя утверждение 3 из пособия «Преобразование Фурье обобщенных функций из $S'(\mathbb{R}^m)$», находим предел

$$\Big\langle f\big(Ax+b\big)\,,\,\varphi_k(x)\Big\rangle = \Big\langle F^{-1}\big[f\big](y)\,,\,e^{\,i(b,y)} F\big[\varphi_k(x)\big]\big(A^T y\big)\Big\rangle =$$

$$= \Big\langle f\,,\,F^{-1}\Big[e^{\,i(b,y)} F\big[\varphi_k(x)\big]\big(A^T y\big)\Big]\Big\rangle \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty$$

Непрерывность доказана.

Доказательство утверждения из пункта 1 задачи завершено.

2. Перейдём к случаю, когда $m = n$. В этом случае для любой основной функции $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ выполнено равенство

$$e^{\,i(b,y)} F\big[\varphi(x)\big]\big(A^T y\big) = e^{\,i(b,y)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{\,i(x,A^T y)} \varphi(x)\,dx$$

Записывая скалярное произведение в матричном виде, получаем

$$e^{\,i(b,y)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{\,i(x,A^T y)} \varphi(x)\,dx = e^{\,i\,b^T y} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{\,i\,x^T A^T y} \varphi(x)\,dx =$$

$$= e^{\,i\,b^T y} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{\,i\,(Ax)^T y} \varphi(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{\,i\,\big((Ax)^T y + b^T y\big)} \varphi(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{\,i\,(Ax+b)^T y} \varphi(x)\,dx$$

В результате замены переменной

$$z = Ax + b \qquad \Leftrightarrow \qquad x = A^{-1}(z-b), \qquad |J(z)| = \Big|\det\big(A^{-1}\big)\Big| = \frac{1}{|\det A|}$$

последний интеграл преобразуется к виду

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(Ax+b)^T y}\varphi(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{iz^T y}\,\varphi\left(A^{-1}(z-b)\right)\frac{1}{|\det A|}\,dz =$$

$$= F\Big[\varphi\big(A^{-1}(z-b)\big)\Big](y)\frac{1}{|\det A|}$$

Следовательно,

$$\Big\langle F^{-1}\big[f\big](y)\,,\, e^{i(b,y)}F\big[\varphi(x)\big]\big(A^T y\big)\Big\rangle =$$

$$= \left\langle F^{-1}\big[f\big](y)\,,\, F\Big[\varphi\big(A^{-1}(z-b)\big)\Big](y)\,\frac{1}{|\det A|}\right\rangle =$$

$$= \left\langle f(z)\,,\, F^{-1}\left[F\Big[\varphi\big(A^{-1}(z-b)\big)\Big](z)\,\frac{1}{|\det A|}\right]\right\rangle =$$

$$= \left\langle f(z)\,,\, \varphi\big(A^{-1}(z-b)\big)\,\frac{1}{|\det A|}\right\rangle$$

Доказательство утверждения из пункта 2, а вместе с ним и решение задачи 1 завершено.

Используя результаты задачи 1, докажем формулу сдвига для преобразования Фурье обобщенных функций.

Задача 2 (задание 1.16 а)) *Для обобщенной функции* $f \in S'(\mathbb{R}^m)$ *и вектора* $x_0 \in \mathbb{R}^m$ *доказать равенство*

$$F\big[f(x-x_0)\big](y) = e^{i(y,x_0)}F\big[f(x)\big](y)$$

Доказательство. По определению преобразования Фурье обобщенной функции для любой основной функции $\varphi(y) \in S(\mathbb{R}^m)$ справедливо равенство

$$\Big\langle F\big[f(x-x_0)\big](y)\,,\,\varphi(y)\Big\rangle = \Big\langle f(x-x_0)\,,\, F\big[\varphi(y)\big](x)\Big\rangle$$

Для замены $z = x - x_0$ по формуле (1), где

$$A = E, \quad A^{-1} = E, \quad b = -x_0, \quad |\det A| = 1,$$

получим

$$\Big\langle f(x-x_0)\,,\, F\big[\varphi(y)\big](x)\Big\rangle = \Big\langle f(z)\,,\, F\big[\varphi(y)\big](z+x_0)\Big\rangle$$

Теперь применим формулу сдвига для преобразования Фурье абсолютно интегрируемых функций

$$\Big\langle f(z)\,,\, F\big[\varphi(y)\big](z+x_0)\Big\rangle = \Big\langle f(z), F\big[e^{\,i(y,x_0)}\varphi(y)\big](z)\Big\rangle$$

Снова воспользуемся определением преобразования Фурье обобщенных функций

$$\Big\langle f(z)\,,\, F\big[e^{\,i(y,x_0)}\varphi(y)\big](z)\Big\rangle = \Big\langle F\big[f(z)\big](y)\,,\, e^{\,i(y,x_0)}\varphi(y)\Big\rangle$$

И, наконец, по определению операции умножения обобщенной функции на бесконечно дифференцируемую функцию медленного роста получим

$$\Big\langle F\big[f(z)\big](y)\,,\, e^{\,i(y,x_0)}\varphi(y)\Big\rangle = \Big\langle e^{\,i(y,x_0)}F\big[f(z)\big](y)\,,\, \varphi(y)\Big\rangle$$

Формула сдвига для преобразования Фурье обобщенных функций доказана.

Прежде, чем приступить к применениям определения 1, докажем следующее полезное и интуитивно ясное утверждение.

Утверждение 1 *Пусть* $\varphi(x)\in S(\mathbb{R}^n)$, $x\in\mathbb{R}^n$, A *– невырожденная матрица размера* $n\times n$, *столбец* $b\in\mathbb{R}^n$. *Тогда функция* $\varphi(Ax+b)$ *является абсолютно интегрируемой в* $\mathbb{R}^n$.

Доказательство.

Поскольку $\varphi(x)\in S(\mathbb{R}^n)$, то существует такое число $M>0$, что выполнено неравенство

$$|\,\varphi(x_1,x_2,\dots x_n)|\leqslant\frac{M}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)\dots(1+x_n^2)}$$

из которого вытекает, что $\varphi(x_1,x_2,\dots x_n)$ является абсолютно интегрируемой в $\mathbb{R}^n$ функцией.

Если в интеграле

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\varphi(Ax+b)|\, dx$$

совершить замену переменной

$$z = Ax + b,$$

$$|J(z)| = \Big|\det\left(A^{-1}\right)\Big| = \frac{1}{|\det A|},$$

то

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \big|\varphi(Ax+b)\big|\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\varphi(z)|\ \frac{1}{|\det A|}\, dz < \infty$$

Утверждение 1 доказано.

Задача 3 (задание 1.20) *Для обобщенной функции* $\delta(x) \in S'(\mathbb{R})$ *и* $\forall \varphi(x_1, x_2) \in S(\mathbb{R}^2)$ *найти по определению 1 значение функционала*

$$\big\langle \delta(x_1 - x_2)\,,\, \varphi(x_1, x_2) \big\rangle$$

Решение. В рассматриваемом случае

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = 0, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Применяя определение 1, для любой основной функции $\varphi(x_1, x_2) \in S(\mathbb{R}^2)$ получаем

$$\begin{gathered} \big\langle \delta(x_1 - x_2), \varphi(x_1, x_2) \big\rangle = \Big\langle F^{-1}\big[\delta(x)\big](y)\,,\, F\big[\varphi(x_1, x_2)\big]\left(A^T y\right) \Big\rangle = \\ = \Big\langle \frac{1}{2\pi}\,,\, F\big[\varphi(x_1, x_2)\big](y, -y) \Big\rangle = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{i(yx_1 - yx_2)} \varphi(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 \end{gathered} \tag{2}$$

Поскольку функция

$$e^{i(yx_1 - yx_2)}\varphi(x_1, x_2)$$

не является абсолютно интегрируемой по переменной y, то просто изменить порядок интегрирования в формуле (2) нельзя.

Воспользуемся в таком случае тем, что повторный интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{i(yx_1 - yx_2)}\varphi(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2$$

сходится, и запишем формулу (2) в виде

$$\Big\langle \delta(x_1 - x_2), \varphi(x_1, x_2)\Big\rangle = \frac{1}{2\pi} \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{-R}^{R} dy \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{i(yx_1 - yx_2)}\varphi(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 \tag{3}$$

Теперь к интегралу, стоящему под знаком предела, в формуле (3) можно применить теорему Фубини

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{-R}^{R} dy \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{i(yx_1 - yx_2)}\varphi(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^2} dx_1 dx_2\ \varphi(x_1, x_2) \int\limits_{-R}^{R} e^{iy(x_1 - x_2)} dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \varphi(x_1, x_2)\ \frac{e^{iy(x_1 - x_2)}}{i(x_1 - x_2)}\Bigg|_{-R}^{R} dx_1 dx_2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \varphi(x_1, x_2)\, \frac{e^{iR(x_1 - x_2)} - e^{-iR(x_1 - x_2)}}{i(x_1 - x_2)}\, dx_1 dx_2 =$$

$$= \frac{1}{\pi} \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \varphi(x_1, x_2)\, \frac{\sin(R(x_1 - x_2))}{x_1 - x_2}\, dx_1 dx_2 \tag{4}$$

В результате замены переменных в интеграле (4)

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2, \\ y_2 = x_2, \end{cases} \qquad |\,J| = 1$$

формула (3) приобретает вид

$$\Big\langle \delta(x_1 - x_2)\,,\, \varphi(x_1, x_2) \Big\rangle = \frac{1}{\pi}\ \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \varphi(y_1 + y_2, y_2)\, \frac{\sin\big(Ry_1\big)}{y_1}\, dy_1 dy_2 \qquad (5)$$

Поскольку функция $\varphi(x_1, x_2) \in S(\mathbb{R}^2)$, то из утверждения 1 следует, что функция $\varphi(y_1 + y_2, y_2)$ является абсолютно интегрируемой. Поэтому в силу оценки

$$\left| \varphi(y_1 + y_2, y_2)\, \frac{\sin\big(Ry_1\big)}{y_1} \right| \leqslant R\, \big|\varphi(y_1 + y_2, y_2)\big|$$

к интегралу из формулы (5) можно применить теорему Фубини. Тогда

$$\Big\langle \delta(x_1 - x_2)\,,\, \varphi(x_1, x_2) \Big\rangle = \frac{1}{\pi}\ \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\big(Ry_1\big)}{y_1} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y_1 + y_2, y_2)\, dy_2 \right) dy_1 =$$

$$= \frac{1}{\pi}\ \lim_{R\to+\infty} \left\langle \frac{\sin\big(Ry_1\big)}{y_1}\,,\, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y_1 + y_2, y_2)\, dy_2 \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{\pi}\ \left\langle \lim_{R\to+\infty} \frac{\sin\big(Ry_1\big)}{y_1}\,,\, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y_1 + y_2, y_2)\, dy_2 \right\rangle$$

Однако в пространстве обобщенных функций $S'(\mathbb{R})$

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{\sin\big(Rx\big)}{x} = \pi\delta(x)$$

(см. пособие «Пространство обобщенных функций $S'(\mathbb{R}^m)$», результат задачи 3), поэтому

$$\left\langle \delta(x_1 - x_2)\,,\, \varphi(x_1, x_2) \right\rangle = \left\langle \delta(y_1)\,,\, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y_1 + y_2, y_2)\, dy_2 \right\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y_2, y_2)\, dy_2$$

Ответ. $\quad \left\langle \delta(x_1 - x_2)\,,\, \varphi(x_1, x_2) \right\rangle = \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t, t)\, dt$

В общем случае вычисление $\delta(a^T x + b)$, где $a, x \in \mathbb{R}^m$, а $b \in \mathbb{R}$ проводится аналогичным образом. Сделайте это самостоятельно.

Решим еще одну, совсем не очевидную, задачу.

Задача 4 *Выясните, справедливы ли равенства*

1. $\delta(2x) = \delta(x)$ *в пространстве* $S'(\mathbb{R})$;
2. $\delta(2x_1 - 6x_2 + 1) = \delta\left(x_1 - 3x_2 + \dfrac{1}{2}\right)$ *в пространстве* $S'(\mathbb{R}^2)$.

Решение. Для решения задачи воспользуемся формулой (1), доказанной в задаче 1.

1. В результате замены переменной в аргументе обобщенной функции $\delta(x)$, заданной формулой
$$y = 2x \quad (A = 2; \quad \det A = 2),$$
для каждой основной функции $\varphi \in S(\mathbb{R})$ получим
$$\left\langle \delta(2x)\,,\, \varphi(x) \right\rangle = \left\langle \delta(y)\,,\, \varphi\left(\frac{y}{2}\right) \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{2}\, \varphi(0) = \left\langle \frac{1}{2}\, \delta(x)\,,\, \varphi(x) \right\rangle$$
Таким образом,
$$\delta(2x) = \frac{1}{2}\, \delta(x)$$
и равенство в пункте 1 оказалось неверным.
2. Будем считать, что функция $\delta(2x_1 - 6x_2 + 1)$ получена в результате замены переменной
$$y = x_1 - 3x_2 + \frac{1}{2}$$

в аргументе обобщенной функции $\delta(2x)$.

Но, как мы видели в пункте 1,

$$\delta(2x) = \frac{1}{2}\,\delta(x)$$

Поэтому

$$\delta(2x_1 - 6x_2 + 1) = \delta\left(2\left(x_1 - 3x_2 + \frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\,\delta\left(x_1 - 3x_2 + \frac{1}{2}\right)$$

и равенство пункта 2 также является неверным.

Разберем теперь примеры вычисления преобразований Фурье от обобщенных функций вида $f(a^T x + b)$.

Задача 5 (задание 1.21(a)) *В пространстве $S'(\mathbb{R}^2)$ найти преобразование Фурье функции*

$$f(x_1, x_2) = \delta(x_1 + x_2)$$

Решение. Приведем два способа решения этой задачи.

1 способ.

Для любой $\varphi \in S(\mathbb{R}^2)$ по определению преобразования Фурье обобщенной функции получаем

$$\Big\langle F\big[\delta(x_1 + x_2)\big](y_1, y_2)\,,\ \varphi(y_1, y_2)\Big\rangle = \Big\langle \delta(x_1 + x_2)\,,\ F\big[\varphi(y_1, y_2)\big](x_1, x_2)\Big\rangle \tag{6}$$

Теперь воспользуемся определением 1, в котором положим

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}, \quad b = 0, \quad A^T = \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}.$$

В результате формула (6) преобразуется к виду

$$\Big\langle F\big[\delta(x_1 + x_2)\big](y_1, y_2)\,,\ \varphi(y_1, y_2)\Big\rangle =$$

$$= \Big\langle F^{-1}\big[\delta(x)\big](z)\,,\ F\Big[F\big[\varphi(y_1, y_2)\big](x_1, x_2)\Big](z, z)\Big\rangle =$$

$$= \left\langle \frac{1}{2\pi}\,,\,(2\pi)^2 F^{-1}\Big[F\big[\varphi(y_1,y_2)\big](x_1,x_2)\Big](-z,-z)\right\rangle = \big\langle 2\pi\,,\,\varphi(-z,-z)\big\rangle =$$

$$= 2\pi\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(-z,-z)\,dz = 2\pi\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t,t)\,dt = \big\langle 2\pi\,\delta(y_1-y_2)\,,\,\varphi(y_1,y_2)\big\rangle$$

В последнем равенстве используется результат задачи 3.

Таким образом,

$$F\big[\delta(x_1+x_2)\big](y_1,y_2) = 2\pi\delta(y_1-y_2)\,.$$

Ответ. $\qquad F\big[\delta(x_1+x_2)\big](y_1,y_2) = 2\pi\delta(y_1-y_2)$

2 способ.

Обозначим через $F_{x_i}\big[f(x_1,x_2)\big]$ преобразование Фурье обобщенной функции $f(x_1,x_2)\in S'(\mathbb{R}^2)$, взятое по переменной $x_i\,(i=1,2)$.

Докажем сначала следующее полезное утверждение, связанное с преобразованиями Фурье обобщенных функций.

Утверждение 2 *Пусть* $f\in S'(\mathbb{R}^2)$. *Тогда*

$$F\big[f(x_1,x_2)\big](y_1,y_2) = F_{x_2}\Big[F_{x_1}\big[f(x_1,x_2)\big](y_1,x_2)\Big](y_1,y_2) =$$

$$= F_{x_1}\Big[F_{x_2}\big[f(x_1,x_2)\big](x_1,y_2)\Big](y_1,y_2)$$

Доказательство.

Для любой $\varphi\in S(\mathbb{R}^2)$ по определению преобразования Фурье обобщенной функции имеем

$$\Big\langle F\big[f(x_1,x_2)\big](y_1,y_2)\,,\,\varphi(y_1,y_2)\Big\rangle = \Big\langle f(x_1,x_2)\,,\,F\big[\varphi(y_1,y_2)\big](x_1,x_2)\Big\rangle$$

Поскольку основная функция $\varphi(y_1,y_2)$ абсолютно интегрируема в $\mathbb{R}^2$, то, применяя к ее преобразованию Фурье теорему Фубини, получаем

$$F\big[\varphi(y_1,y_2)\big](x_1,x_2) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{\,i(x_1y_1+x_2y_2)}\,\varphi(y_1,y_2)\,dy_1dy_2 =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ix_1 y_1} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ix_2 y_2}\, \varphi(y_1, y_2)\, dy_2 \right) dy_1 = F_{y_1}\Big[F_{y_2}\big[\varphi(y_1, y_2)\big](y_1, x_2)\Big](x_1, x_2)$$

Значит,

$$\Big\langle f(x_1, x_2)\,,\; F\big[\varphi(y_1, y_2)\big](x_1, x_2) \Big\rangle =$$

$$= \left\langle f(x_1, x_2)\,,\; F_{y_1}\Big[F_{y_2}\big[\varphi(y_1, y_2)\big](y_1, x_2)\Big](x_1, x_2) \right\rangle =$$

$$= \Big\langle F_{x_1}\big[f(x_1, x_2)\big](y_1, x_2)\,,\; F_{y_2}\big[\varphi(y_1, y_2)\big](y_1, x_2) \Big\rangle =$$

$$= \left\langle F_{x_2}\Big[F_{x_1}\big[f(x_1, x_2)\big](y_1, x_2)\Big](y_1, y_2)\,,\; \varphi(y_1, y_2) \right\rangle$$

Первое равенство в утверждении 4 доказано. Точно также получается и второе равенство.

Приведем второй способ решения задачи 5.

$$F\big[\delta(x_1 + x_2)\big](y_1, y_2) = F_{x_2}\Big[F_{x_1}\big[\delta(x_1 + x_2)\big](y_1, x_2)\Big](y_1, y_2) =$$

$$= F_{x_2}\big[e^{-ix_2 y_1}\big](y_1, y_2) = 2\pi\delta(y_2 - y_1) = 2\pi\delta(y_1 - y_2)$$

Ответ. $\quad F\big[\delta(x_1 + x_2)\big](y_1, y_2) = 2\pi\delta(y_1 - y_2)$

Решим еще одну задачу на вычисление преобразования Фурье обобщенной функции из экзаменационной контрольной по УМФ 2017/2018 учебного года.

Задача 6 *Найти в пространстве $S'(\mathbb{R}^2)$ преобразование Фурье обобщенной функции*

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{y - x + i}$$

Решение.

Прежде всего заметим, что в силу свойств преобразования Фурье обобщенных функций справедливо равенство

$$F\left[\frac{xy^2}{y-x+i}\right](\xi,\zeta) = i\,F\left[\frac{(ix)(iy)^2}{y-x+i}\right](\xi,\zeta) =$$
$$= i\,\frac{\partial^3}{\partial\xi\partial\zeta^2}\left\{F\left[\frac{1}{y-x+i}\right](\xi,\zeta)\right\}, \tag{7}$$

поэтому вычислим сначала преобразование Фурье

$$F\left[\frac{1}{y-x+i}\right](\xi,\zeta)\,.$$

Для этого воспользуемся свойством преобразования Фурье из утверждения 2

$$F\left[\frac{1}{y-x+i}\right](\xi,\zeta) = F_x\left[F_y\left[\frac{1}{y-x+i}\right]\right](\xi,\zeta)$$

Ранее на семинарах (см. пособие «Преобразование Фурье обобщенных функций из $S'(\mathbb{R}^m)$», задача 13) мы вычислили преобразование Фурье от рациональной дроби

$$\frac{1}{x+b+ia}$$

при $a \neq 0$ и получили формулу

$$F\left[\frac{1}{x+b+ia}\right](y) = -2\pi i\operatorname{sign} a\;\theta(-ay)\;e^{ay-iby} \tag{8}$$

Следствием формулы (8) является равенство

$$F_y\left[\frac{1}{y-x+i}\right](x,\zeta) = -2\pi i\;\theta(-\zeta)\;e^{\zeta+ix\zeta}$$

Таким образом,

$$F\left[\frac{1}{y-x+i}\right](\xi,\zeta) = F_x\left[-2\pi i\;\theta(-\zeta)\;e^{\zeta+ix\zeta}\right](\xi,\zeta) =$$
$$= -2\pi i\;\theta(-\zeta)\;e^{\zeta}F_x\left[e^{ix\zeta}\right](\xi,\zeta) \tag{9}$$

Ранее на семинарах (см. пособие «Преобразование Фурье обобщенных функций из $S'(\mathbb{R}^m)$», следствие из задачи 2) мы выяснили, что

$$F\left[e^{ixa}\right](y) = 2\pi\,\delta(y+a)\,.$$

Применяя этот результат к формуле (9), находим

$$F\left[\frac{1}{y-x+i}\right](\xi,\zeta) = -4\pi^2 i\,\theta(-\zeta)\,e^{\zeta}\,\delta(\xi+\zeta)$$

Подставляя найденное преобразование Фурье в формулу (7), получаем окончательный ответ

$$F\left[\frac{xy^2}{y-x+i}\right](\xi,\zeta) = 4\pi^2\frac{\partial^3}{\partial\xi\partial\zeta^2}\Big\{\theta(-\zeta)\,e^{\zeta}\,\delta(\xi+\zeta)\Big\}$$

Дальнейшее упрощение этого выражения не требуется.

Ответ. $$F\left[\frac{xy^2}{y-x+i}\right](\xi,\zeta) = 4\pi^2\frac{\partial^3}{\partial\xi\partial\zeta^2}\Big\{\theta(-\zeta)\,e^{\zeta}\,\delta(\xi+\zeta)\Big\}$$

В заключение решим следующую задачу.

Задача 7 (задание 1.22) *Пусть* $a > 0$. *Доказать, что в пространстве* $S'(\mathbb{R}^2)$ *обобщенная функция*

$$u(t,x) = f(x-at) + g(x+at)$$

является решением однородного волнового уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(t,x) = 0$$

для любых обобщенных функций $f, g \in S'(\mathbb{R})$.

Решение. Будем для сокращения записи использовать следующие общепринятые обозначения для частных производных функции

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = w_{tt}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = w_{xx}.$$

По определению дифференцирования обобщенных функций для любой основной функции $\varphi \in S(\mathbb{R}^2)$ выполнено равенство

$$\Big\langle u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t)\,,\,\varphi(x,t)\Big\rangle =$$

$$= \Big\langle u_{tt}(x,t)\,,\,\varphi(x,t)\Big\rangle - a^2\Big\langle u_{xx}(x,t)\,,\,\varphi(x,t)\Big\rangle =$$

$$= \Big\langle u(x,t)\,,\,\varphi_{tt}(x,t)\Big\rangle - a^2\Big\langle u(x,t)\,,\,\varphi_{xx}(x,t)\Big\rangle =$$

$$= \Big\langle u(x,t)\,,\,\varphi_{tt}(x,t) - a^2\varphi_{xx}(x,t)\Big\rangle = \tag{10}$$

$$= \Big\langle f(x-at) + g(x+at)\,,\,\varphi_{tt}(x,t) - a^2\varphi_{xx}(x,t)\Big\rangle =$$

$$= \Big\langle f(x-at)\,,\,\varphi_{tt}(x,t) - a^2\varphi_{xx}(x,t)\Big\rangle +$$

$$+ \Big\langle g(x+at)\,,\,\varphi_{tt}(x,t) - a^2\varphi_{xx}(x,t)\Big\rangle$$

Используя определение 1 для функции $f(x-at)$, в котором положим

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a \end{pmatrix}, \quad b = 0, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 \\ -a \end{pmatrix},$$

получаем

$$\Big\langle f(x-at)\,,\,\varphi_{tt}(x,t) - a^2\varphi_{xx}(x,t)\Big\rangle =$$

$$= \Big\langle F^{-1}\big[f(z)\big](y)\,,\,F\big[\varphi_{tt}(x,t) - a^2\varphi_{xx}(x,t)\big](y,-ay)\Big\rangle$$

Вычислим отдельно

$$F\big[\varphi_{tt}(x,t) - a^2\varphi_{xx}(x,t)\big](y,-ay)$$

Из формулы для преобразования Фурье для производной функции получаем

$$\begin{aligned} F\big[\,\varphi_{tt}(x,t) - a^2\varphi_{xx}(x,t)\,\big](\xi,\zeta) &= \Big((-i\zeta)^2 - a^2(-i\xi)^2\Big)F\big[\varphi(x,t)\big](\xi,\zeta) = \\ &= \Big(-\zeta^2 + a^2\xi^2\Big)F\big[\varphi(x,t)\big](\xi,\zeta) \end{aligned} \tag{11}$$

Подставляя в формулу (11) значения

$$\xi = y, \quad \zeta = -ay,$$

находим

$$F\big[\,\varphi_{tt}(x,t) - a^2\varphi_{xx}(x,t)\,\big](y,-ay) = \Big(-(-ay)^2 + a^2y^2\Big)F\big[\varphi(x,t)\big](y,-ay) = 0$$

Поэтому

$$\Big\langle f(x-at)\,,\, \varphi_{tt}(x,t) - a^2\varphi_{xx}(x,t)\Big\rangle = 0\,.$$

Точно также преобразуем выражение

$$\Big\langle g(x+at)\,,\, \varphi_{tt}(x,t) - a^2\varphi_{xx}(x,t)\Big\rangle$$

На этот раз в определении 1 положим

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \end{pmatrix}, \quad b = 0, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix},$$

и получим равенство

$$\Big\langle g(x+at)\,,\, \varphi_{tt}(x,t) - a^2\varphi_{xx}(x,t)\Big\rangle =$$

$$= \Big\langle F^{-1}\big[g(z)\big](y)\,,\, F\big[\varphi_{tt}(x,t) - a^2\varphi_{xx}(x,t)\big](y,ay)\Big\rangle$$

Подставляя в формулу (11) значения

$$\xi = y, \quad \zeta = ay,$$

находим

$$F\big[\,\varphi_{tt}(x,t) - a^2\varphi_{xx}(x,t)\,\big](y,ay) = \Big(-(ay)^2 + a^2y^2\Big)F\big[\varphi(x,t)\big](y,ay) = 0$$

Поэтому

$$\Big\langle g(x+at)\,,\, \varphi_{tt}(x,t) - a^2\varphi_{xx}(x,t)\Big\rangle = 0\,.$$

Воспользовавшись формулой (10), окончательно получаем

$$\big\langle u_{tt} - a^2u_{xx}\,,\, \varphi(x,t)\big\rangle = 0\,.$$

Доказано.

Спасибо за внимание.
Не болейте!