Начально-краевые задачи для замыкания оператора Лапласа в секторе

Самарова С.С.

ФОПФ, 3 курс, УМФ

Учебное пособие для дистанционных занятий

В данном пособии изучаются методы решения начально-краевых задач для замыкания оператора Лапласа в секторе. Продемонстрируем эти методы на примере решения начально-краевой задачи для замыкания оператора Лапласа в секторе из письменной экзаменационной контрольной по УМФ 2019-2020 учебного года.

Пример решения начально-краевой задачи для замыкания оператора Лапласа в секторе

Задача 1 *Рассматривается четверть круга*

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2 + y^2 < 2\pi, \quad x > 0, \quad y > 0\}$$

с границей $\partial K = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_c$, *где*

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 0 \le x \le \sqrt{2\pi}, \quad y = 0\},\\
\gamma_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 0 \le y \le \sqrt{2\pi}, \quad x = 0\},\\
\gamma_c &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2 + y^2 = 2\pi, \quad x > 0, \quad y > 0\}.
\end{aligned}$$

Оператор Лапласа

$$\Delta : D(\Delta) \to L_2(K)$$

имеет область определения

$$D(\Delta) = \left\{ f \in C^2(\overline{K}) : \quad f\big|_{\gamma_c} = 0, \quad f'_y\big|_{\gamma_1} = 0, \quad f'_x\big|_{\gamma_2} = 0 \right\}$$

Для функции

$$w(x,y) = \exp(ix^2 + iy^2) - 1\,, \quad (x,y) \in \overline{K}\,,$$

найти решение задачи

$$\begin{cases} i\dfrac{d}{dt}u(t) = \overline{\Delta}u(t), & t > 0, \qquad u(t) \in D(\overline{\Delta}), \\ u(+0) = w, \end{cases}$$

обосновав вложение $u(t) \in D(\overline{\Delta})$ *, дифференцируемость функции* $u(t)$ *при* $t > 0$ *в* $L_2(K)$ *и предельное соотношение*

$$\|u(t) - w\|_{L_2(K)} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +0\,.$$

Решение.

1. Симметричность оператора Лапласа

   Рассмотрим две произвольные функции $f \in D(\Delta)$ и $g \in D(\Delta)$. Тогда

$$(\Delta f, g) = \iint\limits_K \Delta f \cdot \overline{g}\, dxdy$$

   Воспользовавшись второй формулой Грина, получаем

$$\iint\limits_K \Delta f \cdot \overline{g}\, dxdy = \oint\limits_{\partial K} \left(\overline{g}\, \frac{\partial f}{\partial n} - f\, \frac{\partial \overline{g}}{\partial n} \right) dS + \iint\limits_K f\, \Delta \overline{g}\, dxdy$$

   Поскольку $\partial K = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_c$ и

$$\left.\frac{\partial f}{\partial n}\right|_{\gamma_1} = -\, f'_y\big|_{\gamma_1} = 0; \qquad \left.\frac{\partial \overline{g}}{\partial n}\right|_{\gamma_1} = -\, \overline{g}'_y\big|_{\gamma_1} = 0;$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial n}\right|_{\gamma_2} = -\, f'_x\big|_{\gamma_2} = 0; \qquad \left.\frac{\partial \overline{g}}{\partial n}\right|_{\gamma_2} = -\, \overline{g}'_x\big|_{\gamma_2} = 0;$$

$$f|_{\gamma_c} = 0; \qquad \overline{g}|_{\gamma_c} = 0,$$

   то

$$\oint\limits_{\partial K} \left(\overline{g}\, \frac{\partial f}{\partial n} - f\, \frac{\partial \overline{g}}{\partial n} \right) dS = 0$$

Следовательно,

$$(\Delta f, g) = \iint\limits_K \Delta f \cdot \overline{g}\, dxdy = \iint\limits_K f\, \overline{\Delta g}\, dxdy = (f, \Delta g)$$

Симметричность оператора Δ доказана.

2. <u>Отрицательная определенность оператора Лапласа</u>

   Рассмотрим произвольную функцию $f \in D(\Delta)$ и воспользуемся третьей формулой Грина

$$(\Delta f, f) = \iint\limits_K \Delta f \cdot \overline{f}\, dxdy = \oint\limits_{\partial K} \overline{f}\, \frac{\partial f}{\partial n}\, dS - \iint\limits_K |\mathrm{grad}\, f|^2\, dxdy$$

   Поскольку $\partial K = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_c$ и

$$\left.\frac{\partial f}{\partial n}\right|_{\gamma_1} = -\, f'_y\big|_{\gamma_1} = 0; \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial n}\right|_{\gamma_2} = -\, f'_x\big|_{\gamma_2} = 0; \qquad \overline{f}\big|_{\gamma_c} = 0,$$

   то

$$\oint\limits_{\partial K} \overline{f}\, \frac{\partial f}{\partial n}\, dS = 0$$

   Следовательно,

$$(\Delta f, f) = -\iint\limits_K |\mathrm{grad}\, f|^2\, dxdy \leq 0$$

   Для доказательства отрицательной определенности оператора Δ остается проверить, что

$$(\Delta f, f) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad f = 0$$

   Действительно,

$$(\Delta f, f) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad |\mathrm{grad}\, f| = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad f = \mathrm{const}$$

   С учетом условия $f\big|_{\gamma_c} = 0$ получаем

$$(\Delta f, f) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad f = 0$$

   Отрицательная определенность оператора Δ доказана.

3. Собственные значения и собственные функции оператора Лапласа Δ

Решим краевую задачу на собственные значения для оператора Лапласа в секторе K

$$\Delta f = \lambda f; \qquad f|_{\gamma_c} = 0, \quad f'_y\big|_{\gamma_1} = 0, \quad f'_x|_{\gamma_2} = 0\,. \tag{1}$$

Для этого сначала заметим, что из симметричности и отрицательной определенности оператора Δ следует, что собственные значения λ действительны и отрицательны.

Перепишем задачу (1) в полярных координатах

$$f_{rr} + \frac{1}{r}\,f_r + \frac{1}{r^2}\,f_{\varphi\varphi} = \lambda f; \quad f|_{r=\sqrt{2\pi}} = 0, \quad f'_\varphi\big|_{\varphi=0} = 0, \quad f'_\varphi\big|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = 0\,. \tag{2}$$

Найдем сначала собственные функции $\Phi(\varphi)$ оператора

$$L = \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

с областью определения

$$D(L) = \left\{\Phi \in C^2\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \;:\quad \Phi'(0) = 0, \quad \Phi'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\right\}$$

Для этого решим задачу на собственные значения

$$\Phi'' = \mu\,\Phi, \quad \Phi'(0) = 0, \quad \Phi'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \tag{3}$$

Стоит отметить, что краевые условия в задаче (3) совпадают с краевыми условиями по φ задачи (2).

Рассмотрим три случая.

- $\mu > 0$

  В этом случае общее решение уравнения в задаче (3) имеет вид

  $$\Phi(\varphi) = A\,\mathrm{sh}(\sqrt{\mu}\varphi) + B\,\mathrm{ch}(\sqrt{\mu}\varphi)$$

  Из краевых условий получаем

  $$\Phi'(0) = A\sqrt{\mu} = 0; \qquad \Phi'\left(\frac{\pi}{2}\right) = B\sqrt{\mu}\,\mathrm{sh}\left(\sqrt{\mu}\,\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0$$

  откуда следует, что у оператора L нет положительных собственных значений.

- $\mu = 0$

  В этом случае общее решение уравнения в задаче (3) имеет вид

$$\Phi(\varphi) = A\varphi + B$$

  Подставляя краевые условия задачи (3), получаем

$$\Phi'(0) = A = 0; \qquad \Phi'\left(\frac{\pi}{2}\right) = A = 0;$$

  откуда следует, что у оператора L есть собственная функция

$$\Phi_0(\varphi) \equiv 1$$

  с нулевым собственным значением.

- $\mu < 0$

  В этом случае общее решение уравнения в задаче (3) имеет вид

$$\Phi(\varphi) = A\sin(\sqrt{-\mu}\,\varphi) + B\cos(\sqrt{-\mu}\,\varphi)$$

  Подставляя краевые условия задачи (3), получаем

$$\Phi'(0) = A\sqrt{-\mu} = 0; \qquad \Phi'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -B\sqrt{-\mu}\,\sin\left(\sqrt{-\mu}\,\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

  Поскольку собственная функция не может быть тождественно равной нулю, то

$$\sin\left(\sqrt{-\mu}\,\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{-\mu}\,\frac{\pi}{2} = \pi n \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{-\mu} = 2n$$

  Таким образом, мы получили набор собственных значений и соответствующих им собственных функций

$$\Phi_n(\varphi) = \cos(2n\varphi), \qquad \mu_n = -4n^2; \quad n = 1, 2, ...$$

В целом все найденные собственные значения и собственные функции можно записать одной формулой в виде

$$\Phi_n(\varphi) = \cos(2n\varphi), \qquad \mu_n = -4n^2; \quad n = 0, 1, 2, ...$$

причем набор собственных функций $\Phi_n(\varphi)$ образует ортогональный базис в пространстве $L_2\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Теперь вернемся к решению задачи (2) и разложим функцию $f(r,\varphi)$ при фиксированном r в ряд Фурье по базису $\{\cos(2n\varphi)\}$

$$f(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n(r)\cos(2n\varphi)$$

Подставляя это разложение в уравнение (2), получим

$$\sum_{n=0}^{+\infty} A_n''(r)\cos(2n\varphi) + \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{+\infty} A_n'(r)\cos(2n\varphi) + \frac{1}{r^2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-4n^2)A_n(r)\cos(2n\varphi) =$$

$$= \lambda\sum_{n=0}^{+\infty} A_n(r)\cos(2n\varphi)$$

Приравнивая коэффициенты при каждом $\cos(2n\varphi)$ в левой и правой частях равенства, получаем

$$A_n''(r) + \frac{1}{r}A_n'(r) - \frac{4n^2}{r^2}A_n(r) = \lambda A_n(r), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{4}$$

Преобразуем уравнение (4), учитывая отрицательность λ, к другому виду

$$A_n''(r) + \frac{1}{r}A_n'(r) + \left(-\lambda - \frac{4n^2}{r^2}\right)A_n(r) = 0$$

$$\frac{A_n''(r)}{\left(\sqrt{-\lambda}\right)^2} + \frac{1}{r\sqrt{-\lambda}}\cdot\frac{A_n'(r)}{\sqrt{-\lambda}} + \left(1 - \frac{4n^2}{\left(r\sqrt{-\lambda}\right)^2}\right)A_n(r) = 0 \tag{5}$$

Совершая в уравнении (5) замену переменной

$$t = r\sqrt{-\lambda},$$

получаем уравнение Бесселя

$$A_n''(t) + \frac{1}{t}A_n'(t) + \left(1 - \frac{4n^2}{t^2}\right)A_n(t) = 0$$

Поскольку нас интересуют только такие решения $A_n(t)$ уравнения Бесселя, которые ограничены в нуле, то

$$A_n(t) = J_{2n}(t) \quad \Rightarrow \quad A_n(r) = J_{2n}\big(r\sqrt{-\lambda}\big) \tag{6}$$

Воспользовавшись краевым условием в рассматриваемом круге, получаем

$$f|_{r=\sqrt{2\pi}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A_n(\sqrt{2\pi}) = 0$$

Следовательно,

$$A_n(\sqrt{2\pi}) = J_{2n}\big(\sqrt{2\pi}\,\sqrt{-\lambda}\big) = 0$$

то есть, число $\sqrt{2\pi}\,\sqrt{-\lambda}$ является одним из нулей $\mu_k^{(2n)}$ функции Бесселя $J_{2n}(t)$.

Подставляя выражение

$$\sqrt{-\lambda} = \frac{\mu_k^{(2n)}}{\sqrt{2\pi}}$$

в формулу (6), получаем набор решений уравнения (4)

$$A_{n,k}(r) = J_{2n}\left(\frac{\mu_k^{(2n)} r}{\sqrt{2\pi}}\right), \qquad k = 1, 2, 3...$$

Итак, мы нашли собственные значения оператора Лапласа

$$\lambda_{n,k} = -\left(\frac{\mu_k^{(2n)}}{\sqrt{2\pi}}\right)^2; \quad n = 0, 1, 2, ..., \quad k = 1, 2, 3...$$

и соответствующие им собственные функции

$$f_{n,k} = J_{2n}\left(\frac{\mu_k^{(2n)} r}{\sqrt{2\pi}}\right)\cos(2n\varphi) \tag{7}$$

Набор собственных функций оператора Лапласа в секторе

$$\{f_{n,k}\} \quad n = 0, 1, 2, ..., \quad k = 1, 2, 3...$$

образует ортогональный базис в пространстве $L_2(K)$, однако доказательство этого факта является лекционным материалом.

4. Спектральное разложение замыкания оператора Лапласа $\overline{\Delta}$

   Мы выяснили, что оператор Лапласа Δ с областью определения

   $$D(\Delta) = \left\{ f \in C^2(\overline{K}) : \quad f|_{\partial K} = 0 \right\}$$

   является симметричным и обладает в пространстве $L_2(K)$ ортогональным базисом из собственных функций.

   Поэтому его замыкание $\overline{\Delta}$ имеет область определения

   $$D(\overline{\Delta}) = \left\{ u \in L_2(K) : \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_{n,k}^2 \frac{|(u, f_{n,k})|^2}{\|f_{n,k}\|^2} < \infty \right\}$$

   и спектральное разложение

   $$\overline{\Delta} u = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_{n,k} \frac{(u, f_{n,k})}{\|f_{n,k}\|^2} f_{n,k}$$

5. Решение начально-краевой задачи

   $$\begin{aligned} & i \frac{d}{dt} u(t) = \overline{\Delta} u(t), \qquad t > 0, \qquad u(t) \in D(\overline{\Delta}), \\ & u(+0) = w, \end{aligned} \tag{8}$$

   где $w = \exp(ix^2 + iy^2) - 1$.

   (a) Найдем «кандидата» на решение начально-краевой задачи.

   С этой целью при каждом фиксированном t разложим функцию $u(t)$ по базису $\{f_{n,k}\}$

   $$u(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} T_{n,k}(t) f_{n,k} \tag{9}$$

   Из спектрального разложения замыкания оператора Лапласа $\overline{\Delta}$ получаем

   $$\overline{\Delta} u(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_{n,k} T_{n,k}(t) f_{n,k} \tag{10}$$

Разложим функцию w по базису $\{f_{n,k}\}$. Поскольку

$$w = \exp(ix^2 + iy^2) - 1 = e^{ir^2} - 1$$

то ее разложение по базису $\{f_{n,k}\}$ имеет вид

$$w = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k \, f_{0,k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k \, J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{\sqrt{2\pi}}\right) \tag{11}$$

где

$$\alpha_k = \frac{(e^{ir^2} - 1, f_{0,k})}{\|f_{0,k}\|^2} = \frac{\iint\limits_K (e^{ir^2} - 1) \; J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{\sqrt{2\pi}}\right) r \, dr d\varphi}{\iint\limits_K J_0^2\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{\sqrt{2\pi}}\right) r \, dr d\varphi} =$$

$$= \frac{\int\limits_0^{\sqrt{2\pi}} r(e^{ir^2} - 1) J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{2}\right) dr \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi}{\int\limits_0^{\sqrt{2\pi}} r J_0^2\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{2}\right) dr \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi} = \frac{\int\limits_0^{\sqrt{2\pi}} r(e^{ir^2} - 1) J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{2}\right) dr}{\int\limits_0^{\sqrt{2\pi}} r J_0^2\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{2}\right) dr}$$

Поскольку в формулу (11) входят только функции $f_{0,k}$, то в формуле (9) равны нулю коэффициенты

$$T_{n,k}(t) \quad \text{при} \quad n = 1, 2, ..., \quad k = 1, 2, 3...$$

Таким образом, разложения (9) и (10) приобретают вид

$$u(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} T_{0,k}(t) f_{0,k} \tag{12}$$

и

$$\overline{\Delta} u(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_{0,k} T_{0,k}(t) f_{0,k} \tag{13}$$

соответственно.

Подставив разложения (11), (12), (13) в уравнение и начальное условие задачи (8), получим

$$i\sum_{k=1}^{+\infty} T'_{0,k}(t) f_{0,k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_{0,k} T_{0,k}(t) f_{0,k}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} T_{0,k}(0) f_{0,k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k\, f_{0,k}$$

Приравнивая коэффициенты при каждой базисной функции $f_{0,k}$, для каждого $k = 1, 2, ...$ получаем задачу Коши

$$iT'_{0,k}(t) = \lambda_{0,k} T_{0,k}(t)\,, \quad T_{0,k}(0) = \alpha_k\,,$$

Решим эту задачу.

$$T'_{0,k}(t) = -i\,\lambda_{0,k} T_{0,k}(t)$$

$$T_{0,k}(t) = C_k e^{-i\lambda_{0,k} t}$$

Найдем константы C_k из начального условия

$$T_{0,k}(0) = C_k = \alpha_k$$

Поэтому

$$T_{0,k}(t) = \alpha_k\, e^{-i\lambda_{0,k} t}$$

и «кандидатом» на решение начально-краевой задачи (8) будет функция

$$u(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k\, e^{-i\lambda_{0,k} t} f_{0,k}$$

Проверим, что $u(t)$ действительно является решением задачи (8). Прежде всего заметим, что

$$w = (e^{ir^2} - 1) \in D(\Delta)$$

Действительно,

$$w \in C^2(\overline{K}); \quad w\big|_{r=\sqrt{2\pi}} = 0, \quad w'_\varphi\big|_{\varphi=0} = 0, \quad w'_\varphi\big|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = 0$$

Значит, $w \in L_2(\overline{K})$ и

$$\|w\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} |\alpha_k|^2 \|f_{0,k}\|^2 < \infty \tag{14}$$

Кроме того, поскольку $D(\Delta) \subset D(\overline{\Delta})$, то

$$\|\overline{\Delta} w\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_{0,k}^2 |\alpha_k|^2 \|f_{0,k}\|^2 < \infty \tag{15}$$

(b) Покажем, что <u>для каждого $t > 0$ функция $u(t) \in L_2(K)$</u>.
Для этого, воспользовавшись равенством Парсеваля, оценим сверху квадрат нормы функции $u(t)$

$$\|u(t)\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} |\alpha_k|^2 |e^{-i\lambda_{0,k}t}|^2 \|f_{0,k}\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} |\alpha_k|^2 \|f_{0,k}\|^2 = \|w\|^2 < \infty$$

что и требовалось доказать.

(c) Покажем, что <u>для каждого $t > 0$ функция $u(t) \in D(\overline{\Delta})$</u>.
Действительно, с учетом (15) имеем

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_{0,k}^2 |\alpha_k|^2 |e^{-i\lambda_{0,k}t}|^2 \|f_{0,k}\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_{0,k}^2 |\alpha_k|^2 \|f_{0,k}\|^2 = \|\overline{\Delta} w\|^2 < \infty$$

что и требовалось доказать.

(d) Докажем, что <u>выполнено начальное условие $u(+0) = w$</u>.
Справедлива оценка

$$\|u(t) - w\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} |\alpha_k|^2 |e^{-i\lambda_{0,k}t} - 1|^2 \|f_{0,k}\|^2 \le \sum_{k=1}^{+\infty} 4|\alpha_k|^2 \|f_{0,k}\|^2$$

и ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 4|\alpha_k|^2 \|f_{0,k}\|^2$$

сходится. Поэтому по признаку Вейерштрасса ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |\alpha_k|^2 |e^{-i\lambda_{0,k}t} - 1|^2 \|f_{0,k}\|^2$$

сходится равномерно по t на $(0, +\infty)$

Следовательно,

$$\lim_{t\to+0} \|u(t) - w\|^2 = \lim_{t\to+0} \sum_{k=1}^{+\infty} |\alpha_k|^2 |e^{-i\lambda_{0,k}t} - 1|^2 \|f_{0,k}\|^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} |\alpha_k|^2 \lim_{t\to+0} |e^{-i\lambda_{0,k}t} - 1|^2 \|f_{0,k}\|^2 = 0$$

что и требовалось доказать.

(e) Докажем, что ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty} T'_{0,k}(t) f_{0,k}$$

сходится в $L_2(K)$

Действительно,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |T'_{0,k}|^2 \|f_{0,k}\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} |\alpha_k|^2 \, |-i\lambda_{0,k}\, e^{-i\lambda_{0,k}t}|^2 \, \|f_{0,k}\|^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_{0,k}^2 |\alpha_k|^2 \|f_{0,k}\|^2 = \|\overline{\Delta} w\|^2 < \infty$$

что и требовалось доказать.

(f) Докажем, что производная $u'(t)$ в $L_2(K)$ равна сумме ряда

$$\sum_{k=1}^{+\infty} T'_{0,k}(t) f_{0,k}$$

В силу определения производной в пространстве $L_2(K)$ для этого нужно доказать, что справедливо равенство:

$$\lim_{\Delta t\to 0} \left\| \frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t} - \sum_{k=1}^{+\infty} T'_{0,k}(t) f_{0,k} \right\|^2 = 0$$

Воспользовавшись равенством Парсеваля, преобразуем выражение, стоящее под знаком предела

$$\left\| \frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t} - \sum_{k=1}^{+\infty} T'_{0,k}(t) f_{0,k} \right\|^2 =$$

$$= \left\| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{T_{0,k}(t+\Delta t) - T_{0,k}(t)}{\Delta t}\ f_{0,k} - \sum_{k=1}^{+\infty} T'_{0,k}(t) f_{0,k} \right\|^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \left| \frac{T_{0,k}(t+\Delta t) - T_{0,k}(t)}{\Delta t} - T'_{0,k}(t) \right|^2 \|f_{0,k}\|^2$$

По теореме Лагранжа о среднем для каждого k существует такое $\xi_k \in (t, t+\Delta t)$, что

$$T_{0,k}(t+\Delta t) - T_{0,k}(t) = T'_{0,k}(\xi_k)\Delta t$$

Поэтому

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left| \frac{T_{0,k}(t+\Delta t) - T_{0,k}(t)}{\Delta t} - T'_{0,k}(t) \right|^2 \|f_{0,k}\|^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \left| T'_{0,k}(\xi_k) - T'_{0,k}(t) \right|^2 \|f_{0,k}\|^2 \le \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\left| T'_{0,k}(\xi_k) \right| + \left| T'_{0,k}(t) \right| \right)^2 \|f_{0,k}\|^2$$

Оценим общий член этого ряда сверху, воспользовавшись оценкой

$$\left| T'_{0,k}(t) \right| \le |\lambda_{0,k}\alpha_k|$$

полученной при доказательстве пункта (е):

$$\left(\left| T'_{0,k}(\xi_k) \right| + \left| T'_{0,k}(t) \right| \right)^2 \|f_{0,k}\|^2 \le 4\,\lambda_{0,k}^2 |\alpha_k|^2 \|f_{0,k}\|^2$$

Поскольку

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 4\,\lambda_{0,k}^2 |\alpha_k|^2 \|f_{0,k}\|^2 = 4\|\overline{\Delta} w\|^2 < \infty,$$

то по признаку Вейерштрасса ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left| T'_{0,k}(\xi_k) - T'_{0,k}(t) \right|^2 \|f_{0,k}\|^2$$

сходится равномерно по Δt, и справедливо равенство

$$\lim_{\Delta t \to 0} \sum_{k=1}^{+\infty} \left| T'_{0,k}(\xi_k) - T'_{0,k}(t) \right|^2 \|f_{0,k}\|^2 =$$

$$
= \sum_{k=1}^{+\infty} \lim_{\Delta t \to 0} \left| T'_{0,k}(\xi_k) - T'_{0,k}(t) \right|^2 \| f_{0,k} \|^2 = 0
$$

Следовательно,

$$
\lim_{\Delta t \to 0} \left\| \frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t} - \sum_{k=1}^{+\infty} T'_{0,k}(t) f_{0,k} \right\|^2 = 0
$$

что и требовалось доказать.

Поскольку все необходимые проверки мы выполнили, то можно утверждать, что функция

$$
u(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k \, e^{-i\lambda_{0,k} t} f_{0,k}
$$

является решением начально-краевой задачи (8).

Решение задачи 1 завершено.

Наши семинары в этом семестре закончены. Удачной сессии!

Спасибо за внимание.
Не болейте!