Начально-краевые задачи для замыкания оператора Лапласа в круге

Самарова С.С.

ФОПФ, 3 курс, УМФ

Учебное пособие для дистанционных занятий

В данном пособии изучаются методы решения начально-краевых задач для замыкания оператора Лапласа в круге.

Приведем необходимые теоретические сведения.

Формулы Грина

Пусть D – ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ с положительно ориентированной кусочно гладкой границей ∂D.

Тогда для функций $u \in C^2(\overline{D})$ и $v \in C^2(\overline{D})$ справедливы следующие формулы:

1. $$\oint\limits_{\partial D} v\,\frac{\partial u}{\partial n}\,dS = \iint\limits_D \left(\frac{\partial v}{\partial x}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\,\frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy + \iint\limits_D v\,\Delta u\,dxdy$$

   (первая формула Грина)

2. $$\oint\limits_{\partial D} \left(v\,\frac{\partial u}{\partial n} - u\,\frac{\partial v}{\partial n}\right) dS = \iint\limits_D (v\,\Delta u - u\,\Delta v)\,dxdy$$

   (вторая формула Грина)

3. $$\oint\limits_{\partial D} \overline{u}\,\frac{\partial u}{\partial n}\,dS = \iint\limits_D |\mathrm{grad}\,u|^2\,dxdy + \iint\limits_D \overline{u}\,\Delta u\,dxdy$$

   (третья формула Грина)

Доказательство.

1. Заметим, что справедливо равенство

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(v\,\operatorname{grad} u) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \\ &= \frac{\partial v}{\partial x}\,\frac{\partial u}{\partial x}+v\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial v}{\partial y}\,\frac{\partial u}{\partial y}+v\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \\ &= \frac{\partial v}{\partial x}\,\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\,\frac{\partial u}{\partial y}+v\,\Delta u,\end{aligned} \tag{1}$$

   Интегрируя обе части равенства (1) по области D и применяя формулу Грина, связывающую двойной интеграл по области с криволинейным интегралом по ее границе

$$\oint\limits_{\partial D} v\,\frac{\partial u}{\partial n}\,dS = \iint\limits_{D}\operatorname{div}(v\,\operatorname{grad} u)\,dxdy$$

   (Вы изучали эту формулу на 2 курсе), получаем первую формулу Грина:

$$\oint\limits_{\partial D} v\,\frac{\partial u}{\partial n}\,dS = \iint\limits_{D}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\,\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\,\frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy+\iint\limits_{D} v\,\Delta u\,dxdy \tag{2}$$

2. Для доказательства второй формулы Грина перепишем первую формулу Грина (2), поменяв в ней u и v местами:

$$\oint\limits_{\partial D} u\,\frac{\partial v}{\partial n}\,dS = \iint\limits_{D}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy+\iint\limits_{D} u\,\Delta v\,dxdy \tag{3}$$

   Вычитая из формулы (2) формулу (3) получаем вторую формулу Грина

$$\oint\limits_{\partial D}\left(v\,\frac{\partial u}{\partial n}-u\,\frac{\partial v}{\partial n}\right)dS = \iint\limits_{D}(v\,\Delta u-u\,\Delta v)\,dxdy$$

3. Подставив в первую формулу Грина $v=\overline{u}$, получим третью формулу Грина

$$\oint\limits_{\partial D}\overline{u}\,\frac{\partial u}{\partial n}\,dS = \iint\limits_{D}|\operatorname{grad} u|^2\,dxdy+\iint\limits_{D}\overline{u}\,\Delta u\,dxdy$$

Уравнение Бесселя

Дифференциальное уравнение

$$y'' + \frac{1}{x}\,y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0, \qquad x > 0,$$

где ν – числовой параметр, называют уравнением Бесселя.

Мы будем рассматривать только действительные неотрицательные значения ν.

Приведенная форма уравнения Бесселя

Представим функцию $y(x)$ в виде

$$y(x) = u(x)v(x)$$

и подставим это выражение в уравнение Бесселя. Тогда

$$u''v + 2u'v' + uv'' + \frac{1}{x}(u'v + uv') + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)uv = 0$$

$$u''v + u'\left(2v' + \frac{1}{x}v\right) + u\left(v'' + \frac{1}{x}v' + v\left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)\right) = 0 \tag{4}$$

Подберем функцию v так, чтобы она была решением уравнения

$$2v' + \frac{1}{x}v = 0$$

Решая это уравнение, получим

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{2x}$$

$$\ln|v| = -\frac{1}{2}\ln|x| + C$$

$$v = \frac{C}{\sqrt{x}}$$

Выберем, например, в качестве v функцию $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, тогда

$$v = x^{-1/2}; \qquad v' = -\frac{1}{2}\,x^{-3/2}; \qquad v'' = \frac{3}{4}\,x^{-5/2}$$

Подставляя эти выражения в уравнение (4), получаем

$$u''x^{-1/2} + \left(\frac{3}{4}\,x^{-5/2} - \frac{1}{2}\,x^{-5/2} + x^{-1/2} - \nu^2 x^{-5/2}\right)u = 0$$

$$u'' + \left(1 + \frac{\frac{1}{4} - \nu^2}{x^2}\right)u = 0 \tag{5}$$

Уравнение (5) называют уравнением Бесселя в приведенной форме.

Функции Бесселя

Нас будет интересовать ограниченное в окрестности нуля решение уравнения Бесселя. Его называют функцией Бесселя и обозначают $J_\nu(x)$.

Функция $J_\nu(x)$ представима в виде ряда

$$J_\nu(x) = x^\nu \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

коэффициенты c_n которого можно вычислить рекуррентно, подставив ряд в уравнение Бесселя, но мы этим заниматься не будем, а лекторы иногда это делают.

Нули функций Бесселя

Утверждение 1. Функция Бесселя $J_\nu(x)$ имеет счетное число положительных нулей

$$0 < \mu_1^{(\nu)} < \mu_2^{(\nu)} < \mu_3^{(\nu)} < \ldots$$

причем $\mu_k^{(\nu)} \to +\infty$ при $k \to \infty$.

Доказательство.

Рассмотрим уравнение

$$u'' + \frac{1}{4}u = 0 \tag{6}$$

и применим к уравнению Бесселя в приведенной форме (5) и уравнению (6) теорему Штурма.

Поскольку существует такой интервал $(x_\nu, +\infty)$, на котором

$$1 + \frac{\frac{1}{4} - \nu^2}{x^2} \geq \frac{1}{4}$$

то между любыми двумя последовательными нулями любого решения уравнения (6) существует нуль любого решения уравнения (5).

Следовательно, между любыми двумя последовательными нулями функции

$$u = \sin\frac{x}{2}\,,$$

являющейся решением уравнения (6), существует нуль функции

$$\sqrt{x}J_\nu(x)\,.$$

Отсюда вытекает, что функция $J_\nu(x)$ имеет бесконечно много нулей.

Заметим, что нули функции Бесселя $J_\nu(x)$ не могут иметь конечной предельной точки.

Действительно, в противном случае в этой точке будет нуль функции $J_\nu(x)$ и нуль ее производной, и из теоремы единственности решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений будет следовать, что функция Бесселя тождественно равна нулю.

Значит, на любом конечном отрезке не может содержаться бесконечно много нулей функции Бесселя $J_\nu(x)$.

Следовательно, их можно перенумеровать и упорядочить по возрастанию, что и завершает доказательство утверждения 1.

Утверждение 2. Пусть $0 < \nu_1 < \nu_2$. Тогда наименьший положительный нуль функции $J_{\nu_1}(x)$ меньше, чем наименьший положительный нуль функции $J_{\nu_2}(x)$.

Доказательство. Поскольку $0 < \nu_1 < \nu_2$, то справедливо неравенство

$$1 + \frac{\frac{1}{4} - \nu_2^2}{x^2} < 1 + \frac{\frac{1}{4} - \nu_1^2}{x^2}$$

Тогда по теореме Штурма на интервале $(0, \mu_1^{(\nu_2)})$ существует нуль функции $J_{\nu_1}(x)$. Следовательно, наименьший положительный нуль функции $J_{\nu_1}(x)$ также лежит на этом интервале, что и требовалось доказать.

Утверждение 3. Все нули $\mu_k^{(\nu)}$ функции Бесселя $J_\nu(x)$ удовлетворяют неравенству

$$\mu_k^{(\nu)} \geq 2\sqrt{1+\nu} \tag{7}$$

Это неравенство мы будем использовать для проведения оценок при решении задач с функциями Бесселя.

Пример решения начально-краевой задачи для замыкания оператора Лапласа в круге

Задача 1 *Рассмотрим круг*

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\}$$

и оператор Лапласа

$$\Delta : D(\Delta) \to L_2(K)$$

с областью определения

$$D(\Delta) = \left\{ f \in C^2(\overline{K}) : \quad f|_{\partial K} = 0 \right\}$$

1. *Доказать, что оператор Лапласа* Δ *симметричен*;

2. *Доказать, что оператор Лапласа* Δ *отрицательно определен*;

3. *Найти собственные значения и собственные функции оператора Лапласа* Δ;

4. *Найти область определения и спектральное разложение замыкания оператора Лапласа* $\overline{\Delta}$;

5. *Найти решение задачи*

$$i\frac{d}{dt}u(t) = \overline{\Delta}u(t) + y\cos t, \qquad t > 0, \qquad u(t) \in D(\overline{\Delta}),$$

$$u(+0) = 0$$

Решение.

1. <u>Симметричность</u>

   Рассмотрим две любые функции $f \in D(\Delta)$ и $g \in D(\Delta)$. Тогда

$$(\Delta f, g) = \iint\limits_K \Delta f \cdot \overline{g}\, dxdy$$

   Воспользовавшись второй формулой Грина, получаем

$$\iint\limits_K \Delta f \cdot \overline{g}\, dxdy = \oint\limits_{\partial K} \left(\overline{g}\,\frac{\partial f}{\partial n} - f\,\frac{\partial \overline{g}}{\partial n} \right) dS + \iint\limits_K f\,\Delta\overline{g}\, dxdy$$

Поскольку $f|_{\partial K} = 0$ и $g|_{\partial K} = 0$, то

$$\iint\limits_K \Delta f \cdot \overline{g}\, dxdy = \iint\limits_K f\, \overline{\Delta g}\, dxdy = (f, \Delta g)$$

Симметричность оператора Δ доказана.

2. <u>Отрицательная определенность</u>

   Рассмотрим любую функцию $f \in D(\Delta)$ и воспользуемся третьей формулой Грина

$$(\Delta f, f) = \iint\limits_K \Delta f \cdot \overline{f}\, dxdy = \oint\limits_{\partial K} \overline{f}\, \frac{\partial f}{\partial n}\, dS - \iint\limits_K |\mathrm{grad}\, f|^2\, dxdy$$

   Поскольку $f|_{\partial K} = 0$, то

$$(\Delta f, f) = -\iint\limits_K |\mathrm{grad}\, f|^2\, dxdy \le 0$$

   Для доказательства отрицательной определенности оператора Δ остается проверить, что

$$(\Delta f, f) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad f = 0$$

   Действительно,

$$(\Delta f, f) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad |\mathrm{grad}\, f| = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad f = \mathrm{const}$$

   С учетом условия $f|_{\partial K} = 0$ получаем

$$(\Delta f, f) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad f = 0$$

   Отрицательная определенность оператора Δ доказана.

3. <u>Собственные значения и собственные функции оператора Δ</u>

   Решим краевую задачу на собственные значения для оператора Лапласа в круге

$$\Delta f = \lambda f; \qquad f|_{\partial K} = 0 \tag{8}$$

   Для этого сначала заметим, что из симметричности и отрицательной определенности оператора Δ следует, что собственные значения λ действительны и отрицательны.

Запишем в уравнении (8) оператор Лапласа Δ в полярных координатах

$$f_{rr} + \frac{1}{r} f_r + \frac{1}{r^2} f_{\varphi\varphi} = \lambda f \tag{9}$$

Поскольку при каждом r функция $f(r, \varphi)$ является 2π - периодической функцией φ, разложим ее в ряд Фурье по φ

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n(r) \cos n\varphi + \sum_{n=1}^{+\infty} B_n(r) \sin n\varphi$$

Подставляя это разложение в уравнение (9) получим

$$\sum_{n=0}^{+\infty} A_n''(r) \cos n\varphi + \sum_{n=1}^{+\infty} B_n''(r) \sin n\varphi + \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{+\infty} A_n'(r) \cos n\varphi +$$

$$+ \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{+\infty} B_n'(r) \sin n\varphi + \frac{1}{r^2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-n^2) A_n(r) \cos n\varphi + \frac{1}{r^2} \sum_{n=1}^{+\infty} (-n^2) B_n(r) \sin n\varphi =$$

$$= \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} A_n(r) \cos n\varphi + \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} B_n(r) \sin n\varphi$$

Приравнивая коэффициенты при каждом $\cos n\varphi$ и каждом $\sin n\varphi$ в левой и правой частях равенства, получаем

$$A_n''(r) + \frac{1}{r} A_n'(r) - \frac{n^2}{r^2} A_n(r) = \lambda A_n(r), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{10}$$

и

$$B_n''(r) + \frac{1}{r} B_n'(r) - \frac{n^2}{r^2} B_n(r) = \lambda B_n(r), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{11}$$

Преобразуем уравнение (10), учитывая отрицательность λ, к другому виду

$$A_n''(r) + \frac{1}{r} A_n'(r) + \left(-\lambda - \frac{n^2}{r^2} \right) A_n(r) = 0$$

$$\frac{A_n''(r)}{\left(\sqrt{-\lambda}\right)^2} + \frac{1}{r\sqrt{-\lambda}} \cdot \frac{A_n'(r)}{\sqrt{-\lambda}} + \left(1 - \frac{n^2}{\left(r\sqrt{-\lambda}\right)^2} \right) A_n(r) = 0 \tag{12}$$

Совершая в уравнении (12) замену переменной

$$t = r\sqrt{-\lambda},$$

получаем уравнение Бесселя

$$A_n''(t) + \frac{1}{t}\,A_n'(t) + \left(1 - \frac{n^2}{t^2}\right) A_n(t) = 0$$

Нас интересуют только такие решения $A_n(t)$ уравнения Бесселя, которые ограничены в нуле, поэтому

$$A_n(t) = J_n(t) \quad \Rightarrow \quad A_n(r) = J_n\bigl(r\sqrt{-\lambda}\bigr) \tag{13}$$

Воспользовавшись краевым условием в рассматриваемом круге, получаем

$$f|_{\partial K} = f|_{r=2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A_n(2) = 0;\; B_n(2) = 0$$

Следовательно,

$$A_n(2) = J_n\bigl(2\sqrt{-\lambda}\bigr) = 0$$

то есть, число $2\sqrt{-\lambda}$ является одним из нулей $\mu_k^{(n)}$ функции Бесселя $J_n(t)$.

Подставляя

$$\sqrt{-\lambda} = \frac{\mu_k^{(n)}}{2}$$

в формулу (13), мы получаем набор решений уравнения (10)

$$A_{n,k}(r) = J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)} r}{2}\right), \qquad k = 1, 2, 3...$$

Поскольку уравнение (11) полностью аналогично уравнению (10), то решениями уравнения (11) будут функции

$$B_{n,k}(r) = J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)} r}{2}\right), \qquad k = 1, 2, 3...$$

Итак, мы нашли собственные значения оператора Лапласа

$$\lambda_{n,k} = -\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{2}\right)^2; \quad n = 0, 1, 2, ..., \quad k = 1, 2, 3...$$

причем каждому собственному значению $\lambda_{n,k}$ соответствуют **две собственные функции**

$$f_{n,k} = J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)} r}{2}\right) \cos n\varphi\,; \quad g_{n,k} = J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)} r}{2}\right) \sin n\varphi \tag{14}$$

Важно отметить, что набор собственных функций оператора Лапласа в круге

$$\{f_{n,k}\} \quad n = 0, 1, 2, ..., \quad k = 1, 2, 3...$$
$$\{g_{n,k}\} \quad n = 1, 2, ..., \quad k = 1, 2, 3...$$

образует ортогональный базис в пространстве $L_2(K)$, однако доказательство этого факта является лекционным материалом.

4. Спектральное разложение замыкания оператора Лапласа $\overline{\Delta}$

   Мы выяснили, что оператор Лапласа Δ с областью определения

   $$D(\Delta) = \left\{ f \in C^2(\overline{K}) : \quad f|_{\partial K} = 0 \right\}$$

   является симметричным и обладает в пространстве $L_2(K)$ ортогональным базисом из собственных функций.

   Поэтому его замыкание $\overline{\Delta}$ имеет область определения

   $$D(\overline{\Delta}) = \left\{ u \in L_2(K) : \ \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_{n,k}^2 \frac{|(u, f_{n,k})|^2}{\|f_{n,k}\|^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_{n,k}^2 \frac{|(u, g_{n,k})|^2}{\|g_{n,k}\|^2} < \infty \right\}$$

   и спектральное разложение

   $$\overline{\Delta} u = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_{n,k} \frac{(u, f_{n,k})}{\|f_{n,k}\|^2} f_{n,k} + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_{n,k} \frac{(u, g_{n,k})}{\|g_{n,k}\|^2} g_{n,k}$$

5. Решение начально-краевой задачи

   $$\begin{aligned} & i\frac{d}{dt}u(t) = \overline{\Delta} u(t) + y\cos t, \qquad t > 0, \qquad u(t) \in D(\overline{\Delta}), \\ & u(+0) = 0 \end{aligned} \tag{15}$$

   (a) Найдем «кандидата» на решение начально-краевой задачи.

   С этой целью при каждом фиксированном t разложим функцию $u(t)$ по базису $\{f_{n,k}, g_{n,k}\}$

   $$u(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} T_{n,k}(t) f_{n,k} + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \tilde{T}_{n,k}(t) g_{n,k} \tag{16}$$

Из спектрального разложения замыкания оператора Лапласа $\overline{\Delta}$ получаем

$$\overline{\Delta}u(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_{n,k} T_{n,k}(t) f_{n,k} + \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_{n,k} \tilde{T}_{n,k}(t) g_{n,k} \tag{17}$$

Поскольку в правую часть уравнения входит функция

$$y\cos t = r\sin\varphi\cos t$$

то ее разложение по базису $\{f_{n,k}, g_{n,k}\}$ при фиксированном t имеет вид

$$r\sin\varphi\cos t = \cos t\sum_{k=1}^{+\infty}\alpha_k\, g_{1,k} = \cos t\sum_{k=1}^{+\infty}\alpha_k\, J_1\left(\frac{\mu_k^{(1)} r}{2}\right)\sin\varphi \tag{18}$$

где

$$\alpha_k = \frac{(r\sin\varphi, g_{1,k})}{\|g_{1,k}\|^2} = \frac{\displaystyle\iint_K r\sin\varphi\ J_1\left(\frac{\mu_k^{(1)} r}{2}\right)\sin\varphi\, r\, dr d\varphi}{\displaystyle\iint_K J_1^2\left(\frac{\mu_k^{(1)} r}{2}\right)\sin^2\varphi\, r\, dr} =$$

$$= \frac{\displaystyle\int_0^2 r^2 J_1\left(\frac{\mu_k^{(1)} r}{2}\right) dr \int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\ d\varphi}{\displaystyle\int_0^2 r J_1^2\left(\frac{\mu_k^{(1)} r}{2}\right) dr \int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\ d\varphi} = \frac{\displaystyle\int_0^2 r^2 J_1\left(\frac{\mu_k^{(1)} r}{2}\right) dr}{\displaystyle\int_0^2 r J_1^2\left(\frac{\mu_k^{(1)} r}{2}\right) dr}$$

Поскольку в формулу (18) входят только функции $g_{1,k}$, то в формуле (16) равны нулю коэффициенты

$$T_{n,k}(t) \quad \text{при} \quad n = 0, 1, 2, ..., \quad k = 1, 2, 3...$$

и

$$\tilde{T}_{n,k}(t) \quad \text{при} \quad n = 2, 3, ..., \quad k = 1, 2, 3...$$

Таким образом, разложения (16) и (17) приобретают вид

$$u(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \tilde{T}_{1,k}(t) g_{1,k} \tag{19}$$

и

$$\overline{\Delta} u(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_{1,k} \tilde{T}_{1,k}(t) g_{1,k} \tag{20}$$

соответственно.

Подставив разложения (18), (19), (20) в уравнение (15), получим

$$i \sum_{k=1}^{+\infty} \tilde{T}'_{1,k}(t) g_{1,k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_{1,k} \tilde{T}_{1,k}(t) g_{1,k} + \cos t \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k \, g_{1,k}$$

Приравнивая коэффициенты при каждой базисной функции $g_{1,k}$, получаем уравнения

$$i\tilde{T}'_{1,k}(t) = \lambda_{1,k} \tilde{T}_{1,k}(t) + \cos t \, \alpha_k \,, \quad k = 1, 2, ... \tag{21}$$

Для удобства умножим уравнения (21) на $(-i)$, а затем решим их

$$\tilde{T}'_{1,k}(t) = -i\lambda_{1,k} \tilde{T}_{1,k}(t) - i \cos t \, \alpha_k \tag{22}$$

Сначала найдем общее решение однородного уравнения

$$\left(\tilde{T}_{1,k}\right)_{\text{одн}} = C_k e^{-i\lambda_{1,k} t}$$

Частное решение неоднородного уравнения (22) будем искать в виде

$$\left(\tilde{T}_{1,k}\right)_{\text{част}} = \gamma_k \cos t + \beta_k \sin t$$

Подставляя $\left(\tilde{T}_{1,k}\right)_{\text{част}}$ в уравнение (22), получаем

$$-\gamma_k \sin t + \beta_k \cos t = -i\lambda_{1,k} \gamma_k \cos t - i\lambda_{1,k} \beta_k \sin t - i \cos t \, \alpha_k$$

Решим систему уравнений

$$\begin{cases} -\gamma_k = -i\lambda_{1,k}\beta_k, \\ \beta_k = -i\lambda_{1,k}\gamma_k - i\alpha_k, \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \gamma_k = i\lambda_{1,k}\beta_k, \\ \beta_k = \lambda_{1,k}^2 \beta_k - i\alpha_k, \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \gamma_k = -\dfrac{\lambda_{1,k}\alpha_k}{\lambda_{1,k}^2 - 1}, \\ \beta_k = \dfrac{i\alpha_k}{\lambda_{1,k}^2 - 1}. \end{cases}$$

Заметим, что знаменатель

$$\lambda_{1,k}^2 - 1$$

в нуль не обращается, поскольку в силу оценки (7) утверждения 3 для всех $k \geq 1$ выполнено неравенство

$$|\lambda_{1,k}| = \left(\frac{\mu_k^{(1)}}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{2\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2 \tag{23}$$

Таким образом,

$$\big(\tilde{T}_{1,k}\big)_{\text{част}} = -\frac{\lambda_{1,k}\alpha_k}{\lambda_{1,k}^2 - 1}\cos t + \frac{i\alpha_k}{\lambda_{1,k}^2 - 1}\sin t$$

Значит, общее решение неоднородного уравнения (22) имеет вид

$$\tilde{T}_{1,k}(t) = C_k e^{-i\lambda_{1,k}t} - \frac{\lambda_{1,k}\alpha_k}{\lambda_{1,k}^2 - 1}\cos t + \frac{i\alpha_k}{\lambda_{1,k}^2 - 1}\sin t$$

Для того, чтобы найти константы C_k, заметим, что из начального условия задачи (16)

$$u(+0) = 0$$

следует, что

$$\tilde{T}_{1,k}(0) = 0$$

Поэтому

$$C_k - \frac{\lambda_{1,k}\alpha_k}{\lambda_{1,k}^2 - 1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C_k = \frac{\lambda_{1,k}\alpha_k}{\lambda_{1,k}^2 - 1}$$

и

$$\tilde{T}_{1,k}(t) = \frac{\alpha_k}{\lambda_{1,k}^2 - 1}\Big(\lambda_{1,k}e^{-i\lambda_{1,k}t} - \lambda_{1,k}\cos t + i\sin t\Big)$$

Таким образом, «кандидатом» на решение начально-краевой задачи (15) будет функция

$$u(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha_k}{\lambda_{1,k}^2 - 1}\Big(\lambda_{1,k}e^{-i\lambda_{1,k}t} - \lambda_{1,k}\cos t + i\sin t\Big)g_{1,k}$$

Проверим, что $u(t)$ действительно является решением задачи (15).

(b) Покажем, что <u>для каждого $t > 0$ функция $u(t) \in L_2(K)$</u>.

Для этого, воспользовавшись равенством Парсеваля, оценим сверху квадрат нормы функции $u(t)$

$$\|u(t)\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|\alpha_k|^2}{(\lambda_{1,k}^2 - 1)^2} \left| \left(\lambda_{1,k} e^{-i\lambda_{1,k}t} - \lambda_{1,k} \cos t + i \sin t \right) \right|^2 \|g_{1,k}\|^2 \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|\alpha_k|^2 \left(2|\lambda_{1,k}| + 1\right)^2}{(\lambda_{1,k}^2 - 1)^2} \|g_{1,k}\|^2$$

В силу оценки (23) для всех $k \geq 1$ выполнено неравенство

$$|\lambda_{1,k}| \geq 2$$

Поэтому

$$\frac{2|\lambda_{1,k}| + 1}{\lambda_{1,k}^2 - 1} \leq \frac{2|\lambda_{1,k}| + 2}{\lambda_{1,k}^2 - 1} = \frac{2}{|\lambda_{1,k}| - 1} \leq 2$$

Таким образом,

$$\|u(t)\|^2 \leq 4 \sum_{k=1}^{+\infty} |\alpha_k|^2 \|g_{1,k}\|^2 = 4\|y\|^2 < \infty$$

что и требовалось доказать.

(c) Покажем, что <u>для каждого $t > 0$ функция $u(t) \in D(\overline{\Delta})$</u>.

Действительно,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda_{1,k}^2 |\alpha_k|^2}{(\lambda_{1,k}^2 - 1)^2} \left| \left(\lambda_{1,k} e^{-i\lambda_{1,k}t} - \lambda_{1,k} \cos t + i \sin t \right) \right|^2 \|g_{1,k}\|^2 \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|\alpha_k|^2 \lambda_{1,k}^2 \left(2|\lambda_{1,k}| + 1\right)^2}{(\lambda_{1,k}^2 - 1)^2} \|g_{1,k}\|^2$$

В силу оценки

$$\frac{|\lambda_{1,k}| \left(2|\lambda_{1,k}| + 1\right)}{\lambda_{1,k}^2 - 1} = \frac{2\lambda_{1,k}^2 + |\lambda_{1,k}|}{\lambda_{1,k}^2 - 1} \leq \frac{2\lambda_{1,k}^2 - 2 + |\lambda_{1,k}| + 1 + 1}{\lambda_{1,k}^2 - 1} =$$

$$= 2 + \frac{1}{|\lambda_{1,k}| - 1} + \frac{1}{|\lambda_{1,k}|^2 - 1} \leq 4$$

выполнено неравенство

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|\alpha_k|^2\,\lambda_{1,k}^2\,(2|\lambda_{1,k}|+1)^2}{(\lambda_{1,k}^2-1)^2}\,\|g_{1,k}\|^2 \leq 16\sum_{k=1}^{+\infty}|\alpha_k|^2\|g_{1,k}\|^2 = 16\|y\|^2 < \infty$$

что и требовалось доказать.

(d) Докажем, что <u>выполнено начальное условие $u(+0)=0$</u>

При доказательстве пункта (b) мы доказали, что

$$\frac{|\alpha_k|^2}{(\lambda_{1,k}^2-1)^2}\left|\left(\lambda_{1,k}e^{-i\lambda_{1,k}t}-\lambda_{1,k}\cos t+i\sin t\right)\right|^2\|g_{1,k}\|^2 \leq 4|\alpha_k|^2\|g_{1,k}\|^2$$

и ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty}4|\alpha_k|^2\|g_{1,k}\|^2$$

сходится. Поэтому по признаку Вейерштрасса ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{|\alpha_k|^2}{(\lambda_{1,k}^2-1)^2}\left|\left(\lambda_{1,k}e^{-i\lambda_{1,k}t}-\lambda_{1,k}\cos t+i\sin t\right)\right|^2\|g_{1,k}\|^2$$

сходится равномерно по t на $(0,+\infty)$

Следовательно,

$$\lim_{t\to+0}\|u(t)\|^2 = \lim_{t\to+0}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{|\alpha_k|^2}{(\lambda_{1,k}^2-1)^2}\left|\left(\lambda_{1,k}e^{-i\lambda_{1,k}t}-\lambda_{1,k}\cos t+i\sin t\right)\right|^2\|g_{1,k}\|^2 =$$

$$=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{|\alpha_k|^2}{(\lambda_{1,k}^2-1)^2}\lim_{t\to+0}\left|\left(\lambda_{1,k}e^{-i\lambda_{1,k}t}-\lambda_{1,k}\cos t+i\sin t\right)\right|^2\|g_{1,k}\|^2 = 0$$

что и требовалось доказать.

(e) Докажем, что <u>ряд</u>

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\tilde{T}'_{1,k}(t)g_{1,k}$$

<u>сходится в $L_2(K)$</u>

Действительно,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |\tilde{T}'_{1,k}|^2 \|g_{1,k}\|^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|\alpha_k|^2}{(\lambda_{1,k}^2 - 1)^2} \left| \left(-i\lambda_{1,k}^2 e^{-i\lambda_{1,k}t} + \lambda_{1,k} \sin t + i \cos t \right) \right|^2 \|g_{1,k}\|^2 \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|\alpha_k|^2}{(\lambda_{1,k}^2 - 1)^2} (\lambda_{1,k}^2 + |\lambda_{1,k}| + 1)^2 \|g_{1,k}\|^2$$

В силу оценки

$$\frac{\lambda_{1,k}^2 + |\lambda_{1,k}| + 1}{\lambda_{1,k}^2 - 1} = \frac{\lambda_{1,k}^2 - 1 + |\lambda_{1,k}| + 1 + 1}{\lambda_{1,k}^2 - 1} = 1 + \frac{1}{|\lambda_{1,k}| - 1} + \frac{1}{\lambda_{1,k}^2 - 1} \leq 3$$

выполнено неравенство

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|\alpha_k|^2}{(\lambda_{1,k}^2 - 1)^2} (\lambda_{1,k}^2 + |\lambda_{1,k}| + 1)^2 \|g_{1,k}\|^2 \leq 9 \sum_{k=1}^{+\infty} |\alpha_k|^2 \|g_{1,k}\|^2 = 9\|y\|^2 < \infty$$

что и требовалось доказать.

(f) Докажем, что производная $u'(t)$ в $L_2(K)$ равна сумме ряда

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \tilde{T}'_{1,k}(t) g_{1,k}$$

В силу определения производной в пространстве $L_2(K)$ для этого нужно доказать, что справедливо равенство:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left\| \frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t} - \sum_{k=1}^{+\infty} \tilde{T}'_{1,k}(t) g_{1,k} \right\|^2 = 0$$

Воспользовавшись равенством Парсеваля, преобразуем выражение, стоящее под знаком предела

$$\left\| \frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t} - \sum_{k=1}^{+\infty} \tilde{T}'_{1,k}(t) g_{1,k} \right\|^2 =$$

$$= \left\| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\tilde{T}_{1,k}(t+\Delta t) - \tilde{T}_{1,k}(t)}{\Delta t}\; g_{1,k} - \sum_{k=1}^{+\infty} \tilde{T}'_{1,k}(t) g_{1,k} \right\|^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \left| \frac{\tilde{T}_{1,k}(t+\Delta t) - \tilde{T}_{1,k}(t)}{\Delta t} - \tilde{T}'_{1,k}(t) \right|^2 \|g_{1,k}\|^2$$

По теореме Лагранжа о среднем для каждого k существует такое $\xi_k \in (t, t+\Delta t)$, что

$$\tilde{T}_{1,k}(t+\Delta t) - \tilde{T}_{1,k}(t) = \tilde{T}'_{1,k}(\xi_k)\Delta t$$

Поэтому

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left| \frac{\tilde{T}_{1,k}(t+\Delta t) - \tilde{T}_{1,k}(t)}{\Delta t} - \tilde{T}'_{1,k}(t) \right|^2 \|g_{1,k}\|^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \left| \tilde{T}'_{1,k}(\xi_k) - \tilde{T}'_{1,k}(t) \right|^2 \|g_{1,k}\|^2 \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\left|\tilde{T}'_{1,k}(\xi_k)\right| + \left|\tilde{T}'_{1,k}(t)\right| \right)^2 \|g_{1,k}\|^2$$

Оценим общий член этого ряда сверху, воспользовавшись оценкой

$$\left|\tilde{T}'_{1,k}(t)\right| \leq 3|\alpha_k|$$

полученной при доказательстве пункта (e):

$$\left(\left|\tilde{T}'_{1,k}(\xi_k)\right| + \left|\tilde{T}'_{1,k}(t)\right| \right)^2 \|g_{1,k}\|^2 \leq 36|\alpha_k|^2 \|g_{1,k}\|^2$$

Поскольку

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 36|\alpha_k|^2 \|g_{1,k}\|^2 = 36\|y\|^2 < \infty,$$

то по признаку Вейерштрасса ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left| \tilde{T}'_{1,k}(\xi_k) - \tilde{T}'_{1,k}(t) \right|^2 \|g_{1,k}\|^2$$

сходится равномерно по Δt, и справедливо равенство

$$\lim_{\Delta t \to 0} \sum_{k=1}^{+\infty} \left| \tilde{T}'_{1,k}(\xi_k) - \tilde{T}'_{1,k}(t) \right|^2 \|g_{1,k}\|^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \lim_{\Delta t \to 0} \left|\tilde{T}'_{1,k}(\xi_k) - \tilde{T}'_{1,k}(t)\right|^2 \|g_{1,k}\|^2 = 0$$

Следовательно,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left\| \frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t} - \sum_{k=1}^{+\infty} \tilde{T}'_{1,k}(t) g_{1,k} \right\|^2 = 0$$

что и требовалось доказать.

Поскольку все необходимые проверки мы выполнили, то можно утверждать, что функция

$$u(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha_k}{\lambda_{1,k}^2 - 1} \left(\lambda_{1,k} e^{-i\lambda_{1,k} t} - \lambda_{1,k} \cos t + i \sin t \right) g_{1,k}$$

является решением начально-краевой задачи (15).

Решение задачи 1 завершено.

На следующем дистанционном занятии мы разберем пример решения начально-краевой задачи для замыкания оператора Лапласа в секторе.

Спасибо за внимание.
Не болейте!