Обобщенная задача Коши для трехмерного волнового уравнения. Примеры решения задач

Самарова С.С.

ФОПФ, 3 курс, УМФ

Учебное пособие для дистанционных занятий

В этом пособии для дистанционного занятия мы найдём функцию Грина трехмерного волнового оператора и рассмотрим примеры решения обобщенных задач Коши для трехмерного волнового уравнения.

Постановка обобщенной задачи Коши для трехмерного волнового уравнения

Пусть $a > 0$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ и обобщенная функция $f(t,x) \in S'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$ такова, что ее носитель содержится в полупространстве

$$\{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 : t \geqslant 0,\, x \in \mathbb{R}^3\}$$

Будем использовать обозначение

$$\Delta_x = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

Определение 1 *Обобщённой задачей Коши для трехмерного волнового уравнения*

$$u_{tt} - a^2 \Delta_x u = f(t,x), \quad t \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}^3, \tag{1}$$

называют задачу, в которой требуется найти решения $u(t,x) \in S'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ *уравнения* (1), *у которых носители содержатся в полупространстве*

$$\{(t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 : \, t \geqslant 0, \, x \in \mathbb{R}^3\} \tag{2}$$

Определение 2 *Оператор*

$$\Box_a = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta_x$$

стоящий в левой части уравнения (1), *называют трехмерным оператором Даламбера*.

Вычисление функции Грина трехмерного оператора Даламбера

Задача 1 *Найти в* $S'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ *функцию Грина* $\mathcal{E}(t,x)$ *оператора Даламбера*

$$\Box_a = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta_x$$

удовлетворяющую условию $\operatorname{supp}\mathcal{E}(t,x) \subset \{(t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 : \, t \geqslant 0, \, x \in \mathbb{R}^3\}$.

Решение.

Функция $\mathcal{E}(t,x)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} - a^2 \Delta_x \mathcal{E} = \delta(t,x)$$

Возьмем преобразование Фурье по x

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} F_x\big[\mathcal{E}\big] - a^2\Big((-i\xi_1)^2 + (-i\xi_2)^2 + (-i\xi_3)^2\Big)F_x\big[\mathcal{E}\big] = \delta(t)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} F_x\big[\mathcal{E}\big] + a^2|\xi|^2 F_x\big[\mathcal{E}\big] = \delta(t)$$

Обозначив $g(t,\xi) = F_x\big[\mathcal{E}\big](t,\xi)$, получим уравнение

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} + a^2|\xi|^2 g = \delta(t) \tag{3}$$

При поиске функции Грина одномерного волнового оператора мы выяснили, что при каждом фиксированном ξ уравнение (3) имеет единственное решение

$$g(t,\xi) = \theta(t)\frac{\sin(a|\xi|t)}{a|\xi|}$$

носитель которого входит в множество $t \geqslant 0$.

Докажем, что обобщённая функция $g(t,\xi)$ будет решением уравнения (3) и в $S'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$.

Для любой основной функции $\varphi(t,\xi) \in S(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ справедливы равенства

$$\big\langle g_{tt}\,,\,\varphi\big\rangle = \big\langle g\,,\,\varphi_{tt}\big\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^4} \theta(t)\,\frac{\sin\big(a|\xi|t\big)}{a|\xi|}\,\varphi_{tt}\,dtd\xi$$

В силу абсолютной интегрируемости подынтегральной функции получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^4} \theta(t)\,\frac{\sin\big(a|\xi|t\big)}{a|\xi|}\,\varphi_{tt}\,dtd\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^3} d\xi \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin\big(a|\xi|t\big)}{a|\xi|}\,\varphi_{tt}\,dt =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^3} d\xi \left(\frac{\sin\big(a|\xi|t\big)}{a|\xi|}\,\varphi_t \Bigg|_0^{+\infty} - \int\limits_0^{+\infty} \cos\big(a|\xi|t\big)\,\varphi_t\,dt \right) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^3} d\xi \left(-\cos\big(a|\xi|t\big)\,\varphi\,\Big|_0^{+\infty} - \int\limits_0^{+\infty} a|\xi|\sin\big(a|\xi|t\big)\,\varphi\,dt \right) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^3} d\xi \left(\varphi(0,\xi) - a^2|\xi|^2 \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\big(a|\xi|t\big)}{a|\xi|}\,\varphi\,dt \right) = \big\langle \delta(t) - a^2|\xi|^2 g\,,\,\varphi\big\rangle$$

Доказано.

Теперь для того, чтобы найти функцию Грина, остается вычислить обратное преобразование Фурье

$$\mathcal{E}(t,x) = F_\xi^{-1}[g](t,x) = F_\xi^{-1}\left[\theta(t)\,\frac{\sin\big(a|\xi|t\big)}{a|\xi|}\right](t,x)$$

Ранее при решении задания 1.23 б) была получена формула

$$F_x\left[\frac{\delta(at-|x|)}{|x|}\right](t,\xi)=\frac{4\pi\theta(t)\sin\big(at|\xi|\big)}{|\xi|}$$

(см. пособие для дистанционного занятия «О замене переменной в аргументе дельта-функции»). Также при решении задания 1.23 б) было установлено, что для любой основной функции $\varphi(t,x)\in S(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ выполнено равенство

$$\left\langle\frac{\delta(at-|x|)}{|x|}\,,\,\varphi(t,x)\right\rangle=\int\limits_0^{+\infty}dt\int\limits_{|x|=at}\frac{1}{at}\,\varphi\,(t,x)\;dS_x$$

правую часть которого можно переписать в виде

$$\int\limits_0^{+\infty}dt\int\limits_{|x|=at}\frac{1}{at}\,\varphi\,(t,x)\;dS_x=\left\langle\frac{\theta(t)}{at}\;\delta_{S_{at}}(x)\,,\,\varphi(t,x)\right\rangle$$

Поэтому

$$\mathcal{E}(t,x)=F_\xi^{-1}\left[\theta(t)\;\frac{\sin\big(a|\xi|t\big)}{a|\xi|}\right](t,x)=\frac{\delta(at-|x|)}{4\pi a|x|}=\frac{\theta(t)}{4\pi a^2t}\;\delta_{S_{at}}(x)$$

Ответ. $\qquad \mathcal{E}(t,x)=\dfrac{\theta(t)}{4\pi a^2t}\;\delta_{S_{at}}(x)$

Свойства решений обобщенных задач Коши для трехмерных волновых уравнений

На лекциях доказаны следующие свойства решений обобщенных задач Коши для трехмерных волновых уравнений.

Свойство 1. Для любой обобщенной функции $f\in S'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$, носитель которой содержится в полупространстве

$$\{(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3:\,t\geqslant 0\}\,,$$

существует свертка $f*\mathcal{E}$.

По свойствам сверток обобщенных функций эта свертка $f * \mathcal{E}$ является обобщенным решением уравнения

$$\Box_a u = f, \quad t \geqslant 0 \tag{4}$$

Свойство 2. Свертка $f * \mathcal{E}$ является единственным решением обобщенной задачи Коши для уравнения (4), поскольку, как мы выяснили при решении задачи 1, соответствующее однородное уравнение не имеет ненулевых решений с носителями в полупространстве $\{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3,\, t \geqslant 0\}$.

Свойство 3. В случае, когда функции $u_0(x)$, $u_1(x)$, $f(x,t)$ являются функциями медленного роста, классическую задачу Коши для трехмерного волнового уравнения

$$\begin{aligned}
&u_{tt} - a^2 \Delta_x u = f(t,x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^3, \\
&u|_{t=0} = u_0(x), \\
&u_t|_{t=0} = u_1(x).
\end{aligned}$$

можно свести к решению обобщенной задачи Коши для трехмерного волнового уравнения

$$u_{tt}(t,x) = a^2 \Delta_x u(t,x) + f(t,x) + \delta'(t)\, u_0(x) + \delta(t)\, u_1(x)$$

Доказательство этого утверждения практически дословно совпадает с доказательством, проведенным для одномерного волнового уравнения.

Выведем еще одну полезную и удобную формулу, часто применяемую при решении задач.

Свойство 4. Для любой основной функции $\varphi(t,x) \in S(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$ выполнено равенство

$$\Big\langle \mathcal{E}(t,x)\,,\, \varphi(t,x) \Big\rangle = \frac{1}{4\pi a^2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi\left(\frac{|x|}{a}, x\right)}{|x|} dx \tag{5}$$

Доказательство.

$$\Big\langle \mathcal{E}(t,x)\,,\, \varphi(t,x) \Big\rangle = \Big\langle \frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t}\, \delta_{S_{at}}(x)\,,\, \varphi(t,x) \Big\rangle = \frac{1}{4\pi a^2} \int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{t} \int\limits_{|x|=at} \varphi\,(t,x)\; dS_x$$

В результате замены переменной $s = at$ во внешнем интеграле получаем

$$\frac{1}{4\pi a^2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{dt}{t}\int\limits_{|x|=at}\varphi(t,x)\,dS_x = \frac{1}{4\pi a^2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{ds}{s}\int\limits_{|x|=s}\varphi\left(\frac{s}{a},x\right)dS_x =$$

$$= \frac{1}{4\pi a^2}\int\limits_0^{+\infty}ds\int\limits_{|x|=s}\frac{\varphi\left(\frac{|x|}{a},x\right)}{|x|}\,dS_x = \frac{1}{4\pi a^2}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{\varphi\left(\frac{|x|}{a},x\right)}{|x|}\,dx$$

В последнем равенстве была применена теорема Фубини, т.к. подынтегральная функция является абсолютно интегрируемой.

Формула (5) доказана.

Примеры решения трехмерных обобщенных задач Коши

Замечание. При решении обобщенных задач Коши для трехмерного волнового уравнения вычислять функцию Грина оператора Даламбера не требуется, нужно использовать готовую формулу, полученную в задаче 1.

Задача 2 (задание 2.12 д)) *Решить обобщенную задачу Коши*

$$u_{tt} - \Delta_x u = \theta(t)\delta(x) + \delta(t)|x| \quad t \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}^3$$

Решение. Искомое решение будет сверткой правой части уравнения с функцией Грина для оператора Даламбера

$$u(t,x) = \Big(\theta(t)\delta(x) + \delta(t)|x|\Big) * \left(\frac{1}{4\pi t}\,\delta_{S_t}(x)\right) =$$

$$= \Big(\theta(t)\delta(x)\Big) * \left(\frac{1}{4\pi t}\,\delta_{S_t}(x)\right) + \Big(\delta(t)|x|\Big) * \left(\frac{1}{4\pi t}\,\delta_{S_t}(x)\right)$$

1. Найдем сначала первую свертку. По определению свертки обобщенных функций для любой основной функции $\varphi(t,x) \in S(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ и любой 1-срезки $\eta_1(t,x)$ должно быть выполнено равенство

$$\left\langle \Big(\theta(t)\delta(x)\Big) * \left(\frac{1}{4\pi t}\,\delta_{S_t}(x)\right),\, \varphi(t,x)\right\rangle =$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \left\langle \theta(t)\delta(x)\,,\, \eta_1\left(\frac{t}{R}, \frac{x}{R}\right) \left\langle \frac{1}{4\pi\tau}\,\delta_{S_\tau}(y)\,,\, \varphi(t+\tau, x+y)\right\rangle\right\rangle =$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt\,\theta(t)\,\eta_1\left(\frac{t}{R}, 0\right) \left\langle \frac{1}{4\pi\tau}\,\delta_{S_\tau}(y)\,,\, \varphi(t+\tau, y)\right\rangle$$

Применяя «полезную формулу» (5) из свойства 4, находим

$$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt\,\theta(t)\,\eta_1\left(\frac{t}{R}, 0\right) \left\langle \frac{1}{4\pi\tau}\,\delta_{S_\tau}(y)\,,\, \varphi(t+\tau, y)\right\rangle =$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt\,\theta(t)\,\eta_1\left(\frac{t}{R}, 0\right) \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi\left(t+|y|, y\right)}{|y|} dy =$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt \int\limits_{\mathbb{R}^3} \theta(t)\,\eta_1\left(\frac{t}{R}, 0\right) \frac{\varphi\left(t+|y|, y\right)}{4\pi|y|} dy \qquad (6)$$

Оценим подынтегральную функцию. Для этого, воспользовавшись ограниченностью 1-срезки и свойствами функции $\varphi(s,z) \in S(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$, получаем, что $\exists M>0 \quad \exists A>0$ такие, что

$$\left|\eta_1\left(\frac{t}{R}, 0\right)\right| \leqslant M$$

$$|\varphi(s,z)| \leqslant \frac{A}{(1+s^2)(1+|z|^4)}$$

Кроме того, заметим, что подынтегральная функция в формуле (6) может быть отлична от нуля лишь при $t>0$, поэтому

$$\left|\theta(t)\,\eta_1\left(\frac{t}{R}, 0\right) \frac{\varphi\left(t+|y|, y\right)}{4\pi|y|}\right| \leqslant \frac{M\cdot A}{4\pi|y|(1+(t+|y|)^2)(1+|y|^4)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M\cdot A}{4\pi|y|(1+t^2)(1+|y|^4)}$$

Поскольку полученная оценка не зависит от R и является абсолютно интегрируемой функцией по всем переменным, то к интегралу (6) можно применять и теорему Фубини, и теорему Лебега об ограниченной сходимости. Таким образом,

$$\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt \int\limits_{\mathbb{R}^3} \theta(t)\,\eta_1\left(\frac{t}{R},0\right)\frac{\varphi\,(t+|y|,y)}{4\pi|y|}\,dy =$$

$$= \lim_{R\to+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^4} \theta(t)\,\eta_1\left(\frac{t}{R},0\right)\frac{\varphi\,(t+|y|,y)}{4\pi|y|}\,dtdy = \int\limits_{\mathbb{R}^4} \theta(t)\,\frac{\varphi\,(t+|y|,y)}{4\pi|y|}\,dtdy$$

Сделав во внутреннем интеграле замену переменных

$$\begin{cases} s = t+|y|, \\ z = y, \end{cases} \qquad |J| = 1,$$

получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^4} \theta(t)\,\frac{\varphi\,(t+|y|,y)}{4\pi|y|}\,dtdy = \int\limits_{\mathbb{R}^4} \theta(s-|z|)\,\frac{\varphi\,(s,z)}{4\pi|z|}\,dsdz = \left\langle \frac{\theta(s-|z|)}{4\pi|z|}\,,\,\varphi(s,z)\right\rangle$$

2. Теперь найдем вторую свертку. По определению свертки для любой основной функции $\varphi(t,x)\in S(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ и любой 1-срезки $\eta_1(t,x)$ выполнено равенство

$$\left\langle \Big(\delta(t)|x|\Big) * \left(\frac{1}{4\pi t}\,\delta_{S_t}(x)\right),\,\varphi(t,x)\right\rangle =$$

$$= \lim_{R\to+\infty}\left\langle \delta(t)|x|\,,\,\eta_1\left(\frac{t}{R},\frac{x}{R}\right)\left\langle \frac{1}{4\pi\tau}\,\delta_{S_\tau}(y)\,,\,\varphi(t+\tau,x+y)\right\rangle\right\rangle =$$

$$= \lim_{R\to+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dx\,|x|\,\eta_1\left(0,\frac{x}{R}\right)\left\langle \frac{1}{4\pi\tau}\,\delta_{S_\tau}(y)\,,\,\varphi(\tau,x+y)\right\rangle =$$

Применяя «полезную формулу» (5) из свойства 4, находим

$$\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dx\,|x|\,\eta_1\left(0,\frac{x}{R}\right)\left\langle\frac{1}{4\pi\tau}\,\delta_{S_\tau}(y)\,,\,\varphi(\tau,x+y)\right\rangle=$$

$$=\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dx\,|x|\,\eta_1\left(0,\frac{x}{R}\right)\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{\varphi\left(|y|,x+y\right)}{4\pi|y|}\,dy=$$

$$=\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dx\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{\varphi\left(|y|,x+y\right)}{4\pi|y|}\,|x|\,\eta_1\left(0,\frac{x}{R}\right)dy \tag{7}$$

Сделаем оценки, необходимые для применения теоремы Лебега об ограниченной сходимости и теоремы Фубини.

Поскольку $\varphi(s,z)\in S(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$, то для любого многочлена $P(s,|z|)$ существует такое число $A>0$, что для всех $(s,z)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ выполнено неравенство

$$|P(s,|z|)\varphi(s,z)|\leqslant A$$

Для выбора подходящего многочлена обозначим

$$z=x+y,\quad s=|y|,$$

тогда

$$(1+|x|^6)(1+|y|^4)=(1+|z-y|^6)(1+|y|^4)\leqslant\left(1+(|z|+|y|)^6\right)(1+|y|^4)=$$

$$=\left(1+(|z|+s)^6\right)(1+s^4)$$

Полагая

$$P(s,|z|)=\left(1+(|z|+s)^6\right)(1+s^4)\,,$$

получаем оценку

$$|\varphi(s,z)|\leqslant\frac{A}{\left(1+(|z|+s)^6\right)(1+s^4)}$$

Следовательно,

$$|\varphi(|y|,x+y)|\leqslant\frac{A}{(1+|x|^6)\,(1+|y|^4)}$$

С учетом ограниченности 1-срезки

$$\left|\eta_1\left(0,\frac{x}{R}\right)\right| \leqslant M$$

получаем окончательную оценку

$$\left|\frac{\varphi\left(|y|, x+y\right)}{4\pi|y|}\,|x|\,\eta_1\left(0,\frac{x}{R}\right)\right| \leqslant \frac{AM|x|}{4\pi|y|\left(1+|x|^6\right)\left(1+|y|^4\right)}$$

Поскольку полученная оценка не зависит от R и является абсолютно интегрируемой функцией по всем переменным, то к интегралу (7) можно применять и теорему Фубини, и теорему об ограниченной сходимости.

Таким образом,

$$\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dx \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi\left(|y|, x+y\right)}{4\pi|y|}\,|x|\,\eta_1\left(0,\frac{x}{R}\right) dy =$$

$$= \lim_{R\to+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} \frac{\varphi\left(|y|, x+y\right)}{4\pi|y|}\,|x|\,\eta_1\left(0,\frac{x}{R}\right) dxdy = \int\limits_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} \frac{\varphi\left(|y|, x+y\right)}{4\pi|y|}\,|x|\,dxdy$$

Сделав в интеграле замену переменных

$$\begin{cases} u = x+y, \\ v = y \end{cases} \qquad |J| = 1,$$

получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} \frac{\varphi\left(|y|, x+y\right)}{4\pi|y|}\,|x|\,dxdy = \int\limits_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} \frac{\varphi\left(|v|, u\right)}{4\pi|v|}\,|u-v|\,dudv =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^3} du \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi\left(|v|, u\right)}{4\pi|v|}\,|u-v|\,dv = \int\limits_{\mathbb{R}^3} du \int\limits_{0}^{+\infty} dt \int\limits_{|v|=t} \frac{\varphi\left(t, u\right)}{4\pi t}\,|u-v|\,dS_v =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^4} du\,dt\,\frac{\theta(t)}{4\pi t}\,\varphi\left(t,u\right) \int\limits_{|v|=t} |u-v|\,dS_v \tag{8}$$

Вычислим внутренний интеграл. С этой целью параметризуем сферу $|v| = t$ так, чтобы угол θ был углом между векторами u и v и запишем модуль вектора $|u-v|$ по теореме косинусов

$$|u-v| = \sqrt{|u|^2 + |v|^2 - 2|u|\,|v|\cos\theta}$$

Тогда

$$\int\limits_{|v|=t} |u-v|\,dS_v = \int\limits_0^{2\pi} d\psi \int\limits_0^{\pi} \sqrt{|u|^2 + t^2 - 2|u|\,t\cos\theta}\; t^2 \sin\theta d\theta =$$

$$= 2\pi t^2\, \frac{\left(|u|^2 + t^2 - 2|u|\,t\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}}{3|u|t}\Bigg|_0^{\pi} = \frac{2\pi t}{3|u|}\left((|u|+t)^3 - \big||u|-t\big|^3\right)$$

Подставляя полученный результат в формулу (8)

$$\int\limits_{\mathbb{R}^4} du\,dt\,\frac{\theta(t)}{4\pi t}\,\varphi\,(t,u) \int\limits_{|v|=t} |u-v|\,dS_v =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^4} \frac{\theta(t)}{4\pi t}\cdot\frac{2\pi t}{3|u|}\left((|u|+t)^3 - \big||u|-t\big|^3\right)\,\varphi\,(t,u)\;du\,dt =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^4} \frac{\theta(t)}{6|u|}\left((|u|+t)^3 - \big||u|-t\big|^3\right)\,\varphi\,(t,u)\;du\,dt =$$

$$= \left\langle \frac{\theta(t)}{6|u|}\left((|u|+t)^3 - \big||u|-t\big|^3\right)\,,\,\varphi(t,u)\right\rangle$$

получаем окончательный ответ в задаче

$$u(t,x) = \frac{\theta(t-|x|)}{4\pi|x|} + \frac{\theta(t)}{6|x|}\left((|x|+t)^3 - \big||x|-t\big|^3\right)$$

Ответ. $\qquad u(t,x) = \dfrac{\theta(t-|x|)}{4\pi|x|} + \dfrac{\theta(t)}{6|x|}\left((|x|+t)^3 - \big||x|-t\big|^3\right)$

Решим еще одну задачу из письменной экзаменационной работы 2016/2017 учебного года.

Задача 3 *В пространстве* $S(\mathbb{R}^4)$ *решить обобщенную задачу Коши*

$$u_{tt} - \Delta_x u = \theta(t-1)\delta_S(x) \quad t \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

где $\delta_S(x)$ *– дельта-функция на сфере, действующая на основные функции* $\varphi(x) \in S(\mathbb{R}^3)$ *по формуле*

$$\Big\langle \delta_S(x)\,,\, \varphi(x) \Big\rangle = \int\limits_{|x|=1} \varphi(x)\, dS\,.$$

Решение. Искомым решением обобщенной задачи Коши является свертка правой части уравнения с функцией Грина трехмерного оператора Даламбера

$$u(t,x) = \Big(\theta(t-1)\delta_S(x)\Big) * \left(\frac{1}{4\pi t}\,\delta_{S_t}(x)\right)$$

По определению свертки обобщенных функций для любой основной функции $\varphi(t,x) \in S(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ и любой 1-срезки $\eta_1(t,x)$ должно быть выполнено равенство

$$\left\langle \Big(\theta(t-1)\delta_S(x)\Big) * \left(\frac{1}{4\pi t}\,\delta_{S_t}(x)\right),\, \varphi(t,x) \right\rangle =$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \left\langle \theta(t-1)\delta_S(x)\,,\, \eta_1\left(\frac{t}{R},\frac{x}{R}\right) \left\langle \frac{1}{4\pi\tau}\,\delta_{S_\tau}(y)\,,\, \varphi(t+\tau,x+y) \right\rangle \right\rangle =$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt \int\limits_{|x|=1} dS_x\, \theta(t-1)\, \eta_1\left(\frac{t}{R},\frac{x}{R}\right) \left\langle \frac{1}{4\pi\tau}\,\delta_{S_\tau}(y)\,,\, \varphi(t+\tau,x+y) \right\rangle \Bigg\rangle$$

Применяя «полезную формулу» (5) из свойства 4, находим

$$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt \int\limits_{|x|=1} dS_x\, \theta(t-1)\, \eta_1\left(\frac{t}{R},\frac{x}{R}\right) \left\langle \frac{1}{4\pi\tau}\,\delta_{S_\tau}(y)\,,\, \varphi(t+\tau,x+y) \right\rangle \Bigg\rangle =$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt \int\limits_{|x|=1} dS_x \, \theta(t-1) \, \eta_1\left(\frac{t}{R}, \frac{x}{R}\right) \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi\,(t+|y|, x+y)}{|y|} dy =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt \int\limits_{|x|=1} dS_x \int\limits_{\mathbb{R}^3} \theta(t-1) \, \eta_1\left(\frac{t}{R}, \frac{x}{R}\right) \; \frac{\varphi\,(t+|y|, x+y)}{|y|} dy \qquad (9)$$

Теперь оценим подынтегральную функцию. Для этого, воспользовавшись ограниченностью 1-срезки и свойствами функции $\varphi \in S(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$, получаем, что $\exists M > 0 \quad \exists A > 0$ такие, что

$$\left| \, \eta_1\left(\frac{t}{R}, \frac{x}{R}\right) \right| \leqslant M$$

$$|\varphi\,(t+|y|, x+y)| \leqslant \frac{A}{\left(1+(t+|y|)^2\right)^3}$$

Кроме того, заметим, что подынтегральная функция в формуле (9) может быть отлична от нуля лишь при $t > 1$, поэтому выполнены неравенства

$$t+|y| \geqslant t > 0 \quad \Rightarrow \quad 1+(t+|y|)^2 \geqslant 1+t^2$$

$$t+|y| \geqslant |y| \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad 1+(t+|y|)^2 \geqslant 1+|y|^2$$

Следовательно,

$$\left| \theta(t-1) \, \eta_1\left(\frac{t}{R}, \frac{x}{R}\right) \; \frac{\varphi\,(t+|y|, x+y)}{|y|} \right| \leqslant \frac{M\cdot A}{|y| \left(1+(t+|y|)^2\right)^3} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M\cdot A}{|y|(1+t^2)(1+|y|^2)^2}$$

Поскольку полученная оценка не зависит от R и является абсолютно интегрируемой функцией по всем переменным, то к интегралу (9) можно применять и теорему Фубини, и теорему Лебега об ограниченной сходимости. Таким образом,

$$\frac{1}{4\pi}\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dt\int\limits_{|x|=1}dS_x\int\limits_{\mathbb{R}^3}\theta(t-1)\,\eta_1\left(\frac{t}{R},\frac{x}{R}\right)\;\frac{\varphi\,(t+|y|,x+y)}{|y|}dy=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}\times\{|x|=1\}\times\mathbb{R}^3}\theta(t-1)\,\eta_1\left(\frac{t}{R},\frac{x}{R}\right)\;\frac{\varphi\,(t+|y|,x+y)}{|y|}\,dt\,dS_x\,dy=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}\times\{|x|=1\}\times\mathbb{R}^3}\theta(t-1)\;\frac{\varphi\,(t+|y|,x+y)}{|y|}\,dt\,dS_x\,dy$$

Сделав в интеграле замену переменных

$$\begin{cases} s=t+|y|, \\ z=y+x, \qquad\qquad |J|=1, \\ u=x, \end{cases}$$

получим

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}\times\{|x|=1\}\times\mathbb{R}^3}\theta(t-1)\;\frac{\varphi\,(t+|y|,x+y)}{|y|}\,dt\,dS_x\,dy=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}\times\{|u|=1\}\times\mathbb{R}^3}\theta(s-|z-u|-1)\;\frac{\varphi\,(s,z)}{|z-u|}\,ds\,dS_u\,dz=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^3}dz\int\limits_{-\infty}^{+\infty}ds\,\varphi\,(s,z)\int\limits_{|u|=1}\frac{\theta(s-|z-u|-1)}{|z-u|}\,dS_u$$

Для вычисления внутреннего интеграла параметризуем сферу $|u|=1$ так, чтобы угол θ был углом между векторами z и u и запишем модуль вектора $|z-u|$ по теореме косинусов

$$|z-u|=\sqrt{|z|^2+1-2|z|\,\cos\theta}$$

Кроме того, учтем условие неотрицательности аргумента функции $\theta(s-|z-u|-1):$

$$s-|z-u|-1\geqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad s-1\geqslant |z-u| \quad\Leftrightarrow\quad (s-1)^2\geqslant |z-u|^2 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad (s-1)^2\geqslant |z|^2+1-2|z|\,\cos\theta \quad\Leftrightarrow\quad \cos\theta\geqslant\frac{|z|^2+1-(s-1)^2}{2|z|}$$

Выясним, при каких s и z выполнено неравенство

$$\frac{|z|^2+1-(s-1)^2}{2|z|}\geqslant -1 \quad\Leftrightarrow\quad |z|^2+1-(s-1)^2\geqslant -2|z| \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad (|z|+1)^2\geqslant (s-1)^2 \quad\Leftrightarrow\quad |z|+2\geqslant s$$

Кроме того,

$$\frac{|z|^2+1-(s-1)^2}{2|z|}\leqslant 1 \quad\Leftrightarrow\quad |z|^2+1-(s-1)^2\leqslant 2|z| \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad (|z|-1)^2\leqslant (s-1)^2 \quad\Leftrightarrow\quad ||z|-1|\leqslant s-1 \quad\Leftrightarrow\quad s\geqslant 1+||z|-1|$$

Поэтому

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dz\int\limits_{-\infty}^{+\infty} ds\,\varphi\,(s,z)\int\limits_{|u|=1}\frac{\theta(s-|z-u|-1)}{|z-u|}\,dS_u=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dz\left(\int\limits_{1+||z|-1|}^{|z|+2} ds\,\varphi\,(s,z)\int\limits_0^{2\pi} d\psi\int\limits_0^{\arccos\frac{|z|^2+1-(s-1)^2}{2|z|}}\frac{\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{|z|^2+1-2|z|\,\cos\theta}}+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{|z|+2}^{+\infty} ds\,\varphi\,(s,z)\int\limits_0^{2\pi} d\psi\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{|z|^2+1-2|z|\,\cos\theta}}\right)=$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dz \left(\int\limits_{1+||z|-1|}^{|z|+2} ds\, \varphi\left(s, z\right) \left.\frac{\sqrt{|z|^2+1-2|z|\ \cos\theta}}{|z|}\right|_0^{\arccos\frac{|z|^2+1-(s-1)^2}{2|z|}} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{|z|+2}^{+\infty} ds\, \varphi\left(s, z\right) \left.\frac{\sqrt{|z|^2+1-2|z|\ \cos\theta}}{|z|}\right|_0^{\pi} \right) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^3} dz\, \frac{1}{2|z|} \left(\int\limits_{1+||z|-1|}^{|z|+2} ds\, \varphi\left(s, z\right) \Big(s - 1 - \big||z|-1\big|\Big) + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{|z|+2}^{+\infty} ds\, \varphi\left(s, z\right) \Big(|z| + 1 - \big||z|-1\big|\Big) \right) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^4} \frac{1}{2|z|} \Bigg(\Big(s - 1 - \big||z|-1\big|\Big)\theta\big(|z|+2-s\big)\theta\Big(s - 1 - \big||z|-1\big|\Big) +$$

$$+ \Big(|z| + 1 - \big||z|-1\big|\Big)\theta\big(s - |z| - 2\big)\Bigg)\, \varphi\left(s, z\right)\, dz ds$$

Таким образом, получаем окончательный ответ в задаче

$$u(t, x) = \frac{1}{2|x|} \Bigg(\Big(t - 1 - \big||x|-1\big|\Big)\theta\big(|x|+2-t\big)\theta\Big(t - 1 - \big||x|-1\big|\Big) +$$

$$+ \Big(|x| + 1 - \big||x|-1\big|\Big)\theta\big(t - |x| - 2\big)\Bigg)$$

Ответ.

$$u(t, x) = \frac{1}{2|x|} \Bigg(\Big(t - 1 - \big||x|-1\big|\Big)\theta\big(|x|+2-t\big)\theta\Big(t - 1 - \big||x|-1\big|\Big) +$$

$$+ \Big(|x| + 1 - \big||x|-1\big|\Big)\theta\big(t - |x| - 2\big)\Bigg)$$

Спасибо за внимание.
Не болейте!