МФТИ
Московский Физико-Технический Институт

Обобщенная задача Коши для одномерного волнового уравнения. Примеры решения задач

Самарова С.С.

ФОПФ, 3 курс, УМФ

Учебное пособие для дистанционных занятий

В этом пособии для дистанционного занятия мы найдём функцию Грина одномерного волнового оператора и рассмотрим примеры решения обобщенных задач Коши для одномерного волнового уравнения.

Постановка обобщенной задачи Коши для одномерного волнового уравнения

Пусть $a > 0$ и обобщенная функция $f(x,t) \in S'(\mathbb{R}^2)$ такова, что ее носитель содержится в полуплоскости $\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : t \geqslant 0\}$.

Определение 1 *Обобщённой задачей Коши для одномерного волнового уравнения*

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(t,x), \quad t \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

называют задачу, в которой требуется найти решения $u(t,x) \in S'(\mathbb{R}^2)$ уравнения (1), у которых носители содержатся в полуплоскости

$$\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : t \geqslant 0\}.$$

Определение 2 *Оператор*

$$\Box_a = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

стоящий в левой части уравнения (1), называют одномерным оператором Даламбера.

Вычисление функции Грина одномерного оператора Даламбера

Задача 1 (задание 2.9) *Найти в* $S'(\mathbb{R}^2)$ *функцию Грина* $\mathcal{E}(t,x)$ *оператора Даламбера*

$$\Box_a = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

удовлетворяющую условию $\operatorname{supp} \mathcal{E}(t,x) \subset \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 :\, t \geqslant 0\}$.

Решение.

Функция $\mathcal{E}(t,x)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x^2} = \delta(t,x)$$

Возьмем преобразование Фурье по переменной x

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} F_x[\mathcal{E}] - a^2(-i\xi)^2 F_x[\mathcal{E}] = \delta(t)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} F_x[\mathcal{E}] + a^2\xi^2 F_x[\mathcal{E}] = \delta(t)$$

Обозначим $g(t,\xi) = F_x[\mathcal{E}]$ и для каждого фиксированного ξ решим уравнение

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} + a^2\xi^2 g = \delta(t) \qquad (2)$$

в $S'(\mathbb{R})$.

Сначала найдем частное решение уравнения (2). Для этого решим задачу Коши

$$
\begin{aligned}
&y'' + a^2\xi^2 y = 0,\\
&y(0) = 0,\\
&y'(0) = 1.
\end{aligned}
$$

Решая характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + a^2\xi^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm i a\xi$$

получаем

$$y = C_1 e^{ia\xi t} + C_2 e^{-ia\xi t}$$

Подставляем начальные условия

$$
\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ ia\xi C_1 - ia\xi C_2 = 1 \end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases} C_2 = -C_1 \\ C_1 = \dfrac{1}{2ia\xi} \end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases} C_1 = \dfrac{1}{2ia\xi} \\ C_2 = -\dfrac{1}{2ia\xi} \end{cases}
$$

Таким образом,

$$y = \frac{1}{2ia\xi}\, e^{ia\xi t} - \frac{1}{2ia\xi}\, e^{-ia\xi t}$$

и частное решение уравнения (2)

$$g_{\text{част}}(t,\xi) = \theta(t)\, \frac{1}{2ia\xi} e^{ia\xi t} - \theta(t)\, \frac{1}{2ia\xi} e^{-ia\xi t} = \theta(t)\, \frac{\sin(a\xi t)}{a\xi}$$

Теперь решим однородное уравнение

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} + a^2\xi^2 g = 0$$

Взяв преобразование Фурье по t, получим

$$(-i\tau)^2 F_t[g] + a^2\xi^2 F_t[g] = 0$$

$$(-\tau^2 + a^2\xi^2) F_t[g] = 0 \tag{3}$$

Поскольку $\tau_{1,2} = \pm a\xi$ являются нулями кратности 1 для многочлена

$$P(\tau) = -\tau^2 + a^2\xi^2$$

то все решения уравнения (3) имеют вид

$$F_t[g] = A\,\delta(\tau + a\xi) + B\,\delta(\tau - a\xi)$$

Тогда

$$g_{\text{одн}}(t,\xi) = F_\tau^{-1}\big[A\,\delta(\tau + a\xi) + B\,\delta(\tau - a\xi)\big] = \widehat{A}\,e^{ita\xi} + \widehat{B}\,e^{-ita\xi}$$

Итак, все решения уравнения (2)

$$g(t,\xi) = g_{\text{част}}(t,\xi) + g_{\text{одн}}(t,\xi) = \theta(t)\,\frac{\sin(a\xi t)}{a\xi} + \widehat{A}\,e^{ita\xi} + \widehat{B}\,e^{-ita\xi}$$

Поскольку по условию задачи нам нужно, чтобы $g(t,\xi) = 0$ при $t < 0$, то

$$\widehat{A} = \widehat{B} = 0$$

и мы находим единственную функцию, удовлетворяющую этому условию

$$g(t,\xi) = \theta(t)\,\frac{\sin(a\xi t)}{a\xi}$$

Покажем, что $g(t,\xi)$ будет решением уравнения (2) и в $S'(\mathbb{R}^2)$
Для любой основной функции $\varphi(t,\xi) \in S(\mathbb{R}^2)$ справедливы равенства

$$\big\langle g_{tt}\,,\,\varphi\big\rangle = \big\langle g\,,\,\varphi_{tt}\big\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \theta(t)\,\frac{\sin(a\xi t)}{a\xi}\,\varphi_{tt}\,dtd\xi$$

В силу абсолютной интегрируемости подынтегральной функции получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} \theta(t)\,\frac{\sin(a\xi t)}{a\xi}\,\varphi_{tt}\,dtd\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin(a\xi t)}{a\xi}\,\varphi_{tt}\,dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi \left(\frac{\sin(a\xi t)}{a\xi}\, \varphi_t \Big|_0^{+\infty} - \int\limits_0^{+\infty} \cos(a\xi t)\, \varphi_t \, dt \right) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi \left(- \cos(a\xi t)\, \varphi|_0^{+\infty} - \int\limits_0^{+\infty} a\xi \sin(a\xi t)\, \varphi \, dt \right) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi \left(\varphi(0,\xi) - a^2\xi^2 \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(a\xi t)}{a\xi}\, \varphi \, dt \right) = \left\langle \delta(t) - a^2\xi^2 g\,,\ \varphi \right\rangle$$

Доказано.

Теперь находим функцию Грина

$$\mathcal{E}(t,x) = F_\xi^{-1}[g](t,x) = F_\xi^{-1}\left[\theta(t)\, \frac{\sin(a\xi t)}{a\xi}\right](t,x) =$$

$$= \frac{\theta(t)}{a}\, F_\xi^{-1}\left[\frac{e^{ia\xi t} - e^{-ia\xi t}}{2i\xi} \right](t,x) =$$

$$= \frac{\theta(t)}{2ia}\left(F_\xi^{-1}\left[e^{ia\xi t}\, \mathcal{P}\frac{1}{\xi}\right](t,x) - F_\xi^{-1}\left[e^{-ia\xi t}\, \mathcal{P}\frac{1}{\xi}\right](t,x) \right) =$$

$$= \frac{\theta(t)}{2ia}\left(F_\xi^{-1}\left[\mathcal{P}\frac{1}{\xi}\right](t, x - at) - F_\xi^{-1}\left[\mathcal{P}\frac{1}{\xi}\right](t, x + at) \right)$$

Ранее было показано (см. задание 1.14 в)), что

$$F\left[\operatorname{sign} x\right](\xi) = 2i\mathcal{P}\frac{1}{\xi}$$

Поэтому

$$\mathcal{E}(t,x) = -\frac{\theta(t)}{4a}\big(\operatorname{sign}(x - at) - \operatorname{sign}(x + at)\big) = \frac{\theta(t)\, \theta\big(at - |x|\big)}{2a} = \frac{\theta\big(at - |x|\big)}{2a}$$

Ответ. $\qquad \mathcal{E}(t,x) = \dfrac{\theta\big(at - |x|\big)}{2a}$

Свойства решений обобщенных задач Коши для одномерных волновых уравнений

На лекциях доказаны следующие свойства решений обобщенных задач Коши для одномерных волновых уравнений.

Свойство 1. Для любой обобщенной функции $f \in S'(\mathbb{R}^2)$, носитель которой содержится в полуплоскости

$$\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : \, t \geqslant 0\},$$

существует свертка $f * \mathcal{E}$, носитель которой также содержится в полуплоскости

$$\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : \, t \geqslant 0\}.$$

По свойствам сверток обобщенных функций эта свертка $f * \mathcal{E}$ является обобщенным решением уравнения

$$\Box_a u = f, \quad t \geqslant 0. \tag{4}$$

Свойство 2. Свертка $f * \mathcal{E}$ является единственным решением обобщенной задачи Коши для уравнения (4), поскольку, как мы выяснили при решении задачи 1, соответствующее однородное уравнение не имеет ненулевых решений с носителями в полуплоскости $\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : \, t \geqslant 0\}$.

Свойство 3. Классическая задача Коши для одномерного волнового уравнения

$$\begin{aligned}
&u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(t,x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\
&u|_{t=0} = u_0(x), \\
&u_t|_{t=0} = u_1(x).
\end{aligned}$$

сводится к решению обобщенной задачи Коши для одномерного волнового уравнения в том случае, когда функции $u_0(x)$, $u_1(x)$, $f(x,t)$ являются функциями медленного роста.

Доказательство свойства 3.

Определим новые функции $U(t,x)$, $\widehat{u}_t(t,x)$, $\widehat{u}_{tt}(t,x)$, $F(t,x)$ по формулам

$$U(t,x) = \begin{cases} u(t,x) & \text{при } t \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ 0 & \text{при } t < 0,\ x \in \mathbb{R}, \end{cases} \qquad \widehat{u}_t(t,x) = \begin{cases} u_t(t,x) & \text{при } t \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ 0 & \text{при } t < 0,\ x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

$$\widehat{u}_{tt}(t,x) = \begin{cases} u_{tt}(t,x) & \text{при } t \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ 0 & \text{при } t < 0,\ x \in \mathbb{R}, \end{cases} \qquad F(t,x) = \begin{cases} f(t,x) & \text{при } t \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ 0 & \text{при } t < 0,\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Тогда, дифференцируя обобщенную функцию $\widehat{u}(t,x)$ по t, получаем

$$U_t(t,x) = \widehat{u}_t(t,x) + \delta(t)\, u_0(x)$$

$$U_{tt}(t,x) = \widehat{u}_{tt}(t,x) + \delta(t)\, u_1(x) + \delta'(t)\, u_0(x)$$

Поскольку $u(t,x)$ является решением классической задачи, то

$$\widehat{u}_{tt}(t,x) = \begin{cases} a^2 u_{xx}(t,x) + f(t,x) & \text{при } t \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ 0 & \text{при } t < 0,\ x \in \mathbb{R}, \end{cases} = a^2 U_{xx}(t,x) + F(t,x)$$

Следовательно,

$$U_{tt}(t,x) = a^2 U_{xx}(t,x) + F(t,x) + \delta(t) u_1(x) + \delta'(t) u_0(x) \qquad (5)$$

Таким образом, решение классической задачи Коши свелось к поиску обобщенного решешия уравнения (5) с носителем, лежащим в полуплоскости $\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : \ t \geqslant 0\}$. Отсюда и название: «Обобщенная задача Коши».

Свойство 4. Решение обобщенной задачи Коши для одномерного волнового уравнения с правой частью специального вида

$$u_{tt}(t,x) - a^2 u_{xx}(t,x) = \delta'(t) u_0(x) + \delta(t) u_1(x)\,,$$

где функции $u_0(x), u_1(x)$ являются функциями медленного роста, можно найти по формуле Даламбера

$$u(t,x) = \frac{\theta(t)}{2} \big(u_0(x+at) + u_0(x-at)\big) + \frac{\theta(t)}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} u_1(\xi)\, d\xi$$

Справедливость этого свойства следует из свойств 3 и 2 и формулы Даламбера для решения классической задачи Коши.

Примеры решения одномерных обобщенных задач Коши

Замечание. При решении обобщенных задач Коши для одномерных волновых уравнений вычислять функцию Грина оператора Даламбера не требуется, нужно использовать готовую формулу, полученную в задаче 1.

Решим задачу из экзаменационной контрольной по УМФ 2019/2020 учебного года.

Задача 2 *В пространстве* $S'(\mathbb{R}^2)$ *найти решение обобщенной задачи Коши*

$$u_{tt} - u_{xx} = \delta(x)\theta(t)\cos t + \frac{\delta(t)}{1+e^x} \tag{6}$$

Решение. Представим решение $u(t,x)$ в виде суммы

$$u(t,x) = v(t,x) + w(t,x)\,,$$

где $v(t,x)$ является решением обобщенной задачи Коши

$$v_{tt} - v_{xx} = \delta(x)\theta(t)\cos t\,, \tag{7}$$

а $w(t,x)$ является решением обобщенной задачи Коши

$$w_{tt} - w_{xx} = \frac{\delta(t)}{1+e^x} \tag{8}$$

1. Решение $v(t,x)$ задачи (7) будет сверткой правой части уравнения (7) с функцией Грина для оператора Даламбера

$$v(t,x) = \big(\delta(x)\theta(t)\cos t\big) * \frac{\theta\big(t-|x|\big)}{2}$$

По определению свертки обобщенных функций для любой основной функции $\varphi(t,x) \in S(\mathbb{R}^2)$ и любой 1-срезки $\eta_1(t,x)$ должно быть выполнено равенство

$$\left\langle \Big(\delta(x)\theta(t)\cos t\Big) * \frac{\theta\big(t-|x|\big)}{2}\,,\, \varphi(t,x) \right\rangle =$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \left\langle \delta(x)\theta(t)\cos t\,,\, \eta_1\left(\frac{t}{R}, \frac{x}{R}\right) \left\langle \frac{\theta\big(\tau-|y|\big)}{2}\,,\, \varphi(t+\tau, x+y) \right\rangle \right\rangle =$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt\, \theta(t) \cos t\, \eta_1 \left(\frac{t}{R}, 0\right) \left\langle \frac{\theta\bigl(\tau - |y|\bigr)}{2}\,,\, \varphi(t+\tau, y) \right\rangle =$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt\, \theta(t) \cos t\, \eta_1 \left(\frac{t}{R}, 0\right) \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{\theta\bigl(\tau - |y|\bigr)}{2}\, \varphi(t+\tau, y) d\tau dy$$

Сделав во внутреннем интеграле замену переменных

$$\begin{cases} s = t + \tau, \\ z = y, \end{cases} \qquad |J| = 1,$$

получим

$$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt\, \theta(t) \cos t\; \eta_1 \left(\frac{t}{R}, 0\right) \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{\theta\bigl(\tau - |y|\bigr)}{2}\, \varphi(t+\tau, y) d\tau dy =$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt \int\limits_{\mathbb{R}^2} \theta(t) \cos t\; \eta_1 \left(\frac{t}{R}, 0\right) \frac{\theta\bigl(s - t - |z|\bigr)}{2}\, \varphi(s, z) ds dz \qquad (9)$$

Оценим теперь подынтегральную функцию. Для этого заметим, что подынтегральная функция в формуле (9) может быть отлична от нуля лишь при

$$\begin{cases} s - t - |z| \geqslant 0\,, \\ t \geqslant 0\,, \end{cases}$$

откуда следует, что

$$0 \leqslant t \leqslant s\,.$$

Воспользовавшись ограниченностью 1-срезки и свойствами функции $\varphi(s,z) \in S(\mathbb{R}^2)$, получаем, что $\exists M > 0 \quad \exists A > 0$ такие, что

$$\left| \eta_1 \left(\frac{t}{R}, 0\right) \right| \leqslant M$$

$$|\varphi(s,z)| \leqslant \frac{A}{(1+s^2)^2(1+z^2)}$$

Поэтому

$$\left| \theta(t) \cos t \, \eta_1\left(\frac{t}{R}, 0\right) \, \frac{\theta\left(s-t-|z|\right)}{2} \, \varphi(s,z) \right| \leqslant \frac{M \cdot A}{2(1+s^2)^2(1+z^2)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M \cdot A}{2(1+s^2)(1+t^2)(1+z^2)}$$

Поскольку полученная оценка не зависит от R и является абсолютно интегрируемой функцией по всем переменным, то к интегралу (9) можно применять и теорему Фубини, и теорему об ограниченной сходимости. Таким образом,

$$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt \int\limits_{\mathbb{R}^2} \theta(t) \cos t \, \eta_1\left(\frac{t}{R}, 0\right) \, \frac{\theta\left(s-t-|z|\right)}{2} \, \varphi(s,z) \, ds dz =$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \theta(t) \cos t \, \eta_1\left(\frac{t}{R}, 0\right) \, \frac{\theta\left(s-t-|z|\right)}{2} \, \varphi(s,z) \, ds dz dt =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^3} \theta(t) \cos t \, \frac{\theta\left(s-t-|z|\right)}{2} \, \varphi(s,z) \, ds dz dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} ds dz \, \varphi(s,z) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \theta(t) \cos t \, \theta\left(s-t-|z|\right) \, dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} ds dz \, \varphi(s,z) \, \theta\left(s-|z|\right) \int\limits_{0}^{s-|z|} \cos t \, dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \theta\left(s-|z|\right) \sin\left(s-|z|\right) \, \varphi(s,z) \, ds dz =$$

$$= \left\langle \frac{1}{2}\,\theta\left(t-|x|\right)\sin\left(t-|x|\right)\,,\,\varphi(t,x) \right\rangle$$

Таким образом,

$$v(t,x) = \frac{1}{2}\,\theta\left(t-|x|\right)\sin\left(t-|x|\right)$$

2. Теперь решим задачу (8):

$$w_{tt} - w_{xx} = \frac{\delta(t)}{1+e^x}$$

Поскольку правая часть этого уравнения является произведением обобщенной функции $\delta(t)$ и функции медленного роста

$$\frac{1}{1+e^x}$$

то по свойству 4 решение $w(t,x)$ задачи (8) можно найти по формуле Даламбера

$$w(t,x) = \frac{\theta(t)}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\frac{1}{1+e^{\,\xi}}\,d\xi = \frac{\theta(t)}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\frac{1+e^{\,\xi}-e^{\,\xi}}{1+e^{\,\xi}}\,d\xi =$$

$$= \frac{\theta(t)}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\left(1-\frac{e^{\,\xi}}{1+e^{\,\xi}}\right)d\xi = \frac{\theta(t)}{2}\,\left(\xi - \ln\!\left(1+e^{\,\xi}\right)\right)\Big|_{x-t}^{x+t} =$$

$$= \frac{\theta(t)}{2}\Big(2t - \ln\!\left(1+e^{\,x+t}\right) + \ln\!\left(1+e^{\,x-t}\right)\Big)$$

Таким образом,

$$u(t,x) = v(t,x) + w(t,x) =$$

$$= \frac{1}{2}\,\theta\left(t-|x|\right)\sin\left(t-|x|\right) + \frac{\theta(t)}{2}\Big(2t - \ln\!\left(1+e^{\,x+t}\right) + \ln\!\left(1+e^{\,x-t}\right)\Big)$$

Ответ.

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\,\theta\left(t-|x|\right)\sin\left(t-|x|\right) + \frac{\theta(t)}{2}\Big(2t - \ln\!\left(1+e^{\,x+t}\right) + \ln\!\left(1+e^{\,x-t}\right)\Big)$$

Теперь разберем задачу из экзаменационной контрольной по УМФ 2016/2017 учебного года.

Задача 3 *В пространстве* $S'(\mathbb{R}^2)$ *найти решение обобщенной задачи Коши*

$$u_{tt} - u_{xx} = \delta\big(t - 3|x|\big) \tag{10}$$

Решение.

Как мы уже знаем, решение $u(t,x)$ задачи (10) является сверткой правой части уравнения (10) с функцией Грина для оператора Даламбера

$$u(t,x) = \delta\big(t - 3|x|\big) * \frac{\theta\big(t - |x|\big)}{2}$$

По определению свертки обобщенных функций для любой основной функции $\varphi(t,x) \in S(\mathbb{R}^2)$ и любой 1-срезки $\eta_1(t,x)$ должно быть выполнено равенство

$$\left\langle \delta\big(t - 3|x|\big) * \frac{\theta\big(t - |x|\big)}{2}\,,\, \varphi(t,x) \right\rangle =$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \left\langle \delta\big(t - 3|x|\big)\,,\, \eta_1\left(\frac{t}{R}, \frac{x}{R}\right) \left\langle \frac{\theta\big(\tau - |y|\big)}{2}\,,\, \varphi(t+\tau, x+y) \right\rangle \right\rangle =$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\, \eta_1\left(\frac{3|x|}{R}, \frac{x}{R}\right) \left\langle \frac{\theta\big(\tau - |y|\big)}{2}\,,\, \varphi\big(3|x| + \tau, x+y\big) \right\rangle =$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\, \eta_1\left(\frac{3|x|}{R}, \frac{x}{R}\right) \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{\theta\big(\tau - |y|\big)}{2}\, \varphi\big(3|x| + \tau, x+y\big)\, d\tau dy$$

Сделав во внутреннем интеграле замену переменных

$$\begin{cases} s = \tau + 3|x|, \\ z = y + x, \end{cases} \qquad |J| = 1,$$

получим

$$\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\;\eta_1\left(\frac{3|x|}{R},\frac{x}{R}\right)\int\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{\theta\big(\tau-|y|\big)}{2}\;\varphi\big(3|x|+\tau,x+y\big)\,d\tau dy=$$

$$=\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\int\limits_{\mathbb{R}^2}\eta_1\left(\frac{3|x|}{R},\frac{x}{R}\right)\;\frac{\theta\big(s-3|x|-|z-x|\big)}{2}\;\varphi(s,z)\,dsdz \qquad (11)$$

Оценим подынтегральную функцию. Для этого заметим, что подынтегральная функция в формуле (11) может быть отлична от нуля лишь при

$$s-3|x|-|z-x|\geqslant 0\,,$$

откуда следует,что

$$3|x|\leqslant s\,.$$

Воспользовавшись ограниченностью 1-срезки и свойствами функции $\varphi(s,z)\in S(\mathbb{R}^2)$, получаем, что $\exists M>0\quad\exists A>0$ такие, что

$$\left|\eta_1\left(\frac{3|x|}{R},\frac{x}{R}\right)\right|\leqslant M$$

$$|\varphi(s,z)|\leqslant\frac{A}{(1+s^2)^2(1+z^2)}$$

Поэтому

$$\left|\eta_1\left(\frac{3|x|}{R},\frac{x}{R}\right)\;\frac{\theta\big(s-3|x|-|z-x|\big)}{2}\;\varphi(s,z)\right|\leqslant\frac{M\cdot A}{2(1+s^2)^2(1+z^2)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{M\cdot A}{2(1+s^2)(1+9x^2)(1+z^2)}$$

Поскольку полученная оценка не зависит от R и является абсолютно интегрируемой функцией по всем трем переменным, то к интегралу (11) можно применять и теорему Фубини, и теорему Лебега об ограниченной сходимости. Таким образом,

$$\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dx\int\limits_{\mathbb{R}^2}\eta_1\left(\frac{3|x|}{R},\frac{x}{R}\right)\ \frac{\theta\big(s-3|x|-|z-x|\big)}{2}\ \varphi(s,z)\,dsdz=$$

$$=\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\eta_1\left(\frac{3|x|}{R},\frac{x}{R}\right)\ \frac{\theta\big(s-3|x|-|z-x|\big)}{2}\ \varphi(s,z)\,dsdzdt=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{\theta\big(s-3|x|-|z-x|\big)}{2}\ \varphi(s,z)\,dsdzdt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^2}dsdz\,\varphi(s,z)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\theta\big(s-3|x|-|z-x|\big)\,dx \qquad (12)$$

Чтобы вычислить внутренний интеграл в формуле (12), еще раз запишем условие неотрицательности аргумента функции $\theta\big(s-3|x|-|z-x|\big)$:

$$s-3|x|-|z-x|\geqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} s-3|x|\geqslant 0,\\ |z-x|\leqslant s-3|x|, \end{cases} \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases} s\geqslant 0,\\ |x|\leqslant \dfrac{s}{3},\\ -s+3|x|\leqslant x-z\leqslant s-3|x|. \end{cases}$$

Рассcмотрим 2 случая.

1. Если $x\geqslant 0$, то

$$\begin{cases} s\geqslant 0,\\ 0\leqslant x\leqslant \dfrac{s}{3},\\ -s+3x\leqslant x-z\leqslant s-3x, \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} s\geqslant 0,\\ 0\leqslant x\leqslant \dfrac{s}{3},\\ x\leqslant \dfrac{s+z}{4},\\ x\leqslant \dfrac{s-z}{2}, \end{cases} \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} s \geqslant 0, \\ 0 \leqslant x \leqslant \min\left\{\dfrac{s}{3}, \dfrac{s+z}{4}, \dfrac{s-z}{2}\right\}. \end{cases}$$

2. Если же $x < 0$, то

$$\begin{cases} s \geqslant 0, \\ -\ \dfrac{s}{3} \leqslant x < 0, \\ -s - 3x \leqslant x - z \leqslant s + 3x, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} s \geqslant 0, \\ -\ \dfrac{s}{3} \leqslant x < 0, \\ x \geqslant \dfrac{-s-z}{2}, \\ x \geqslant \dfrac{z-s}{4}, \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} s \geqslant 0, \\ 0 > x \geqslant \max\left\{-\ \dfrac{s}{3}, \dfrac{-s-z}{2}, \dfrac{z-s}{4}\right\} \end{cases}$$

Следовательно, внутренний интеграл в формуле (12) равен

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \theta\big(s - 3|x| - |z - x|\big)\, dx =$$

$$= \theta(s)\, \theta\left(\min\left\{\frac{s}{3}, \frac{s+z}{4}, \frac{s-z}{2}\right\} - \max\left\{-\ \frac{s}{3}, \frac{-s-z}{2}, \frac{z-s}{4}\right\}\right) \cdot$$

$$\cdot \int\limits_{\max\left\{-\frac{s}{3}, \frac{-s-z}{2}, \frac{z-s}{4}\right\}}^{\min\left\{\frac{s}{3}, \frac{s+z}{4}, \frac{s-z}{2}\right\}} dx =$$

$$= \theta\left(\min\left\{\frac{s}{3}, \frac{s+z}{4}, \frac{s-z}{2}\right\} - \max\left\{-\ \frac{s}{3}, \frac{-s-z}{2}, \frac{z-s}{4}\right\}\right) \int\limits_{\max\left\{-\frac{s}{3}, \frac{-s-z}{2}, \frac{z-s}{4}\right\}}^{\min\left\{\frac{s}{3}, \frac{s+z}{4}, \frac{s-z}{2}\right\}} dx =$$

$$= \theta\left(\min\left\{\frac{s}{3}, \frac{s+z}{4}, \frac{s-z}{2}\right\} - \max\left\{-\frac{s}{3}, \frac{-s-z}{2}, \frac{z-s}{4}\right\}\right)\cdot$$

$$\cdot\left[\min\left\{\frac{s}{3}, \frac{s+z}{4}, \frac{s-z}{2}\right\} - \max\left\{-\frac{s}{3}, \frac{-s-z}{2}, \frac{z-s}{4}\right\}\right]$$

Поэтому

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\,\theta\left(\min\left\{\frac{t}{3}, \frac{t+x}{4}, \frac{t-x}{2}\right\} - \max\left\{-\frac{t}{3}, \frac{-t-x}{2}, \frac{x-t}{4}\right\}\right)\cdot$$

$$\cdot\left[\min\left\{\frac{t}{3}, \frac{t+x}{4}, \frac{t-x}{2}\right\} - \max\left\{-\frac{t}{3}, \frac{-t-x}{2}, \frac{x-t}{4}\right\}\right]$$

Ответ.

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\,\theta\left(\min\left\{\frac{t}{3}, \frac{t+x}{4}, \frac{t-x}{2}\right\} - \max\left\{-\frac{t}{3}, \frac{-t-x}{2}, \frac{x-t}{4}\right\}\right)\cdot$$

$$\cdot\left[\min\left\{\frac{t}{3}, \frac{t+x}{4}, \frac{t-x}{2}\right\} - \max\left\{-\frac{t}{3}, \frac{-t-x}{2}, \frac{x-t}{4}\right\}\right]$$

Спасибо за внимание.
Не болейте!