Интегральные операторы с конечномерным множеством значений. Решение интегральных уравнений

Самарова С.С.

ФОПФ, 3 курс, УМФ

Учебное пособие для дистанционных занятий

В данном пособии рассматриваются интегральные операторы

$$(Au)(x) = \int\limits_G K(t,x)u(t)dt, \quad u \in L_2(G), \quad x \in G,$$

где $G \in \mathbb{R}^n$ – область, а функция $K(t,x) \in L_2\Big(G \times G\Big)$, называемая ядром интегрального оператора, имеет вид

$$K(t,x) = \sum_{k=1}^{n} g_k(t) \cdot h_k(x)$$

В этом случае

$$(Au)(x) = \int\limits_G K(t,x)u(t)dt = \sum_{k=1}^{n} h_k(x) \int\limits_G g_k(t)u(t)dt = \sum_{k=1}^{n} C_k \cdot h_k(x)$$

где числа

$$C_k = \int\limits_G g_k(t)u(t)dt, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Отсюда следует, что образ интегрального оператора $\operatorname{Im} A$ является конечномерным подпространством $L_2(G)$.

Определение 1 *Число* λ *называют характеристическим числом интегрального оператора* A, *если существует ненулевое решение* $u(x)$ *однородного интегрального уравнения*

$$u(x) = \lambda \int\limits_G K(t,x)u(t)dt$$

В этом случае функцию $u(x)$ *называют собственной функцией интегрального оператора* A.

Замечание 1. Если λ – характеристическое число оператора A, то число

$$\frac{1}{\lambda}$$

является собственным значением оператора A.

Замечание 2. Для интегральных операторов с конечномерным множеством значений решение неоднородных интегральных уравнений

$$u(x) = \lambda \int\limits_G K(t,x)u(t)dt + f(x), \quad f \in L_2[a,b]$$

и поиск характеристических чисел и соответствующих им собственных функций сводится к решению алгебраических систем уравнений, как это сейчас будет показано на примерах.

Задача 1 *Найти характеристические числа и собственные функции интегрального оператора и при всех допустимых значениях* λ *решить интегральное уравнение*

$$u(x) = \lambda \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + y\cos x)\, u(y)\, dy + 12x + \pi^2, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \qquad (1)$$

Решение. Преобразуем правую часть уравнения (1) к виду

$$u(x) = \lambda \sin x \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} u(y)\, dy + \lambda \cos x \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} y\, u(y)\, dy + 12x + \pi^2 \qquad (2)$$

и обозначим

$$C_1 = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} u(y)\, dy\,, \quad C_2 = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} y\, u(y)\, dy$$

Отсюда следует, что любое решение уравнения (2) имеет вид

$$u(x) = C_1 \lambda \sin x + C_2 \lambda \cos x + 12x + \pi^2, \qquad (3)$$

где C_1 и C_2 – некоторые числа.

Чтобы найти эти числа, составим систему уравнений. Для этого сначала подставим функцию $u(x)$ в виде (3) в формулу для C_1

$$C_1 = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} u(y)\, dy = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(C_1 \lambda \sin y + C_2 \lambda \cos y + 12y + \pi^2\right) dy =$$

$$= C_1 \lambda \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin y\, dy + C_2 \lambda \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos y\, dy + \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(12y + \pi^2\right) dy =$$

$$= C_1 \lambda (-\cos y)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + C_2 \lambda \sin y\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \left(6y^2 + \pi^2 y\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2C_2\lambda + \pi^3$$

Теперь подставим функцию $u(x)$ в виде (3) в формулу для C_2

$$C_2 = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} y\, u(y)\, dy = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} y\left(C_1 \lambda \sin y + C_2 \lambda \cos y + 12y + \pi^2\right) dy =$$

$$= C_1\lambda \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} y\,\sin y\,dy + C_2\lambda \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} y\,\cos y\,dy + \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(12y^2 + \pi^2 y\right) dy$$

Вычислим каждый из получившихся интегралов.

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} y\,\sin y\,dy = 2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} y\,\sin y\,dy = -2y\cos y\big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos y\,dy = 2\sin y\big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

Поскольку функция $y\,\cos y$ – нечетная, то

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} y\,\cos y\,dy = 0$$

Наконец,

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(12y^2 + \pi^2 y\right) dy = \left(4y^3 + \frac{\pi^2 y^2}{2}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi^3$$

Таким образом,

$$C_2 = 2C_1\lambda + \pi^3$$

Следовательно, числа C_1 и C_2 удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} C_1 = 2C_2\lambda + \pi^3, \\ C_2 = 2C_1\lambda + \pi^3, \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} C_1 - 2C_2\lambda = \pi^3, \\ 2C_1\lambda - C_2 = -\pi^3. \end{cases} \tag{4}$$

Выпишем расширенную матрицу системы (4)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2\lambda & \pi^3 \\ 2\lambda & -1 & -\pi^3 \end{array}\right)$$

и рассмотрим все возможные случаи в зависимости от значения λ.

1. Случай однозначной разрешимости системы (4).

   Определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2\lambda \\ 2\lambda & -1 \end{vmatrix} = -1 + 4\lambda^2 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \neq \pm\frac{1}{2}$$

   В этом случае система (4) имеет единственное решение, которое можно найти по правилу Крамера

$$\Delta_{C_1} = \begin{vmatrix} \pi^3 & -2\lambda \\ -\pi^3 & -1 \end{vmatrix} = -\pi^3 - 2\lambda\pi^3 = -\pi^3(1+2\lambda);$$

$$C_1 = \frac{\Delta_{C_1}}{\Delta} = \frac{-\pi^3(1+2\lambda)}{4\lambda^2 - 1} = \frac{-\pi^3}{2\lambda - 1}$$

$$\Delta_{C_2} = \begin{vmatrix} 1 & \pi^3 \\ 2\lambda & -\pi^3 \end{vmatrix} = -\pi^3 - 2\lambda\pi^3 = -\pi^3(1+2\lambda);$$

$$C_2 = \frac{\Delta_{C_2}}{\Delta} = \frac{-\pi^3(1+2\lambda)}{4\lambda^2 - 1} = \frac{-\pi^3}{2\lambda - 1}$$

   Подставляя найденные константы C_1 и C_2 в формулу (3), получаем, что при $\lambda \neq \pm\frac{1}{2}$ уравнение (1) имеет единственное решение

$$u(x) = \frac{-\pi^3}{2\lambda - 1}\,\lambda \sin x + \frac{-\pi^3}{2\lambda - 1}\,\lambda \cos x + 12x + \pi^2 =$$

$$= -\frac{\pi^3\lambda}{2\lambda - 1}\,(\sin x + \cos x) + 12x + \pi^2$$

2. Перейдем теперь к случаю $\lambda = \frac{1}{2}$.

   При $\lambda = \frac{1}{2}$ система (4) принимает вид

$$\begin{cases} C_1 - C_2 = \pi^3, \\ C_1 - C_2 = -\pi^3. \end{cases}$$

Следовательно, при $\lambda = \dfrac{1}{2}$ система (4), а вместе с ней и исходное интегральное уравнение, решений не имеют.

3. Наконец, рассмотрим случай $\lambda = -\dfrac{1}{2}$.

   При $\lambda = -\dfrac{1}{2}$ система (4) принимает вид

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \pi^3, \\ -C_1 - C_2 = -\pi^3, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad C_1 + C_2 = \pi^3$$

   Следовательно, при $\lambda = -\dfrac{1}{2}$ система (4) имеет бесконечно много решений, которые можно записать так:

$$\begin{cases} C_1 = C, \\ C_2 = \pi^3 - C, \end{cases}$$

   где C – любое число.

   Подставляя найденные константы C_1 и C_2 в формулу (3), получаем, что при $\lambda = -\dfrac{1}{2}$ интегральное уравнение (1) имеет бесконечно много решений, которые выражаются формулой

$$u(x) = -\frac{1}{2}\, C\, \sin x - \frac{1}{2}\,(\pi^3 - C)\, \cos x + 12x + \pi^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\, C\, (\cos x - \sin x) + 12x + \pi^2 - \frac{\pi^3}{2} \cos x,$$

   где C – любое число.

Теперь перейдем к поиску характеристических чисел и собственных функций интегрального оператора.

Поскольку интегральный оператор имеет вид

$$(Au)\,(x) = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + y \cos x)\, u(y)\, dy,$$

то для того, чтобы найти его характеристические числа и собственные функции, нам необходимо решить однородное уравнение

$$u(x) = \lambda \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + y\cos x)\, u(y)\, dy \tag{5}$$

Нетрудно заметить, что в отличие от решения неоднородного уравнения (2) решение однородного уравнения (5) имеет вид

$$u(x) = C_1\lambda \sin x + C_2\lambda \cos x, \tag{6}$$

где C_1 и C_2 – решения однородной системы уравнений

$$\begin{cases} C_1 - 2C_2\lambda = 0, \\ 2C_1\lambda - C_2 = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Однородная система (7) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ее определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2\lambda \\ 2\lambda & -1 \end{vmatrix} = -1 + 4\lambda^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \pm\frac{1}{2}$$

Рассмотрим оба случая.

1. При $\lambda = \dfrac{1}{2}$ система (7) принимает вид

$$\begin{cases} C_1 - C_2 = 0, \\ C_1 - C_2 = 0. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad C_1 = C_2 = C,$$

где C – любое число. Из формулы (6) находим

$$u(x) = C\lambda \sin x + C\lambda \cos x = C\lambda(\sin x + \cos x)$$

Следовательно, функция

$$u_1(x) = \sin x + \cos x$$

является собственной функцией интегрального оператора (5) с характеристическим числом $\lambda = \dfrac{1}{2}$.

2. При $\lambda = -\dfrac{1}{2}$ система (7) принимает вид

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 + C_2 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = C, \\ C_2 = -C, \end{cases}$$

где C – любое число. Из формулы (6) находим

$$u(x) = C\lambda \sin x - C\lambda \cos x = C\lambda(\sin x - \cos x)$$

Следовательно, функция

$$u_2(x) = \sin x - \cos x$$

является собственной функцией интегрального оператора (5) с характеристическим числом $\lambda = -\dfrac{1}{2}$.

Ответ.

1. При $\lambda \neq \pm\dfrac{1}{2}$ уравнение имеет единственное решение

$$u(x) = -\frac{\pi^3\lambda}{2\lambda - 1}\,(\sin x + \cos x) + 12x + \pi^2$$

2. При $\lambda = \dfrac{1}{2}$ уравнение решений не имеет

3. При $\lambda = -\dfrac{1}{2}$ уравнение имеет бесконечно много решений

$$u(x) = \frac{1}{2}\,C\,(\cos x - \sin x) + 12x + \pi^2 - \frac{\pi^3}{2}\cos x,$$

где C – любое число.

4. $\lambda = \dfrac{1}{2}$ – характеристическое число, собственная функция

$$u_1(x) = \sin x + \cos x$$

5. $\lambda = -\dfrac{1}{2}$ – характеристическое число, собственная функция

$$u_2(x) = \sin x - \cos x$$

Прежде, чем решать следующую задачу, приведем необходимые определения.

Пусть линейный оператор

$$A\ :\ D(A)\ \to\ \mathcal{H},$$

где $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство, а I - тождественный оператор на $\mathcal{H}$.

Определение 2 *Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называют регулярным значением оператора A, если существует непрерывный обратный оператор*

$$(A-\lambda I)^{-1}:\ \mathcal{H}\ \to\ \mathcal{H}$$

Множество всех регулярных значений называют резольвентным множеством оператора A, и обозначают оператора $\rho(A)$.

Сам непрерывный обратный оператор

$$R_\lambda(A) = (A-\lambda I)^{-1}$$

называют резольвентой оператора A.

Определение 3 *Спектром оператора A называют множество комплексных чисел, не входящих в резольвентное множество оператора. Спектр обозначают $\sigma(A)$.*

Спектр оператора подразделяется на точечный спектр, непрерывный спектр и остаточный спектр.

Определение 4 *Точечным спектром оператора A называют множество его собственных значений. Точечный спектр обозначают $\sigma_\rho(A)$.*

Определение 5 *Непрерывным спектром оператора A называют множество*

$$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \quad \mathrm{Ker}(A-\lambda I) = \{0\}, \quad \mathrm{Im}\,(A-\lambda I) \neq \mathcal{H}, \quad \overline{\mathrm{Im}\,(A-\lambda I)} = \mathcal{H}\}$$

Определение 6 *Остаточным спектром оператора A называют множество*

$$\sigma_r(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \quad \mathrm{Ker}(A-\lambda I) = \{0\}, \quad \overline{\mathrm{Im}\,(A-\lambda I)} \neq \mathcal{H}\}$$

Решим еще одну задачу.

Задача 2 *Пусть*

$$\Pi = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \quad 0 < x_1 < 1, \quad 0 < x_2 < 1\}$$

Для интегрального оператора

$$(Af)(x_1, x_2) = \iint\limits_{\Pi} (x_1 y_2 + x_2 y_1) f(y_1, y_2) dy_1 dy_2, \quad f \in L_2(\Pi), \quad (x_1, x_2) \in \Pi$$

найти спектр и резольвенту.

Решение. Выясним, при каких значениях λ уравнение с неизвестной функцией $f(x_1, x_2)$

$$\Big((A - \lambda\, I)f\Big)(x_1, x_2) = g(x_1, x_2) \tag{8}$$

имеет единственное решение для $\forall g \in L_2(\Pi)$ и найдем его. Все остальные значения λ войдут в спектр.

Для этого преобразуем уравнение (8)

$$\iint\limits_{\Pi} (x_1 y_2 + x_2 y_1) f(y_1, y_2) dy_1 dy_2 = \lambda f(x_1, x_2) + g(x_1, x_2)$$

$$x_1 \iint\limits_{\Pi} y_2 f(y_1, y_2) dy_1 dy_2 + x_2 \iint\limits_{\Pi} y_1 f(y_1, y_2) dy_1 dy_2 = \lambda f(x_1, x_2) + g(x_1, x_2) \tag{9}$$

и обозначим

$$C_1 = \iint\limits_{\Pi} y_2 f(y_1, y_2) dy_1 dy_2\,, \quad C_2 = \iint\limits_{\Pi} y_1 f(y_1, y_2) dy_1 dy_2 \tag{10}$$

Отсюда следует, что для любого решения уравнения (9) существуют числа C_1 и C_2 такие, что выполнено равенство

$$C_1 x_1 + C_2 x_2 = \lambda f(x_1, x_2) + g(x_1, x_2) \tag{11}$$

1. Рассмотрим сначала случай $\lambda \neq 0$.

В этом случае функцию $f(x_1, x_2)$ можно выразить из формулы (11)

$$f(x_1,x_2) = \frac{C_1}{\lambda}\,x_1 + \frac{C_2}{\lambda}\,x_2 - \frac{1}{\lambda}\,g(x_1,x_2) \tag{12}$$

Подставляя выражение (12) в формулы (10), получаем

$$C_1 = \iint\limits_{\Pi} y_2 f(y_1,y_2)dy_1dy_2 = \iint\limits_{\Pi} y_2\left(\frac{C_1}{\lambda}\,y_1 + \frac{C_2}{\lambda}\,y_2 - \frac{1}{\lambda}\,g(y_1,y_2)\right)dy_1dy_2 =$$

$$= \frac{C_1}{\lambda}\int\limits_0^1\int\limits_0^1 y_1y_2dy_1dy_2 + \frac{C_2}{\lambda}\int\limits_0^1\int\limits_0^1 y_2^2dy_1dy_2 - \frac{1}{\lambda}\iint\limits_{\Pi} y_2g(y_1,y_2)dy_1dy_2 =$$

$$= \frac{C_1}{4\lambda} + \frac{C_2}{3\lambda} - \frac{1}{\lambda}\iint\limits_{\Pi} y_2g(y_1,y_2)dy_1dy_2$$

$$C_2 = \iint\limits_{\Pi} y_1 f(y_1,y_2)dy_1dy_2 = \iint\limits_{\Pi} y_1\left(\frac{C_1}{\lambda}\,y_1 + \frac{C_2}{\lambda}\,y_2 - \frac{1}{\lambda}\,g(y_1,y_2)\right)dy_1dy_2 =$$

$$= \frac{C_1}{\lambda}\int\limits_0^1\int\limits_0^1 y_1^2dy_1dy_2 + \frac{C_2}{\lambda}\int\limits_0^1\int\limits_0^1 y_1y_2dy_1dy_2 - \frac{1}{\lambda}\iint\limits_{\Pi} y_1g(y_1,y_2)dy_1dy_2 =$$

$$= \frac{C_1}{3\lambda} + \frac{C_2}{4\lambda} - \frac{1}{\lambda}\iint\limits_{\Pi} y_1g(y_1,y_2)dy_1dy_2$$

Обозначив

$$D_1 = \iint\limits_{\Pi} y_2g(y_1,y_2)dy_1dy_2\,, \quad D_2 = \iint\limits_{\Pi} y_1g(y_1,y_2)dy_1dy_2$$

составим систему уравнений

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{C_1}{4\lambda} + \dfrac{C_2}{3\lambda} - \dfrac{D_1}{\lambda}, \\ C_2 = \dfrac{C_1}{3\lambda} + \dfrac{C_2}{4\lambda} - \dfrac{D_2}{\lambda}, \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (12\lambda-3)C_1 - 4C_2 = -12D_1, \\ 4C_1 - (12\lambda-3)C_2 = 12D_2. \end{cases} \tag{13}$$

Для того, чтобы решить систему (13), выпишем её расширенную матрицу

$$\left(\begin{array}{cc|c} 12\lambda-3 & -4 & -12D_1 \\ 4 & -(12\lambda-3) & 12D_2 \end{array}\right)$$

Рассмотрим все возможные случаи в зависимости от значения λ.

- Случай однозначной разрешимости системы (13).

  Определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 12\lambda-3 & -4 \\ 4 & -(12\lambda-3) \end{vmatrix} = -(12\lambda-3)^2+16 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 12\lambda-3 \neq \pm 4$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda \neq -\frac{1}{12}\,; \quad \lambda \neq \frac{7}{12}$$

  Итак, при $\lambda \neq -\dfrac{1}{12}\,;\quad \lambda \neq \dfrac{7}{12}$ определитель Δ отличен от нуля и система (13) имеет единственное решение, которое мы найдем по правилу Крамера

$$\Delta_{C_1} = \begin{vmatrix} -12D_1 & -4 \\ 12D_2 & -(12\lambda-3) \end{vmatrix} = 12D_1(12\lambda-3)+48D_2;$$

$$C_1 = \frac{\Delta_{C_1}}{\Delta} = \frac{12D_1(12\lambda-3)+48D_2}{16-(12\lambda-3)^2}$$

$$\Delta_{C_2} = \begin{vmatrix} 12\lambda-3 & -12D_1 \\ 4 & 12D_2 \end{vmatrix} = 12D_2(12\lambda-3)+48D_1;$$

$$C_2 = \frac{\Delta_{C_2}}{\Delta} = \frac{12D_2(12\lambda-3)+48D_1}{16-(12\lambda-3)^2}$$

  Подставляя найденные константы C_1 и C_2 в формулу (12), получаем, что при $\lambda \neq -\dfrac{1}{12}\,;\quad \lambda \neq \dfrac{7}{12}$ уравнение (8) имеет единственное решение

$$f(x_1,x_2) =$$

$$= \frac{12D_1(12\lambda-3)+48D_2}{\lambda\left[16-(12\lambda-3)^2\right]}\,x_1 + \frac{12D_2(12\lambda-3)+48D_1}{\lambda\left[16-(12\lambda-3)^2\right]}\,x_2 - \frac{1}{\lambda}\,g(x_1,x_2) =$$

$$= \iint\limits_{\Pi} \frac{(144\lambda - 36)x_1y_2 + 48x_1y_1 + (144\lambda - 36)x_2y_1 + 48x_2y_2}{\lambda\left[16 - (12\lambda - 3)^2\right]}\, g(y_1, y_2)dy_1dy_2 -$$

$$-\frac{1}{\lambda}\, g(x_1, x_2)$$

Таким образом, при $\lambda \neq -\dfrac{1}{12}$; $\lambda \neq \dfrac{7}{12}$; $\lambda \neq 0$ мы нашли резольвенту оператора

$$\Big(R_\lambda(A)g\Big)(x_1, x_2) =$$

$$= \iint\limits_{\Pi} \frac{(144\lambda - 36)x_1y_2 + 48x_1y_1 + (144\lambda - 36)x_2y_1 + 48x_2y_2}{\lambda\left[16 - (12\lambda - 3)^2\right]}\, g(y_1, y_2)dy_1dy_2 -$$

$$-\frac{1}{\lambda}\, g(x_1, x_2)$$

- Перейдем теперь к случаю $\lambda = -\dfrac{1}{12}$

  При $\lambda = -\dfrac{1}{12}$ система (13) либо не имеет решений, либо имеет бесконечно много решений. Это означает, что $\lambda = -\dfrac{1}{12}$ не является регулярным значением.

  Покажем, что это собственное значение. Для этого найдем соответствующую ему собственную функцию, т.е. ненулевое решение однородного уравнения

$$(Af)(x_1, x_2) = -\frac{1}{12}\, f(x_1, x_2)$$

  Полагая в формулах предыдущего пункта

$$g(x_1, x_2) = 0, \quad \lambda = -\frac{1}{12},$$

из формул (12) и (13) получаем

$$f(x_1, x_2) = -12C_1x_1 - 12C_2x_2$$

где константы C_1 и C_2 удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} 4C_1 + 4C_2 = 0, \\ 4C_1 + 4C_2 = 0. \end{cases}$$

Выбирая $C_1 = -\frac{1}{12}$; $C_2 = \frac{1}{12}$, находим собственную функцию

$$f_1(x_1, x_2) = x_1 - x_2$$

Следовательно,

$$\lambda = -\frac{1}{12}$$

является собственным значением и принадлежит точечному спектру.

- Перейдем теперь к случаю $\lambda = \frac{7}{12}$

При $\lambda = \frac{7}{12}$ система (13) либо не имеет решений, либо имеет бесконечно много решений. Это означает, что $\lambda = \frac{7}{12}$ не является регулярным значением.

Покажем, что это собственное значение. Для этого найдем соответствующую ему собственную функцию, т.е. ненулевое решение однородного уравнения

$$(Af)(x_1, x_2) = \frac{7}{12}\, f(x_1, x_2)$$

Полагая в формулах

$$g(x_1, x_2) = 0, \quad \lambda = \frac{7}{12}$$

из формул (12) и (13) получаем

$$f(x_1, x_2) = \frac{12}{7}C_1x_1 + \frac{12}{7}C_2x_2$$

где константы C_1 и C_2 удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} 4C_1 - 4C_2 = 0, \\ 4C_1 - 4C_2 = 0. \end{cases}$$

Выбирая $C_1 = \dfrac{7}{12}$; $C_2 = \dfrac{7}{12}$, находим собственную функцию

$$f_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

Следовательно,

$$\lambda = \frac{7}{12}$$

является собственным значением и принадлежит точечному спектру.

2. Теперь рассмотрим случай $\lambda = 0$ и покажем, что это собственное значение. Действительно, для функции

$$f_0(x_1, x_2) = (2 - 3x_1)\,(2 - 3x_2)$$

выполнено

$$C_1 = \iint\limits_{\Pi} y_2\,(2 - 3y_1)\,(2 - 3y_2)\,dy_1 dy_2 = \int\limits_0^1 (2 - 3y_1)\,dy_1 \cdot \int\limits_0^1 \left(2y_2 - 3y_2^2\right) dy_2 =$$

$$= \left(2y_1 - \frac{3y_1^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 \cdot \left(y_2^2 - y_2^3\right)\big|_0^1 = -\frac{1}{2} \cdot 0 = 0$$

Поскольку $f_0(x_1, x_2) = f_0(x_2, x_1)$, то и

$$C_2 = \iint\limits_{\Pi} y_1 f_0(y_1, y_2) dy_1 dy_2 = 0$$

Следовательно,

$$(Af_0)(x) = C_1 x_1 + C_2 x_2 = 0 = 0 \cdot f_0(x)$$

Значит, $\lambda = 0$ – это собственное значение и оно принадлежит точечному спектру.

Ответ. При $\lambda \neq -\dfrac{1}{12}$; $\lambda \neq \dfrac{7}{12}$; $\lambda \neq 0$ резольвента оператора

$$\Big(R_\lambda(A)g\Big)(x_1, x_2) =$$

$$= \iint\limits_{\Pi} \frac{(144\lambda - 36)x_1y_2 + 48x_1y_1 + (144\lambda - 36)x_2y_1 + 48x_2y_2}{\lambda\left[16 - (12\lambda - 3)^2\right]}\, g(y_1, y_2)dy_1dy_2 -$$

$$-\frac{1}{\lambda}\, g(x_1, x_2)$$

Спектр оператора состоит из трех собственных значений

$$\lambda = -\frac{1}{12}\ ; \quad \lambda = \frac{7}{12}\ ; \quad \lambda = 0\ .$$

Спасибо за внимание.
Не болейте!