Самосопряженные интегральные операторы. Решение интегральных уравнений

Самарова С.С.

ФОПФ, 3 курс, УМФ

Учебное пособие для дистанционных занятий

В данном пособии рассматриваются интегральные операторы

$$(Au)(x) = \int\limits_a^b K(t,x)u(t)dt, \quad u \in L_2[a,b], \quad x \in [a,b],$$

у которых

1. $K(t,x) \in L_2\Big([a,b] \times [a,b]\Big)$,
2. $K(t,x) = \overline{K(x,t)}$ для всех $x \in [a,b]$ и всех $t \in [a,b]$.

Необходимые для решения задач теоретические сведения

Пусть $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство.

Определение 1. Линейный оператор $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ называют компактным, если для любой ограниченной последовательности $\{x_n\}$ из последовательности ее образов $\{A(x_n)\}$ можно выделить фундаментальную подпоследовательность.

Свойство 1. Если $K(t,x) \in L_2\Big([a,b]\times[a,b]\Big)$, то интегральный оператор

$$(Au)(x) = \int\limits_a^b K(t,x)u(t)dt, \quad u \in L_2[a,b], \quad x \in [a,b],$$

является непрерывным и компактным.

Свойство 2. Если $K(t,x) \in L_2\Big([a,b]\times[a,b]\Big)$ и $K(t,x) = \overline{K(x,t)}$ для всех $x \in [a,b]$ и всех $t \in [a,b]$, то интегральный оператор

$$(Au)(x) = \int\limits_a^b K(t,x)u(t)dt, \quad u \in L_2[a,b], \quad x \in [a,b],$$

является симметричным.

Свойство 3. Если $K(t,x) \in L_2\Big([a,b]\times[a,b]\Big)$ и $K(t,x) = \overline{K(x,t)}$ для всех $x \in [a,b]$ и всех $t \in [a,b]$, то интегральный оператор

$$(Au)(x) = \int\limits_a^b K(t,x)u(t)dt, \quad u \in L_2[a,b], \quad x \in [a,b],$$

является самосопряженным.

Замечание. Свойство 3 следует из того, что рассматриваемый оператор является непрерывным, симметричным и определен на всем пространстве $L_2[a,b]$.

Сформулируем теперь одну из центральных теорем данного курса.

Теорема Гильберта-Шмидта

Пусть линейный оператор $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ является компактным самосопряженным оператором, причем $A \neq 0$. Тогда в подпространстве $\Big(\mathrm{Ker} A\Big)^{\perp}$ существует не более, чем счетный, ортогональный базис $\{e_n\}$ из собственных векторов оператора A. При этом для $\forall x \in \mathcal{H}$ существует единственный вектор $x_0 \in \mathrm{Ker\ A}$ такой, что

$$x = x_0 + \sum_n \frac{(x,e_n)}{(e_n,e_n)} e_n$$

Для решения задач нам также потребуется ряд о спектрах операторов.

Теорема о спектре компактного оператора

Пусть линейный оператор $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ является компактным оператором. Тогда

- любой элемент спектра, отличный от 0, является собственным значением;
- спектр оператора не более, чем счетен;
- спектр оператора не имеет предельных точек, кроме, быть может, точки 0.

Теорема о спектре самосопряженного оператора

Пусть линейный оператор $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ является самосопряженным оператором. Тогда

- спектр оператора лежит на действительной оси
$$\sigma(A) \subset \mathbb{R}$$
- остаточный спектр оператора пуст.

Замечание. Рассматриваемые нами интегральные операторы

$$(Au)(x) = \int\limits_a^b K(t,x)u(t)dt, \quad u \in L_2[a,b], \quad x \in [a,b],$$

у которых

1. $K(t,x) \in L_2\Big([a,b] \times [a,b]\Big)$,
2. $K(t,x) = \overline{K(x,t)}$ для всех $x \in [a,b]$ и всех $t \in [a,b]$,

являются компактными и самосопряженными (см. свойства 1 и 3), поэтому их спектры обладают следующими свойствами:

- любой элемент спектра является действительным числом;
- любой элемент спектра, отличный от 0, является собственным значением;
- спектр оператора не более, чем счетен;

- спектр оператора не имеет предельных точек, кроме, быть может, точки 0;

- остаточный спектр оператора пуст.

Доказательства перечисленных фактов является лекционным материалом, а мы переходим к решению задач.

Примеры решения задач

Задача 1 *Линейный оператор* $A : L_2[0,4] \to L_2[0,4]$ *имеет вид*

$$(Au)(x) = \int_0^x t(3x-2)u(t)dt + \int_x^4 x(3t-2)u(t)dt, \quad u \in L_2[0,4], \quad x \in [0,4].$$

1. *Доказать, что* A *– компактный, самосопряженный, взаимнооднозначный оператор.*

2. *Найти спектр* $\sigma(A)$ *оператора* A*.*

3. *Найти спектральное разложение оператора* A*.*

4. *Для любого значения* $\lambda \notin \sigma(A)$ *найти резольвенту оператора* A*.*

5. *Решить уравнение*

$$u = Au + x, \quad u \in L_2[0,4].$$

Решение.

1. Представим оператор A в виде

$$(Au)(x) = \int_0^4 K(t,x)u(t)dt, \quad u \in L_2[0,4], \quad x \in [0,4],$$

где

$$K(t,x) = \begin{cases} t(3x-2), & 0 \le t \le x \le 4, \\ x(3t-2), & 0 \le x \le t \le 4. \end{cases}$$

- Компактность.

  $K(t,x)$ непрерывна на $[0,4]\times[0,4] \quad \Rightarrow \quad K(t,x) \in L_2\Big([0,4]\times[0,4]\Big)$.
  В силу свойства 1 оператор A компактен.

- Самосопряженность.

  $K(t,x) \in L_2\Big([0,4]\times[0,4]\Big)$ и $K(t,x) = \overline{K(x,t)}$ для всех $x \in [0,4]$ и всех $t \in [0,4]$. В силу свойства 3 оператор A самосопряжен.

- Взаимная однозначность.

  Для доказательства взаимной однозначности оператора A покажем, что $\mathrm{Ker}A = \{0\}$.

  Используя доказанное ранее на лекциях свойство линейных операторов в гильбертовом пространстве

  $$\mathrm{Ker}A^* = \Big(\mathrm{Im}A\Big)^{\perp}$$

  и самосопряженность оператора A, получаем:

  $$\mathrm{Ker}A = \mathrm{Ker}A^* = \Big(\mathrm{Im}A\Big)^{\perp}$$

  Докажем, что $\overline{\mathrm{Im}A} = L_2[0,4]$.

  Для этого рассмотрим функцию $u \in C[0,4]$ и функцию

  $$\begin{aligned} v(x) = (Au)(x) &= \int_0^x t(3x-2)u(t)dt + \int_x^4 x(3t-2)u(t)dt = \\ &= (3x-2)\int_0^x tu(t)dt + x\int_x^4 (3t-2)u(t)dt \end{aligned} \tag{1}$$

  Из свойств интегралов с переменными верхним и нижним пределами и непрерывности функции u получаем, что функция v дифференцируема на $[0,4]$.

Продифференцируем равенство (1).

$$\begin{gathered}v'(x) = x(3x-2)u(x) + \int\limits_0^x 3tu(t)dt - x(3x-2)u(x) + \\ + \int\limits_x^4 (3t-2)u(t)dt = 3\int\limits_0^x tu(t)dt + \int\limits_x^4 (3t-2)u(t)dt\end{gathered} \tag{2}$$

Поскольку при дифференцировании функции, отличающиеся на константу, дают один и тот же результат, то для эквивалентности соотношений (1) и (2) добавим к (2) краевое условие

$$v(0) = 0$$

Нетрудно заметить, что в соотношении (2) подынтегральные функции непрерывны, а, значит, $v'(x)$ дифференцируема.
Найдем $v''(x)$:

$$v''(x) = 3xu(x) - (3x-2)u(x) = 2u(x) \tag{3}$$

И снова для того, чтобы соотношения (2) и (3) стали эквивалентными, добавим к (3) краевое условие уже при $x = 4$. Для этого заметим, что

$$v(4) = 10\int\limits_0^4 tu(t)dt; \quad v'(4) = 3\int\limits_0^4 tu(t)dt \;\Rightarrow\; \quad 3v(4) = 10v'(4)$$

Таким образом, мы получили, что

$$A\left(C[0,4]\right) = \left\{v \in C^2[0,4] : \; v(0) = 0, \; v'(4) = \frac{3}{10}v(4)\right\} \tag{4}$$

Из курса математического анализа известно, что это множество всюду плотно в $L_2[0,4]$. Поэтому

$$\overline{A\left(C[0,4]\right)} = L_2[0,4] \;\Rightarrow\; \overline{\mathrm{Im}A} = L_2[0,4] \;\Rightarrow\; \mathrm{Ker}A = \left(\mathrm{Im}A\right)^{\perp} = \{0\}$$

Следовательно, оператор A является взаимно-однозначным.

2. <u>Спектр</u>.

Найдем сначала собственные значения и собственные функции.

Заметим, что в силу самосопряженности оператора A все его собственные значения действительные, а в силу взаимной однозначности оператора A число $\lambda = 0$ не является его собственным значением.

Рассмотрим уравнение

$$Au = \lambda u, \quad u \in L_2[0,4],$$

$$\int\limits_0^x t(3x-2)u(t)dt + \int\limits_x^4 x(3t-2)u(t)dt = \lambda u, \quad u \in L_2[0,4]. \qquad (5)$$

Поскольку $u \in L_2[0,4]$, то по свойствам интегралов с переменными верним и нижним пределами получаем, что левая часть уравнения (5) является непрерывной функцией, значит, и в правой части $u \in C[0,4]$.

Снова обозначим $v = Au$ и воспользуемся результатами (3) и (4), полученными при доказательстве взаимной однозначности A

$$v''(x) = \lambda u''(x) = 2u(x),$$

$$u(0) = \frac{1}{\lambda}v(0) = 0, \quad u'(4) = \frac{1}{\lambda}v'(4) = \frac{3}{10\lambda}v(4) = \frac{3}{10}u(4),$$

Возможны два случая.

- $\lambda > 0$

  В этом случае, решая уравнение

  $$u'' = \frac{2}{\lambda}u, \qquad u(0) = 0, \qquad u'(4) = \frac{3}{10}u(4),$$

  получим

  $$u(x) = c_1 \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda}}\,x\right) + c_2 \operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda}}\,x\right)$$

  $$u(0) = c_2 = 0$$

  $$u'(4) = c_1\sqrt{\frac{2}{\lambda}}\operatorname{ch}\left(4\sqrt{\frac{2}{\lambda}}\right) = \frac{3}{10}u(4) = c_1\frac{3}{10}\operatorname{sh}\left(4\sqrt{\frac{2}{\lambda}}\right)$$

Поскольку нас интересует случай $c_1 \neq 0$, то

$$\operatorname{th}\left(4\sqrt{\frac{2}{\lambda}}\right) = \frac{10}{3}\sqrt{\frac{2}{\lambda}}$$

Обозначим

$$\mu = 4\sqrt{\frac{2}{\lambda}}$$

Тогда

$$\operatorname{th}\mu = \frac{5}{6}\mu\,, \qquad \mu > 0 \tag{6}$$

Нарисуем графики левой и правой частей уравнения (6), преобразовав $\operatorname{th}\mu$ к более удобному для рисования виду

$$\operatorname{th}\mu = \frac{e^{\mu} - e^{-\mu}}{e^{\mu} + e^{-\mu}} = \frac{e^{2\mu} - 1}{e^{2\mu} + 1} = 1 - \frac{2}{e^{2\mu} + 1}$$

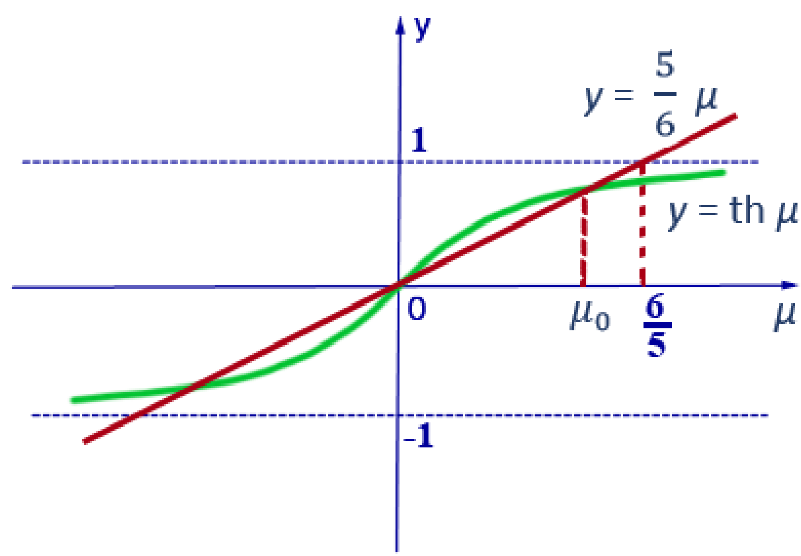

Рис.1

Как видно из графиков, уравнение (6) имеет единственный положительный корень $\mu_0 < \dfrac{6}{5}$.

Таким образом, у оператора A есть единственное положительное собственное значение и соответствующая этому собственному значению собственная функция:

$$\lambda_0 = 2\left(\frac{\mu_0}{4}\right)^{-2} = \frac{32}{\mu_0^2}\,; \qquad u_0 = \operatorname{sh}\left(\frac{\mu_0}{4}x\right)$$

- $\lambda < 0$

  В этом случае, решая уравнение

$$u'' = \frac{2}{\lambda}u, \qquad u(0) = 0, \qquad u'(4) = \frac{3}{10}u(4),$$

получим

$$u(x) = c_1 \sin\left(\sqrt{\frac{2}{-\lambda}}\, x\right) + c_2 \cos\left(\sqrt{\frac{2}{-\lambda}}\, x\right)$$

$$u(0) = c_2 = 0$$

$$u'(4) = c_1\sqrt{\frac{2}{-\lambda}} \cos\left(4\sqrt{\frac{2}{-\lambda}}\right) = \frac{3}{10}u(4) = c_1\frac{3}{10} \sin\left(4\sqrt{\frac{2}{-\lambda}}\right)$$

Поскольку нас интересует случай $c_1 \neq 0$, то

$$\operatorname{tg}\left(4\sqrt{\frac{2}{-\lambda}}\right) = \frac{10}{3}\sqrt{\frac{2}{-\lambda}}$$

Обозначим

$$\mu = 4\sqrt{\frac{2}{-\lambda}}$$

Тогда

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{5}{6}\mu\,, \qquad \mu > 0 \tag{7}$$

Нарисуем графики левой и правой частей уравнения (7)

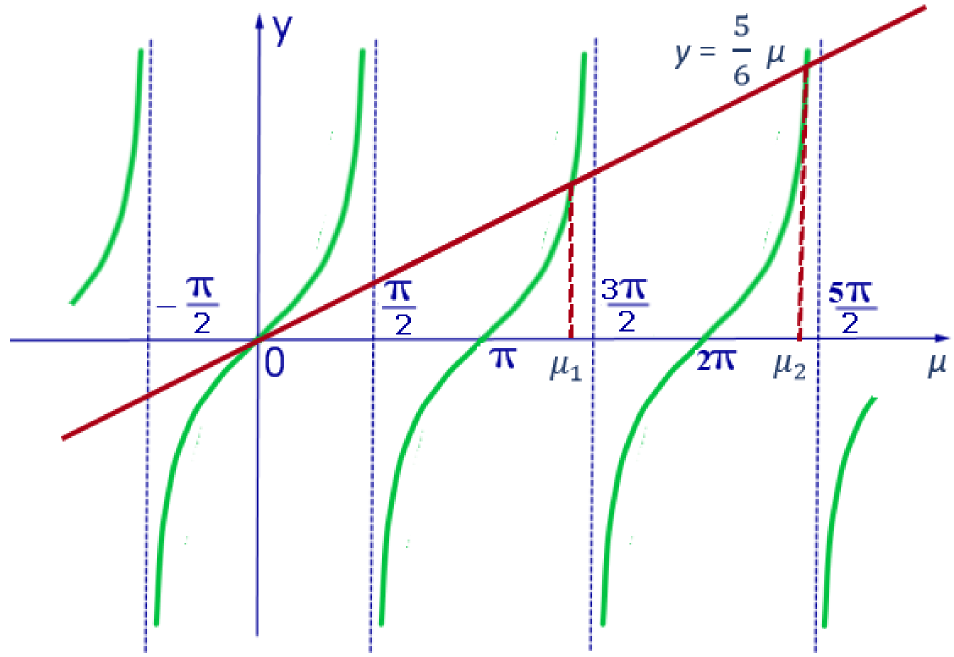

Рис.2

Как видно из графиков, уравнение (7) имеет счетное множество корней

$$\mu_1 < \mu_2 < \ldots \qquad \mu_k \in \left(\pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k\right), \; k = 1, 2, 3, \ldots$$

следовательно, у оператора A есть счетное множество отрицательных собственных значений

$$\lambda_k = -2\left(\frac{\mu_k}{4}\right)^{-2} = -\frac{32}{\mu_k^2}$$

и соответствующих этим собственным значениям собственных функций:

$$u_k = \sin\left(\frac{\mu_k}{4}x\right)$$

Для окончательного определения структуры спектра оператора A осталось понять, что представляет собой точка 0.

Как мы выяснили ранее, $\lambda = 0$ не является собственным значением. В пункте 1 мы уже доказали, что оператор A является взаимно однозначным и замыкание его образа

$$\overline{\mathrm{Im} A} = L_2[0, 4]$$

В силу того, что

$$\mathrm{Im}A \neq L_2[0,4]$$

заключаем, что $\lambda = 0$ принадлежит непрерывному спектру.

Таким образом, спектр оператора A

$$\sigma(A) = \{0, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$$

3. <u>Спектральное разложение</u>.

По теореме Гильберта-Шмидта у компактного самосопряженного оператора существует ортогональный базис из собственных функций в $\Big(\mathrm{Ker}A\Big)^{\perp}$. В нашем случае оказалось, что $\mathrm{Ker}A = \{0\}$, поэтому собственные функции

$$u_0, u_1, u_2 ...$$

будут образовывать ортогональный базис во всем пространстве $L_2[0,4]$ и для $\forall u \in L_2[0,4]$ будут выполнены равенства

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(u, u_k)}{(u_k, u_k)} u_k\,;$$

$$Au = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Au, u_k)}{(u_k, u_k)} u_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(u, Au_k)}{(u_k, u_k)} u_k = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \frac{(u, u_k)}{(u_k, u_k)} u_k\,.$$

Спектральное разложение оператора A получено.

4. <u>Резольвента оператора A</u>

Рассмотрим λ, не входящее в спектр $\sigma(A)$, и произвольную функцию $g \in L_2[0,4]$.

Для поиска резольвенты нужно решить уравнение

$$Au = \lambda u + g(x), \quad u \in L_2[0,4]. \tag{8}$$

С этой целью выпишем разложения u, Au и $g(x)$ по базису $\{u_k\}$

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k u_k\,, \qquad Au = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \beta_k u_k\,, \qquad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k u_k\,,$$

где

$$\beta_k = \frac{(u, u_k)}{(u_k, u_k)}\,; \qquad \alpha_k = \frac{(g(x), u_k)}{(u_k, u_k)}.$$

Подставив все разложения в уравнение, получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \beta_k u_k = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k u_k + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k u_k$$

Приравнивая коэффициенты при каждой базисной функции, находим

$$(\lambda_k - \lambda)\beta_k = \alpha_k\,, \quad k = 0, 1, ... \tag{9}$$

Поскольку

$$\lambda \neq \lambda_k, \qquad k = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

то из уравнения (9) находим

$$\beta_k = \frac{\alpha_k}{\lambda_k - \lambda}$$

Следовательно, кандидатом на решение уравнения (8) будет ряд

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k u_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{\lambda_k - \lambda} u_k$$

<u>Проверим, что этот ряд сходится в $L_2[0, 4]$</u>.

Поскольку существует предел

$$\lim_{k \to \infty} (\lambda_k - \lambda)^2 = \lambda^2 \neq 0$$

то найдется такое число $C > 0$, что для всех k

$$(\lambda_k - \lambda)^2 \geqslant C$$

Поэтому

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\alpha_k|^2}{(\lambda_k - \lambda)^2} \|u_k\|^2 \leqslant \frac{1}{C} \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k|^2 \|u_k\|^2 = \frac{1}{C}\ \|g(x)\|^2$$

Значит,

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{\lambda_k - \lambda} u_k$$

действительно является решением уравнения (8).

Таким образом, резольвента оператора A – это оператор

$$R_\lambda(A)g = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(g, u_k)}{(\lambda_k - \lambda)\, \|u_k\|^2} u_k$$

5. <u>Решение уравнения</u>

$$u = Au + x, \quad u \in L_2[0,4]. \tag{10}$$

Выпишем разложения u, Au и x по базису $\{u_k\}$

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k u_k\,, \qquad Au = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \beta_k u_k\,, \qquad \text{где} \quad \beta_k = \frac{(u, u_k)}{(u_k, u_k)}\,;$$

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k u_k\,, \qquad \text{где} \quad \alpha_k = \frac{(x, u_k)}{(u_k, u_k)}.$$

Коэффициенты разложения α_k вычислим позднее.

Подставив все разложения в уравнение, получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k u_k = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \beta_k u_k + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k u_k$$

Приравнивая коэффициенты при каждой базисной функции, находим

$$(1 - \lambda_k)\beta_k = \alpha_k\,, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{11}$$

<u>Докажем, что 1 не является собственным значением оператора A.</u>

Поскольку у оператора A есть только одно положительное собственное значение λ_0, то проверим, что оно не равно 1. Действительно, из рисунка 1 видно, что

$$0 < \mu_0 < \frac{6}{5} \quad \Rightarrow \quad \lambda_0 = \frac{32}{\mu_0^2} > \frac{32 \cdot 25}{36} = \frac{200}{9} > 1\,,$$

что и требовалось доказать.

Поэтому из уравнения (11) находим

$$\beta_k = \frac{\alpha_k}{1-\lambda_k}$$

Следовательно, кандидатом на решение уравнения (10) будет ряд

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k u_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{1-\lambda_k} u_k$$

<u>Проверим, что этот ряд сходится в $L_2[0,4]$</u>.

Поскольку

$$|1-\lambda_0|^2 > \left(\frac{200}{9} - 1\right)^2 > 400 > 1\,, |1-\lambda_k|^2 > 1\,, \quad k = 1, 2, ...$$

то справедлива оценка

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\alpha_k|^2}{|1-\lambda_k|^2} \|u_k\|^2 \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k|^2 \|u_k\|^2 = \|x\|^2 = \int\limits_0^4 x^2 dx = \frac{64}{3}$$

Значит,

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{1-\lambda_k} u_k$$

действительно является решением уравнения (10). Теперь осталось только вычислить коэффициенты α_k

$$\alpha_k = \frac{(x, u_k)}{(u_k, u_k)} = \frac{\int\limits_0^4 x \sin\left(\frac{\mu_k x}{4}\right) dx}{\int\limits_0^4 \sin^2\left(\frac{\mu_k x}{4}\right) dx} =$$

$$= \frac{-\frac{4x}{\mu_k} \cos\left(\frac{\mu_k x}{4}\right)\Big|_0^4 + \frac{4}{\mu_k} \int\limits_0^4 \cos\left(\frac{\mu_k x}{4}\right) dx}{\frac{1}{2} \int\limits_0^4 \left(1 - \cos\left(\frac{\mu_k x}{2}\right)\right) dx} = \frac{-\frac{16}{\mu_k} \cos \mu_k + \frac{16}{\mu_k^2} \sin \mu_k}{2 - \frac{1}{\mu_k} \sin(2\mu_k)}$$

$$\alpha_0 = \frac{(x, u_0)}{(u_0, u_0)} = \frac{\int\limits_0^4 x \operatorname{sh}\left(\frac{\mu_0 x}{4}\right) dx}{\int\limits_0^4 \operatorname{sh}^2\left(\frac{\mu_0 x}{4}\right) dx} =$$

$$= \frac{\frac{4x}{\mu_0} \operatorname{ch}\left(\frac{\mu_0 x}{4}\right)\Big|_0^4 - \frac{4}{\mu_0}\int\limits_0^4 \operatorname{ch}\left(\frac{\mu_0 x}{4}\right) dx}{\frac{1}{2}\int\limits_0^4 \left(\operatorname{ch}\left(\frac{\mu_0 x}{2}\right) - 1\right) dx} = \frac{\frac{16}{\mu_0}\operatorname{ch}\mu_0 - \frac{16}{\mu_0^2}\operatorname{sh}\mu_0}{\frac{1}{\mu_0}\operatorname{sh}(2\mu_0) - 2} =$$

Решение задачи 1 завершено.

Решим еще одну задачу. Эта задача проще рассмотренной выше. Она предлагалась в студенческой экзаменационной контрольной работе по УМФ в 2015-2016 учебном году.

Задача 2 *В пространстве* $\mathcal{H} = L_2[0,1]$ *задан оператор* $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *вида*

$$(Au)(x) = \int\limits_0^x \frac{u(t)}{1+i} dt + \int\limits_x^1 \frac{u(t)}{1-i} dt, \quad 0 \le x \le 1\,, \quad u \in \mathcal{H}.$$

Найти в $\mathcal{H}$ *ортогональный базис из собственных функций оператора* A *и решить уравнение*

$$u(x) = (Au)(x) + \exp\left(\frac{i\pi x}{2}\right), \quad 0 \le x \le 1\,.$$

Решение.

Представим оператор A в виде

$$(Au)(x) = \int\limits_0^1 K(t,x) u(t) dt, \quad u \in L_2[0,1], \quad x \in [0,1],$$

где

$$K(t,x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+i}, & 0 \le t \le x \le 1, \\ \\ \dfrac{1}{1-i}, & 0 \le x \le t \le 1. \end{cases}$$

Поскольку $K(t,x) \in L_2\Big([0,1] \times [0,1]\Big)$ и $K(t,x) = \overline{K(x,t)}$ для всех $x \in [0,1]$ и всех $t \in [0,1]$, то в силу свойств 1 и 3 оператор A является компактным самосопряженным оператором.

Проверим, что A является взаимно-однозначным оператором.

Для этого рассмотрим функцию $u \in C[0,1]$ и функцию

$$v(x) = (Au)(x) = \frac{1}{1+i}\int\limits_0^x u(t)dt + \frac{1}{1-i}\int\limits_x^1 u(t)dt \tag{12}$$

Из свойств интегралов с переменными верхним и нижним пределами и непрерывности функции u получаем, что функция v дифференцируема на $[0,1]$.

Продифференцируем равенство (12).

$$v'(x) = \frac{u(x)}{1+i} - \frac{u(x)}{1-i} = \frac{1-i-1-i}{2}u(x) = -iu(x) \tag{13}$$

Поскольку при дифференцировании функции, отличающиеся на константу, дают один и тот же результат, то для эквивалентности соотношений (12) и (13) добавим к (13) краевое условие. Поскольку

$$v(0) = \frac{1}{1-i}\int\limits_0^1 u(t)dt\,, \qquad v(1) = \frac{1}{1+i}\int\limits_0^1 u(t)dt\,,$$

то выполнено равенство

$$(1-i)v(0) = (1+i)v(1)\,.$$

Таким образом,

$$A\left(C[0,1]\right) = \Big\{v \in C^1[0,1] :\ (1-i)v(0) = (1+i)v(1)\Big\} \tag{14}$$

Поскольку множество (14) всюду плотно в $L_2[0,1]$, то

$$\overline{A\left(C[0,1]\right)} = L_2[0,1] \;\Rightarrow\; \overline{\mathrm{Im} A} = L_2[0,1] \;\Rightarrow\; \mathrm{Ker} A = \Big(\mathrm{Im} A\Big)^{\perp} = \{0\}$$

Следовательно, оператор A является взаимно-однозначным.

Теперь найдем собственные значения и собственные функции оператора A.

Заметим, что в силу самосопряженности оператора A все его собственные значения действительные, а в силу взаимной однозначности оператора A число $\lambda = 0$ не является его собственным значением.

Рассмотрим уравнение

$$Au = \lambda u, \quad u \in L_2[0,1],$$

$$\frac{1}{1+i}\int\limits_0^x u(t)dt + \frac{1}{1-i}\int\limits_x^1 u(t)dt = \lambda u, \quad u \in L_2[0,1]. \tag{15}$$

Поскольку $u \in L_2[0,1]$, то по свойствам интегралов с переменными верним и нижним пределами получаем, что левая часть уравнения (15) является непрерывной функцией, значит, и в правой части $u \in C[0,1]$.

Снова обозначим $v = Au$ и воспользуемся формулами (13) и (14), полученными при доказательстве взаимной однозначности A

$$v'(x) = \lambda u'(x) = -iu(x),$$

$$u(0) = \frac{1}{\lambda}v(0), \quad u(1) = \frac{1}{\lambda}v(1), \quad \Rightarrow \quad (1-i)u(0) = (1+i)u(1).$$

Решая уравнение

$$u' = -\frac{i}{\lambda}u, \qquad (1-i)u(0) = (1+i)u(1),$$

получаем:

$$u(x) = c\,\exp\left(-\frac{ix}{\lambda}\right)$$

$$(1-i)c = (1+i)c \cdot \exp\left(-\frac{i}{\lambda}\right)$$

Поскольку нас интересует случай $c \neq 0$, то

$$\exp\left(-\frac{i}{\lambda}\right) = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{2} = -i = \exp\left(-i\frac{\pi}{2} + 2\pi n i\right)$$

Следовательно,

$$-\frac{i}{\lambda} = -i\frac{\pi}{2} + 2\pi n i$$

$$\lambda_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - 2\pi n}$$

Соответствующие этим собственным значениям собственные функции имеют вид

$$u_n = \exp\left(-\frac{ix}{\lambda_n}\right) = \exp\left\{\left(-i\frac{\pi}{2} + 2\pi n i\right)x\right\}, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

По теореме Гильберта-Шмидта у компактного самосопряженного оператора существует ортогональный базис из собственных функций в $\left(\mathrm{Ker}A\right)^{\perp}$. В нашем случае оказалось, что $\mathrm{Ker}A = \{0\}$, поэтому собственные функции $\{u_n\}$ будут образовывать ортогональный базис во всем пространстве $u \in L_2[0,1]$ и для $\forall u \in L_2[0,1]$ будут выполнены равенства

$$u = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(u, u_n)}{(u_n, u_n)} u_n\,;$$

$$Au = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(Au, u_n)}{(u_n, u_n)} u_n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(u, Au_n)}{(u_n, u_n)} u_n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda_n \frac{(u, u_n)}{(u_n, u_n)} u_n\,.$$

Итак, мы получили спектральное разложение оператора A.

Перейдем к решению уравнения

$$u(x) = (Au)(x) + \exp\left(\frac{i\pi x}{2}\right), \quad 0 \le x \le 1\,. \tag{16}$$

Выпишем разложения u, Au и $\exp\left(\frac{i\pi x}{2}\right)$ по базису $\{u_n\}$

$$u = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \beta_n u_n\,, \qquad Au = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda_n \beta_n u_n\,, \qquad \text{где} \quad \beta_n = \frac{(u, u_n)}{(u_n, u_n)}\,;$$

$$\exp\left(\frac{i\pi x}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n u_n\,, \qquad \text{где} \quad \alpha_n = \frac{\left(\exp\left(\dfrac{i\pi x}{2}\right), u_n\right)}{(u_n, u_n)}.$$

Коэффициенты разложения α_n вычислим позднее.

Подставив все разложения в уравнение (16), получим

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \beta_n u_n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda_n \beta_n u_n + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n u_n$$

Приравнивая коэффициенты при каждой базисной функции, находим

$$(1-\lambda_n)\beta_n = \alpha_n\,, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ... \tag{17}$$

Заметим, что 1 не является собственным значением оператора A, поскольку для всех n

$$|\lambda_n| = \left|\frac{1}{\dfrac{\pi}{2} - 2\pi n}\right| \leqslant \frac{2}{\pi} < 1$$

Поэтому из уравнения (17) находим

$$\beta_n = \frac{\alpha_n}{1-\lambda_n}$$

Следовательно, кандидатом на решение уравнения (16) будет ряд

$$u = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \beta_n u_n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{1-\lambda_n} u_n$$

Проверим, что этот ряд сходится в $L_2[0,1]$.

Поскольку

$$|1-\lambda_n| = \left|1 - \frac{1}{\dfrac{\pi}{2} - 2\pi n}\right| > 1 - \frac{2}{\pi} > \frac{1}{3}\,, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

то справедлива оценка

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{|\alpha_n|^2}{|1-\lambda_n|^2} \|u_n\|^2 \leq 9 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_n|^2 \|u_n\|^2 = 9 \left\|\exp\left(\frac{i\pi x}{2}\right)\right\|^2 =$$

$$= 9\int\limits_0^1 \left|\exp\left(\frac{i\pi x}{2}\right)\right|^2 dx = 9$$

Значит,

$$u = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{1-\lambda_n} u_n$$

действительно является решением уравнения (16).

Теперь осталось только вычислить коэффициенты α_n

$$\alpha_n = \frac{\left(\exp\left(\frac{i\pi x}{2}\right), u_n\right)}{(u_n, u_n)} = \frac{\int\limits_0^1 \exp\left(\frac{i\pi x}{2}\right) \cdot \exp\left\{\left(i\frac{\pi}{2} - 2\pi n i\right) x\right\} dx}{\int\limits_0^1 \left|\exp\left\{\left(-i\frac{\pi}{2} + 2\pi n i\right) x\right\}\right|^2 dx} =$$

$$= \int\limits_0^1 \exp\left\{(i\pi - 2\pi n i)\, x\right\} dx = \left.\frac{\exp\left\{(i\pi - 2\pi n i)\, x\right\}}{(i\pi - 2\pi n i)}\right|_0^1 = \frac{-2}{(i\pi - 2\pi n i)}$$

Решение задачи 2 завершено.

На этом мы заканчиваем решение задач, связанных с самосопряжёнными интегральными операторами.

Замечание. В связи с тем, что по теореме Гильберта-Шмидта самосопряжённые интегральные операторы обладают не более, чем счётным, ортогональным базисом из собственных функций, то для этих операторов может быть поставлена начально-краевая задача. Методы решения начально-краевых задач мы подробно разбирали в начале семестра и сейчас на этом останавливаться не будем.

Спасибо за внимание.
Не болейте!