Функция Грина линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами в $S'(\mathbb{R})$. Примеры решения задач

Самарова С.С.

ФОПФ, 3 курс, УМФ

Учебное пособие для дистанционных занятий

В этом пособии мы рассмотрим методы решения задач на вычисление функции Грина линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами в $S'(\mathbb{R})$

$$L = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k}{dx^k}$$

где $a_1, a_2 \ldots, a_k$ – комплексные числа.

Определение 1 *Функцией Грина оператора* L *называют решение* $\mathcal{E}(x) \in S'(\mathbb{R})$ *уравнения*

$$L\mathcal{E}(x) = \delta(x) \tag{1}$$

Хорошо известно, что общее решение $\mathcal{E}(x)$ линейного неоднородного уравнения (1) представляет собой сумму любого частного решения $\mathcal{E}_{\text{част}}(x)$ неоднородного (1) и общего решения $\mathcal{E}_{\text{одн}}(x)$ однородного уравнения

$$L\mathcal{E}(x) = 0\,, \tag{2}$$

то есть

$$\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}_{\text{част}}(x) + \mathcal{E}_{\text{одн}}(x)$$

Отсюда следует, что функция Грина будет единственной тогда и только тогда, когда однородное уравнение (2) имеет только нулевое решение в $S'(\mathbb{R})$.

Этот простой факт часто используется при решении задач. Независимо от того, что требуется сделать в задаче: доказать, что функция Грина единственная, или же найти все функции Грина, начинать решение стоит с поиска всех решений однородного уравнения (2).

Задача 1 (задание 2.4 (в)) *В пространстве $S'(\mathbb{R})$ рассматривается оператор*

$$L = \frac{d^2}{dx^2} - \frac{d}{dx} - 6$$

1. Доказать, что оператор L имеет единственную функцию Грина.

2. Найти функцию Грина $\mathcal{E}(x)$ оператора L.

Решение.

1. Найдем сначала все решения однородного уравнения

$$\mathcal{E}''(x) - \mathcal{E}'(x) - 6\,\mathcal{E}(x) = 0 \tag{3}$$

в пространстве $S'(\mathbb{R})$. Для этого заметим, что в пространстве $S'(\mathbb{R})$ преобразование Фурье является взаимно-однозначным соответствием, и возьмем преобразование Фурье от обеих частей уравнения (3)

$$\begin{gathered}(-i\xi)^2 F\big[\mathcal{E}\big](\xi) - (-i\xi)F\big[\mathcal{E}\big](\xi) - 6F\big[\mathcal{E}\big](\xi) = 0\\ (-\xi^2 + i\xi - 6)F\big[\mathcal{E}\big](\xi) = 0\\ -(\xi - 3i)(\xi + 2i)F\big[\mathcal{E}\big](\xi) = 0 \qquad (4)\end{gathered}$$

Заметим, что при всех $\xi \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство

$$\big|-(\xi - 3i)(\xi + 2i)\big| \geqslant 3 \cdot 2$$

Как мы уже знаем (а многие из Вас уже сдали задачу по теме «Решение уравнений в $S'(\mathbb{R})$»), в этом случае уравнение (4) имеет только нулевое решение в пространстве $S'(\mathbb{R})$.

Отсюда следует, что функция Грина для оператора L будет единственной.

2. Найдем функцию Грина $\mathcal{E}(x)$.

   1 способ. (Использование преобразования Фурье)

   Поскольку функция Грина является решением уравнения

$$\mathcal{E}''(x) - \mathcal{E}'(x) - 6\mathcal{E}(x) = \delta(x),$$

   то возьмем преобразование Фурье от его обеих частей

$$(-i\xi)^2 F\big[\mathcal{E}\big](\xi) - (-i\xi) F\big[\mathcal{E}\big](\xi) - 6F\big[\mathcal{E}\big](\xi) = 1$$
$$(-\xi^2 + i\xi - 6) F\big[\mathcal{E}\big](\xi) = 1$$
$$-(\xi - 3i)(\xi + 2i) F\big[\mathcal{E}\big](\xi) = 1 \tag{5}$$

   В пункте 1 мы уже выяснили, что при всех $\xi \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство

$$\big|-(\xi - 3i)(\xi + 2i)\big| \geqslant 6\,,$$

   значит,

$$\left|\frac{-1}{(\xi - 3i)(\xi + 2i)}\right| \leqslant \frac{1}{6}$$

   Отсюда следует, что функция

$$\frac{-1}{(\xi - 3i)(\xi + 2i)}$$

   является функцией медленного роста и задает на $S(\mathbb{R})$ регулярный функционал. Таким образом, уравнение (5) имеет только одно решение, и это решение имеет вид

$$F\big[\mathcal{E}\big](\xi) = \frac{-1}{(\xi - 3i)(\xi + 2i)} \tag{6}$$

   Для вычисления обратного преобразования Фурье разложим правую часть формулы (6) в сумму простейших дробей:

$$\frac{-1}{(\xi-3i)(\xi+2i)} = \frac{A}{\xi-3i} + \frac{B}{\xi+2i}$$

Вычисляя коэффициенты A и B

$$A = \left.\frac{-1}{\xi+2i}\right|_{\xi=3i} = \frac{-1}{5i} = \frac{i}{5}\ ,$$

$$B = \left.\frac{-1}{\xi-3i}\right|_{\xi=-2i} = \frac{1}{5i} = -\frac{i}{5}\ ,$$

получаем

$$\frac{-1}{(\xi-3i)(\xi+2i)} = \frac{i}{5(\xi-3i)} - \frac{i}{5(\xi+2i)}\ .$$

Тогда

$$\mathcal{E}(x) = F^{-1}\Big[\ \frac{-1}{(\xi-3i)(\xi+2i)}\ \Big](x) =$$

$$= \frac{i}{5}\ F^{-1}\Big[\ \frac{1}{\xi-3i}\ \Big](x) - \frac{i}{5}\ F^{-1}\Big[\ \frac{1}{\xi+2i}\ \Big](x)$$

Воспользовавшись формулой для преобразования Фурье от рациональной дроби

$$F^{-1}\left[\frac{1}{x+b+ia}\right](y) = -i\,\mathrm{sign}\,a\ \theta(ay)\ e^{-ay+iby}, \quad a\neq 0,$$

(см. пособие для дистанционного обучения «Преобразование Фурье обобщенных функций из $S'(\mathbb{R}^m)$», задача 12), окончательно получаем

$$\mathcal{E}(x) = -\frac{1}{5}\,\theta(-x)\ e^{3x} - \frac{1}{5}\,\theta(x)\ e^{-2x}$$

2 способ. (Использование обыкновенных дифференциальных уравнений)

Подберём частное решение уравнения

$$\mathcal{E}''(x) - \mathcal{E}'(x) - 6\mathcal{E}(x) = \delta(x)$$

в $S'(\mathbb{R})$ из других соображений.

Для этого найдём общее решение однородного дифференциального уравнения в $C^2(\mathbb{R})$, решив его характеристическое уравнение

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -2.$$

$$y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x}$$

Поскольку функции e^{3x} и e^{-2x} не являются функциями медленного роста, то построим на их основе функцию медленного роста

$$\mathcal{E}(x) = C_1 e^{3x}\Big(-\theta(-x)\Big) + C_2 e^{-2x}\,\theta(x)$$

и подберем константы C_1 и C_2 так, чтобы $\mathcal{E}(x)$ была решением неоднородного уравнения в $S'(\mathbb{R})$.

Так как у функции медленного роста $\mathcal{E}(x)$ имеется разрыв в нуле со скачком

$$h_{\mathcal{E}} = \mathcal{E}(+0) - \mathcal{E}(-0) = C_1 + C_2 = y(0)$$

то, вспоминая, как дифференцируются регулярные функционалы, построенные при помощи функций такого типа, получаем

$$\mathcal{E}'(x) = 3C_1 e^{3x}\Big(-\theta(-x)\Big) - 2C_2 e^{-2x}\,\theta(x) + y(0)\,\delta(x)$$

Для второй производной $\mathcal{E}''(x)$ соответственно имеем

$$\mathcal{E}''(x) = 9C_1 e^{3x}\Big(-\theta(-x)\Big) + 4C_2 e^{-2x}\,\theta(x) + h_{\mathcal{E}'}\,\delta(x) + y(0)\,\delta'(x)$$

где

$$h_{\mathcal{E}'} = \mathcal{E}'(+0) - \mathcal{E}'(-0) = 3C_1 - 2C_2 = y'(0)$$

Так как e^{3x} и e^{-2x} являются решениями уравнения

$$y''(x) - y(x) - 6y(x) = 0$$

то

$$\mathcal{E}''(x) - \mathcal{E}'(x) - 6\,\mathcal{E}(x) = y'(0)\,\delta(x) + y(0)\,\delta'(x) - y(0)\,\delta(x)$$

Для того, чтобы $\mathcal{E}(x)$ была решением уравнения

$$\mathcal{E}''(x) - \mathcal{E}'(x) - 6\,\mathcal{E}(x) = \delta(x)$$

необходимо, чтобы

$$\begin{cases} y(0) = 0, \\ y'(0) - y(0) = 1, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Отсюда вытекает, что коэффициенты C_1 и C_2 можно найти, решая задачу Коши

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0$$
$$\begin{cases} y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

В этом случае

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ 3C_1 - 2C_2 = 1, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} C_2 = -C_1, \\ 3C_1 + 2C_1 = 1, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} C_1 = \dfrac{1}{5}, \\ C_2 = -\dfrac{1}{5}, \end{cases}$$

Таким образом,

$$\mathcal{E}(x) = -\frac{1}{5}\,\theta(-x)\;e^{3x} - \frac{1}{5}\,\theta(x)\;e^{-2x}$$

Ответ. $\qquad \mathcal{E}(x) = -\dfrac{1}{5}\,\theta(-x)\;e^{3x} - \dfrac{1}{5}\,\theta(x)\;e^{-2x}$

Замечание 1.

Способ 2 можно применить для нахождения функции Грина $\mathcal{E}_{\text{част}}(x)$ любого линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами

$$L = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k}{dx^k}$$

Для этого нужно решить задачу Коши

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}(x) = 0$$

$$\begin{cases} y(0) = 0, \\ y'(0) = 0, \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(0) = \dfrac{1}{a_n}, \end{cases}$$

а затем представить решение в виде

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x)$$

где функция $y_1(x)$ содержит слагаемые, в которые входят $e^{\lambda x}$ с $\mathrm{Re}\lambda \leq 0$, а $y_2(x)$ – слагаемые, в которые входят $e^{\lambda x}$ с $\mathrm{Re}\lambda > 0$.

Тогда функция Грина $\mathcal{E}_{\text{част}}(x)$ имеет вид

$$\mathcal{E}_{\text{част}}(x) = y_1(x)\,\theta(x) - y_2(x)\,\theta(-x)$$

Решим еще одну задачу, в которой функция Грина будет неединственной.

Задача 2 *В пространстве $S'(\mathbb{R})$ найти все функции Грина оператора*

$$L = \frac{d^4}{dx^4} - \frac{d^3}{dx^3}$$

Решение.

Найдем сначала все решения однородного уравнения

$$\mathcal{E}^{(4)}_{\text{одн}}(x) - \mathcal{E}^{(3)}_{\text{одн}}(x) = 0 \tag{7}$$

в пространстве $S'(\mathbb{R})$. Для этого возьмем преобразование Фурье от обеих частей уравнения (7)

$$(-i\xi)^4 F\big[\mathcal{E}_{\text{одн}}\big](\xi) - (-i\xi)^3 F\big[\mathcal{E}_{\text{одн}}\big](\xi) = 0$$

$$(\xi^4 - i\xi^3) F\big[\mathcal{E}_{\text{одн}}\big](\xi) = 0$$

$$\xi^3(\xi - i) F\big[\mathcal{E}_{\text{одн}}\big](\xi) = 0 \tag{8}$$

Поскольку $\xi \in \mathbb{R}$, то

$$\left|\xi - i\right| \geqslant 1$$

следовательно,

$$\left| \frac{1}{\xi - i} \right| \leqslant 1 \tag{9}$$

Принимая во внимание неравенство (9) и тот факт, что $\xi = 0$ – это нуль третьего порядка для функции

$$\xi^3(\xi - i)\,,$$

получаем общее решение уравнения (8) в пространстве $S'(\mathbb{R})$

$$F\big[\mathcal{E}_{\text{одн}}\big](\xi) = C_1\delta(\xi) + C_2\delta'(\xi) + C_3\delta''(\xi)\,,$$

где C_1, C_2, C_3 - произвольные константы. Тогда

$$\mathcal{E}_{\text{одн}}(x) = F^{-1}\Big[C_1\delta(\xi) + C_2\delta'(\xi) + C_3\delta''(\xi)\Big](x) =$$

$$= C_1F^{-1}\Big[\delta(\xi)\Big](x) + C_2F^{-1}\Big[\delta'(\xi)\Big](x) + C_3F^{-1}\Big[\delta''(\xi)\Big](x) =$$

$$= C_1F^{-1}\Big[\delta(\xi)\Big](x) + C_2ixF^{-1}\Big[\delta(\xi)\Big](x) + C_3(ix)^2F^{-1}\Big[\delta(\xi)\Big](x) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}(C_1 + iC_2x - C_3x^2) = \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2x + \tilde{C}_3x^2$$

Таким образом, решение однородного уравнения (7) в пространстве $S'(\mathbb{R})$ имеет вид

$$\mathcal{E}_{\text{одн}}(x) = \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2x + \tilde{C}_3x^2$$

где $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$, $\tilde{C}_3$ - произвольные константы.

Теперь найдем какое-нибудь частное решение $\mathcal{E}_{\text{част}}(x)$ неоднородного уравнения

$$\mathcal{E}^{(4)}_{\text{част}}(x) - \mathcal{E}^{(3)}_{\text{част}}(x) = \delta(x) \tag{10}$$

в пространстве $S'(\mathbb{R})$.

1 способ. (Использование преобразования Фурье)

Возьмем преобразование Фурье от обеих частей уравнения

$$(-i\xi)^4 F\big[\mathcal{E}_{\text{част}}\big](\xi) - (-i\xi)^3 F\big[\mathcal{E}_{\text{част}}\big](\xi) = 1$$

$$(\xi^4 - i\xi^3) F\big[\mathcal{E}_{\text{част}}\big](\xi) = 1$$

$$\xi^3(\xi - i) F\big[\mathcal{E}_{\text{част}}\big](\xi) = 1 \tag{11}$$

Для того, чтобы найти частное решение уравнения (11) в пространстве $S'(\mathbb{R})$, разложим

$$\frac{1}{\xi^3(\xi - i)}$$

на простейшие дроби:

$$\frac{1}{\xi^3(\xi - i)} = \frac{A}{\xi - i} + \frac{B}{\xi^3} + \frac{C}{\xi^2} + \frac{D}{\xi}$$

Коэффициенты A и B можно найти сразу

$$A = \frac{1}{\xi^3}\bigg|_{\xi = i} = \frac{1}{i^3} = i\ ,$$

$$B = \frac{1}{\xi - i}\bigg|_{\xi = 0} = \frac{1}{-i} = i\ .$$

Коэффициенты C и D определим вычитанием:

$$\frac{C}{\xi^2} + \frac{D}{\xi} = \frac{1}{\xi^3(\xi - i)} - \frac{i}{\xi - i} - \frac{i}{\xi^3} = \frac{1 - i\xi^3 - i\xi - 1}{\xi^3(\xi - i)} =$$

$$= \frac{-i\xi\big(\xi^2 + 1\big)}{\xi^3(\xi - i)} = \frac{(-i)\big(\xi - i)(\xi + i\big)}{\xi^2(\xi - i)} = -\frac{i}{\xi} + \frac{1}{\xi^2}$$

Таким образом,

$$\frac{1}{\xi^3(\xi - i)} = \frac{i}{\xi - i} - \frac{i}{\xi} + \frac{1}{\xi^2} + \frac{i}{\xi^3}$$

В силу неравенства (9) функция

$$\frac{1}{(\xi - i)}$$

является функцией медленного роста. Поэтому частное решение уравнения (11) имеет вид

$$F\big[\mathcal{E}_{\text{част}}\big](\xi)=\frac{i}{\xi-i}-i\,\mathcal{P}\frac{1}{\xi}+\mathcal{P}\frac{1}{\xi^2}+i\,\mathcal{P}\frac{1}{\xi^3}$$

Действительно, поскольку в $S'(\mathbb{R})$ для любого натурального n выполнены равенства

$$\xi^n\,\mathcal{P}\frac{1}{\xi^n}=1$$

то

$$\xi^3(\xi-i)\left(\frac{i}{\xi-i}-i\,\mathcal{P}\frac{1}{\xi}+\mathcal{P}\frac{1}{\xi^2}+i\,\mathcal{P}\frac{1}{\xi^3}\right)=i\xi^3-i\xi^2(\xi-i)+\xi(\xi-i)+i(\xi-i)=1$$

Вычисляя обратное преобразование Фурье, получаем

$$\mathcal{E}_{\text{част}}(x)=F^{-1}\left[\,\frac{i}{\xi-i}-i\,\mathcal{P}\frac{1}{\xi}+\mathcal{P}\frac{1}{\xi^2}+i\,\mathcal{P}\frac{1}{\xi^3}\,\right](x)=$$

$$=iF^{-1}\left[\,\frac{1}{\xi-i}\,\right](x)-iF^{-1}\left[\mathcal{P}\frac{1}{\xi}\right](x)+F^{-1}\left[\mathcal{P}\frac{1}{\xi^2}\right](x)+iF^{-1}\left[\mathcal{P}\frac{1}{\xi^3}\right](x)$$

Найдем все обратные преобразования Фурье.

1. С помощью полученной ранее формулы для обратного преобразования Фурье рациональной дроби

$$F^{-1}\left[\,\frac{1}{x+b+ia}\,\right](y)=-i\,\mathrm{sgn}a\;\theta(ay)\;e^{-ay+iby},\quad a\neq 0,$$

(см.пособие для дистанционного обучения «Преобразование Фурье обобщенных функций из $S'(\mathbb{R}^m)$», задача 12) получаем

$$F^{-1}\left[\,\frac{1}{\xi-i}\,\right](x)=i\,\theta(-x)\;e^{x}$$

2. Из результата задачи 1.14 в) задания (см. пособие «Преобразование Фурье обобщенных функций из $S'(\mathbb{R}^m)$», задача 6) следует, что

$$F^{-1}\left[\mathcal{P}\frac{1}{\xi}\right](x)=-\frac{i}{2}\,\mathrm{sign}\,x$$

3. По определению функции $\mathcal{P}\dfrac{1}{\xi^n}$ имеем

$$F^{-1}\left[\mathcal{P}\frac{1}{\xi^2}\right](x) = F^{-1}\left[-\frac{d}{d\xi}\,\mathcal{P}\frac{1}{\xi}\right](x) = -ixF^{-1}\left[\mathcal{P}\frac{1}{\xi}\right](x) = -\frac{x}{2}\operatorname{sign} x$$

$$F^{-1}\left[\mathcal{P}\frac{1}{\xi^3}\right](x) = F^{-1}\left[\frac{1}{2}\frac{d^2}{d\xi^2}\,\mathcal{P}\frac{1}{\xi}\right](x) = \frac{(ix)^2}{2}F^{-1}\left[\mathcal{P}\frac{1}{\xi}\right](x) = \frac{ix^2}{4}\operatorname{sign} x$$

Следовательно,

$$\mathcal{E}_{\text{част}}(x) = -\theta(-x)\, e^x - \frac{1}{2}\operatorname{sign} x - \frac{x}{2}\operatorname{sign} x - \frac{x^2}{4}\operatorname{sign} x$$

Переписывая эту формулу с учетом равенства

$$\operatorname{sign} x = 2\theta(x) - 1\,,$$

получаем

$$\mathcal{E}_{\text{част}}(x) = -\,\theta(-x)\, e^x - \theta(x) - x\,\theta(x) - \frac{x^2}{2}\,\theta(x) + \frac{1}{2} + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}$$

Таким образом, все функции Грина имеют вид

$$\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}_{\text{част}}(x) + \mathcal{E}_{\text{одн}}(x) = -\,\theta(-x)\, e^x - \theta(x) - x\,\theta(x) - \frac{x^2}{2}\,\theta(x) + \widehat{C}_1 + \widehat{C}_2 x + \widehat{C}_3 x^2$$

Ответ. $\qquad \mathcal{E}(x) = -\,\theta(-x)\, e^x - \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2}\right)\theta(x) + \widehat{C}_1 + \widehat{C}_2 x + \widehat{C}_3 x^2$

2 способ. (Использование обыкновенных дифференциальных уравнений)

Для поиска частного решения уравнения $\mathcal{E}_{\text{част}}(x)$ неоднородного уравнения

$$\mathcal{E}^{(4)}_{\text{част}}(x) - \mathcal{E}^{(3)}_{\text{част}}(x) = \delta(x)$$

в пространстве $S'(\mathbb{R})$ решим задачу Коши

$$y^{(4)} - y^{(3)} = 0$$

$$\begin{cases} y(0) = 0, \\ y'(0) = 0, \\ y''(0) = 0, \\ y'''(0) = 1. \end{cases}$$

Сначала решим однородное уравнение

$$y^{(4)} - y^{(3)} = 0$$

$$\lambda^4 - \lambda^3 = 0$$

$$\lambda^3(\lambda - 1) = 0$$

$$\lambda_{1,2,3} = 0, \quad \lambda_4 = 1$$

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4\, e^x$$

Найдем константы C_1, C_2, C_3, C_4 из начальных условий

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_4 = 0 \\ y'(0) = C_2 + C_4 = 0 \\ y''(0) = 2C_3 + C_4 = 0 \\ y'''(0) = C_4 = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} C_1 = -1 \\ C_2 = -1 \\ C_3 = -\dfrac{1}{2} \\ C_4 = 1 \end{cases}$$

и выпишем решение задачи Коши

$$y = -1 - x - \frac{x^2}{2} + e^x$$

Тогда

$$\mathcal{E}_{\text{част}}(x) = -\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)\theta(x) - \theta(-x)\, e^x$$

Таким образом, все функции Грина имеют вид

$$\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}_{\text{част}}(x) + \mathcal{E}_{\text{одн}}(x) = -\,\theta(-x)\ e^x - \theta(x) - x\,\theta(x) - \frac{x^2}{2}\ \theta(x) + \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 x + \tilde{C}_3 x^2$$

Ответ. $$\mathcal{E}(x) = -\,\theta(-x)\ e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)\theta(x) + \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 x + \tilde{C}_3 x^2$$

Замечание 2. Стоит отметить, что общее решение $\mathcal{E}_{\text{одн}}(x)$ однородного уравнения

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k \mathcal{E}_{\text{одн}}(x)}{dx^k} = 0$$

в пространстве $S'(\mathbb{R})$ состоит из тех слагаемых, входящих в решение однородного дифференциального уравнения

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}(x) = 0$$

в пространстве $C^2(\mathbb{R})$, которые соответствуют корням λ характеристического уравнения

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k = 0$$

с нулевой вещественной частью $\operatorname{Re}\lambda = 0$.

Спасибо за внимание.
Не болейте!