Функция Грина линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами в $S'(\mathbb{R}^n)$. Примеры решения задач

Самарова С.С.

ФОПФ, 3 курс, УМФ

Учебное пособие для дистанционных занятий

В этом пособии для дистанционного занятия мы разберем методы решения задач на вычисление функций Грина линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами в $S'(\mathbb{R}^n)$.

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами

$$L = \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_n = 0}^{m} a_{k_1 k_2 \ldots k_n} \frac{\partial^{k_1 + k_2 + \ldots + k_n}}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_n^{k_n}} \tag{1}$$

Определение 1 *Функцией Грина оператора L называют решение $\mathcal{E}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S'(\mathbb{R}^n)$ уравнения*

$$L\mathcal{E}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{2}$$

Вычисление функций Грина для операторов (1) можно проводить двумя способами.

В первом способе сначала берется преобразование Фурье от обеих частей уравнения (2) по всем переменным, после этого полученное алгебраическое уравнение решается в пространстве $S'(\mathbb{R}^n)$ относительно $F\big[\mathcal{E}\big]$, а затем вычисляется обратное преобразование Фурье.

Во втором способе преобразование Фурье берется по $(n-1)$ переменной, после этого вычисляется функция Грина полученного дифференциального оператора в пространстве $S'(\mathbb{R})$, а затем вычисляется обратное преобразование Фурье.

Этот способ позволяет использовать методы вычисления функций Грина в пространстве $S'(\mathbb{R})$, рассмотренные нами на предыдущем вебинаре (см. материал для дистанционного занятия «Функция Грина линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами в $S'(\mathbb{R})$. Примеры решения задач»).

Перейдем к решению задач.

Задача 1 *В пространстве* $S'(\mathbb{R}^3)$ *рассматривается оператор*

$$L = \frac{\partial}{\partial x} + 3\frac{\partial}{\partial y} - 4\frac{\partial}{\partial z} + 1$$

1. Доказать, что оператор L имеет единственную функцию Грина $\mathcal{E}(x, y, z) \in S'(\mathbb{R}^3)$
2. Вычислить функцию Грина $\mathcal{E}(x, y, z) \in S'(\mathbb{R}^3)$ оператора L

Решение.

1. Докажем, что оператор L имеет единственную функцию Грина $\mathcal{E}(x, y, z) \in S'(\mathbb{R}^3)$.

   Функция Грина является решением уравнения

$$L\mathcal{E}(x, y, z) = \delta(x, y, z)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} + 3\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial y} - 4\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} + \mathcal{E} = \delta(x, y, z)$$

   Взяв преобразование Фурье от обеих частей этого уравнения по всем переменным, получим

$$(-i\xi)F\big[\mathcal{E}\big] + 3(-i\eta)F\big[\mathcal{E}\big] - 4(-i\zeta)F\big[\mathcal{E}\big] + F\big[\mathcal{E}\big] = 1$$

$$(-i\xi - 3i\eta + 4i\zeta + 1)F\big[\mathcal{E}\big] = 1 \tag{3}$$

Поскольку при $(\xi,\eta,\zeta)\in\mathbb{R}^3$ выполнено неравенство

$$\left|-i\xi-3i\eta+4i\zeta+1\right|\geqslant 1 \tag{4}$$

то уравнение (3) имеет единственное решение в пространстве $S'(\mathbb{R}^3)$. Действительно, для любой основной $\varphi\in S(\mathbb{R}^3)$ выполнено

$$\left\langle F\left[\mathcal{E}\right],\, \varphi(\xi,\eta,\zeta)\right\rangle = \left\langle F\left[\mathcal{E}\right],\ (-i\xi-3i\eta+4i\zeta+1)\cdot\, \frac{\varphi(\xi,\eta,\zeta)}{(-i\xi-3i\eta+4i\zeta+1)}\right\rangle$$

В силу неравенства (4) функция

$$\frac{\varphi(\xi,\eta,\zeta)}{(-i\xi-3i\eta+4i\zeta+1)}\in S(\mathbb{R}^3)$$

Поэтому

$$\left\langle F\left[\mathcal{E}\right],\, \varphi(\xi,\eta,\zeta)\right\rangle = \left\langle (-i\xi-3i\eta+4i\zeta+1)F\left[\mathcal{E}\right],\ \frac{\varphi(\xi,\eta,\zeta)}{(-i\xi-3i\eta+4i\zeta+1)}\right\rangle =$$

$$= \left\langle 1\,,\ \frac{\varphi(\xi,\eta,\zeta)}{(-i\xi-3i\eta+4i\zeta+1)}\right\rangle = \left\langle \frac{1}{(-i\xi-3i\eta+4i\zeta+1)}\,,\ \varphi(\xi,\eta,\zeta)\right\rangle$$

Отсюда следует, что функция Грина для оператора L будет единственной и ее преобразование Фурье равно

$$F\left[\mathcal{E}\right] = \frac{1}{-i\xi-3i\eta+4i\zeta+1}$$

2. Найдем функцию Грина $\mathcal{E}(x,y,z)$.

$$\mathcal{E}(x,y,z) = F^{-1}\left[\frac{1}{-i\xi-3i\eta+4i\zeta+1}\right] =$$

$$= F^{-1}_{\zeta}\left[F^{-1}_{\eta}\left[F^{-1}_{\xi}\left[\frac{1}{-i\xi-3i\eta+4i\zeta+1}\right]\right]\right]$$

Вычислим сначала

$$F_\xi^{-1}\left[\frac{1}{-i\xi - 3i\eta + 4i\zeta + 1}\right]$$

Воспользовавшись формулой для обратного преобразования Фурье от рациональной дроби

$$F^{-1}\left[\frac{1}{x+b+ia}\right](y) = -i\,\mathrm{sign}\,a\;\theta(ay)\;e^{-ay+iby}, \quad a \neq 0,$$

(см. пособие для дистанционного обучения «Преобразование Фурье обобщенных функций из $S'(\mathbb{R}^m)$», задача 12), получим

$$F_\xi^{-1}\left[\frac{1}{-i\xi - 3i\eta + 4i\zeta + 1}\right] = iF_\xi^{-1}\left[\frac{1}{\xi + 3\eta - 4\zeta + i}\right] = \theta(x)\;e^{-x+3i\eta x-4i\zeta x}$$

Далее вычисляем

$$F_\eta^{-1}\left[\theta(x)\;e^{-x+3i\eta x-4i\zeta x}\right] = \theta(x)\;e^{-x-4i\zeta x}F_\eta^{-1}\left[e^{3i\eta x}\right] = \theta(x)\;e^{-x-4i\zeta x}\delta(y-3x)$$

И, наконец, получаем

$$\mathcal{E}(x,y,z) = F_\zeta^{-1}\left[\theta(x)\;e^{-x-4i\zeta x}\delta(y-3x)\right] = \theta(x)\;e^{-x}\delta(y-3x)F_\zeta^{-1}\left[e^{-4i\zeta x}\right] =$$

$$= \theta(x)\;e^{-x}\delta(z+4x)\delta(y-3x)$$

Ответ. $\mathcal{E}(x,y,z) = \theta(x)\;e^{-x}\delta(z+4x)\delta(y-3x)$

Разберем задачу из экзаменационной контрольной по УМФ 2017/2018 учебного года

Задача 2 *В пространстве* $S'(\mathbb{R}^2)$ *рассматривается оператор*

$$L = i\frac{\partial}{\partial t} + \left(i\frac{\partial}{\partial x} + 1\right)^2 - i$$

1. Доказать, что оператор L имеет единственную функцию Грина $\mathcal{E}(t,x) \in S'(\mathbb{R}^2)$

2. Вычислить функцию Грина $\mathcal{E}(t,x) \in S'(\mathbb{R}^2)$ оператора L

Для справки: $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-it^2}dt = \sqrt{\pi}e^{-\frac{i\pi}{4}}$

Решение.

1. Докажем, что оператор L имеет единственную функцию Грина $\mathcal{E}(t,x) \in S'(\mathbb{R}^2)$.

   Функция Грина является решением уравнения

$$L\mathcal{E}(t,x) = \delta(t,x)$$

$$i\frac{\partial \mathcal{E}(t,x)}{\partial t} + \left(i\frac{\partial}{\partial x} + 1\right)^2 \mathcal{E}(t,x) - i\mathcal{E}(t,x) = \delta(t,x)$$

$$i\,\frac{\partial \mathcal{E}(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 \mathcal{E}(t,x)}{\partial x^2} + 2i\,\frac{\partial \mathcal{E}(t,x)}{\partial x} + (1-i)\,\mathcal{E}(t,x) = \delta(t,x)$$

   Взяв преобразование Фурье от обеих частей этого уравнения по всем переменным, получим

$$i(-i\tau)F\big[\mathcal{E}\big] - (-i\xi)^2 F\big[\mathcal{E}\big] + 2i(-i\xi)F\big[\mathcal{E}\big] + (1-i)F\big[\mathcal{E}\big] = 1$$

$$(\tau + \xi^2 + 2\xi + 1 - i)F\big[\mathcal{E}\big] = 1 \tag{5}$$

   Поскольку при $(\tau,\xi) \in \mathbb{R}^2$ выполнено неравенство

$$\left|\tau + \xi^2 + 2\xi + 1 - i\right| \geqslant 1 \tag{6}$$

   то уравнение (5) имеет единственное решение в пространстве $S'(\mathbb{R}^2)$.

   Действительно, для любой основной $\varphi \in S(\mathbb{R}^2)$ выполнено равенство

$$\left\langle F\big[\mathcal{E}\big]\,,\,\varphi(\tau,\xi)\right\rangle = \left\langle F\big[\mathcal{E}\big]\,,\;(\tau + \xi^2 + 2\xi + 1 - i)\cdot\;\frac{\varphi(\tau,\xi)}{(\tau + \xi^2 + 2\xi + 1 - i)}\right\rangle$$

   В силу неравенства (6) функция

$$\frac{\varphi(\tau,\xi)}{\tau + \xi^2 + 2\xi + 1 - i} \in S(\mathbb{R}^2)$$

   Поэтому

$$\left\langle F\big[\mathcal{E}\big]\,,\,\varphi(\tau,\xi)\right\rangle = \left\langle (\tau + \xi^2 + 2\xi + 1 - i)F\big[\mathcal{E}\big]\,,\;\frac{\varphi(\tau,\xi)}{(\tau + \xi^2 + 2\xi + 1 - i)}\right\rangle =$$

$$= \left\langle 1\,,\ \frac{\varphi(\tau,\xi)}{\tau+\xi^2+2\xi+1-i} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{\tau+\xi^2+2\xi+1-i}\ ,\ \varphi(\tau,\xi) \right\rangle$$

Отсюда следует, что функция Грина для оператора L будет единственной и ее преобразование Фурье равно

$$F[\mathcal{E}] = \frac{1}{\tau+\xi^2+2\xi+1-i}$$

2. Найдем функцию Грина $\mathcal{E}(t,x)$.

$$\mathcal{E}(t,x) = F^{-1}\left[\frac{1}{\tau+\xi^2+2\xi+1-i}\right] =$$

$$= F_\xi^{-1}\left[F_\tau^{-1}\left[\frac{1}{\tau+\xi^2+2\xi+1-i}\right]\right]$$

Вычислим сначала

$$F_\tau^{-1}\left[\frac{1}{\tau+\xi^2+2\xi+1-i}\right]$$

Воспользовавшись формулой для обратного преобразования Фурье от рациональной дроби

$$F^{-1}\left[\frac{1}{x+b+ia}\right](y) = -i\,\operatorname{sign} a\ \theta(ay)\ e^{-ay+iby}, \quad a \neq 0,$$

(см. пособие для дистанционного обучения «Преобразование Фурье обобщенных функций из $S'(\mathbb{R}^m)$», задача 12), получим

$$F_\tau^{-1}\left[\frac{1}{\tau+\xi^2+2\xi+1-i}\right] = i\,\theta(-t)\ e^{t+i(\xi^2+2\xi+1)t} = i\,\theta(-t)\ e^{t+it(\xi+1)^2}$$

Далее получаем

$$F_\xi^{-1}\left[i\,\theta(-t)\ e^{t+it(\xi+1)^2}\right] = i\,\theta(-t)\ e^t F_\xi^{-1}\left[e^{it(\xi+1)^2}\right] = i\,\theta(-t)\ e^{t+ix} F_\xi^{-1}\left[e^{it\xi^2}\right]$$

Вычислим обратное преобразование Фурье по ξ от функции $e^{it\xi^2}$ при каждом $t<0$.

Для любой основной функции $\varphi \in S(\mathbb{R}^2)$ выполнены равенства

$$\left\langle F_\xi^{-1}\left[e^{it\xi^2}\right], \varphi(t,x)\right\rangle = \left\langle e^{it\xi^2}, F_x^{-1}\big[\varphi(t,x)\big]\right\rangle =$$

$$= \left\langle e^{it\xi^2}, \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi}\,\varphi(t,x)dx\right\rangle = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{it\xi^2}e^{-ix\xi}\,\varphi(t,x)dx$$

Поскольку подынтегральная функция не является абсолютно интегрируемой по ξ, то сразу применять теорему Фубини нельзя. Однако в силу сходимости интеграла по ξ имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{it\xi^2}e^{-ix\xi}\,\varphi(t,x)dx = \lim_{R\to+\infty}\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-R}^{R} d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{it\xi^2-ix\xi}\,\varphi(t,x)dx$$

И теперь по теореме Фубини получаем

$$\lim_{R\to+\infty}\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-R}^{R} d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{it\xi^2-ix\xi}\,\varphi(t,x)dx =$$

$$= \lim_{R\to+\infty}\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\,\varphi(t,x)\int\limits_{-R}^{R} e^{it\xi^2-ix\xi}\,d\xi =$$

$$= \lim_{R\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t,x)\,I(t,x,R)dx \tag{7}$$

где

$$I(t,x,R) = \int\limits_{-R}^{R} e^{it\xi^2-ix\xi}\,d\xi$$

Преобразуем выражение, стоящее в показателе экспоненты, выделив полный квадрат:

$$it\xi^2 - ix\xi = it\left(\xi^2 - 2\xi\frac{x}{2t} + \frac{x^2}{4t^2}\right) - it\frac{x^2}{4t^2} = it\left(\xi - \frac{x}{2t}\right)^2 - \frac{ix^2}{4t}$$

Принимая во внимание условие $t < 0$, выполним замену переменной

$$s = \sqrt{-t}\left(\xi - \frac{x}{2t}\right), \quad ds = \sqrt{-t}\,d\xi$$

в интеграле $I(t,x,R)$

$$I(t,x,R) = \int\limits_{-R}^{R} e^{it\xi^2 - ix\xi}\,d\xi = \int\limits_{-R}^{R} e^{it\left(\xi - \frac{x}{2t}\right)^2 - \frac{ix^2}{4t}}\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-t}}\,e^{-\frac{ix^2}{4t}} \int\limits_{\sqrt{-t}\left(-R-\frac{x}{2t}\right)}^{\sqrt{-t}\left(R-\frac{x}{2t}\right)} e^{-is^2}\,ds$$

Тогда с учетом интеграла, приведённого для справки в условии задачи, получаем

$$\lim_{R\to+\infty} I(t,x,R) = \frac{1}{\sqrt{-t}}\,e^{-\frac{ix^2}{4t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-is^2}\,ds = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{-t}}\,e^{-\frac{ix^2}{4t} - \frac{i\pi}{4}}$$

Остается только доказать возможность перехода к пределу под знаком интеграла в формуле (7). Для этого рассмотрим функцию

$$g(A) = \int\limits_{0}^{A} e^{-is^2}\,ds$$

Эта функция является непрерывной на $(-\infty,+\infty)$ и имеет пределы при $A \to \pm\infty$

$$\lim_{A\to+\infty} g(A) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, e^{-\frac{i\pi}{4}}, \qquad \lim_{A\to-\infty} g(A) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\, e^{-\frac{i\pi}{4}}$$

Поэтому функция $g(A)$ ограничена, то есть $\exists\ M>0$ такое, что для всех $A\in(-\infty,+\infty)$ выполнено неравенство

$$|g(A)| < M$$

Следовательно, для любого $R>0$

$$\left|\int\limits_{\sqrt{-t}\left(-R-\frac{x}{2t}\right)}^{\sqrt{-t}\left(R-\frac{x}{2t}\right)} e^{-is^2}\,ds\right| = \left|g\left(\sqrt{-t}\left(R-\frac{x}{2t}\right)\right)-g\left(\sqrt{-t}\left(-R-\frac{x}{2t}\right)\right)\right| \leqslant 2M$$

Отсюда с учётом (7) вытекает оценка

$$\Big|\varphi(t,x)\, I(t,x,R)\Big| \leqslant \frac{\widehat{M}}{1+x^2}\cdot\frac{2M}{\sqrt{-t}}$$

из которой по теореме Лебега об ограниченной сходимости для формулы (7) получаем

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t,x)\, I(t,x,R)dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t,x)\lim_{R\to+\infty} I(t,x,R)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t,x)\,\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{-t}}\, e^{-\frac{ix^2}{4t}-\frac{i\pi}{4}}\,dx = \left\langle \frac{1}{2\sqrt{-t\pi}}\, e^{-\frac{ix^2}{4t}-\frac{i\pi}{4}},\ \varphi(t,x)\right\rangle$$

Таким образом, окончательно имеем

$$\mathcal{E}(t,x) = i\theta(-t)\, e^{t+ix} F_\xi^{-1}\left[e^{it\xi^2}\right] = i\theta(-t)\, e^{t+ix}\,\frac{1}{2\sqrt{-t\pi}}\, e^{-\frac{ix^2}{4t}-\frac{i\pi}{4}} =$$

$$= \frac{\theta(-t)}{2\sqrt{-t\pi}}\, e^{\,t+ix-\frac{ix^2}{4t}+\frac{i\pi}{4}}$$

Ответ. $\qquad \mathcal{E}(t,x) = \dfrac{\theta(-t)}{2\sqrt{-t\pi}}\, e^{\,t+ix-\frac{ix^2}{4t}+\frac{i\pi}{4}}$

Решим еще одну задачу, в которой функция Грина будет неединственной.

Задача 3 (задание 2.6) *Вычислить в* $S'(\mathbb{R}^{1+m})$ *все функции Грина* $\mathcal{E}(t,x)$ *оператора*

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + (v, \nabla_x), \qquad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad v \in \mathbb{R}^m$$

Решение.

Как мы уже знаем, функция Грина является решением неоднородного уравнения

$$\frac{\partial \mathcal{E}(t,x)}{\partial t} + \Big(v, \nabla_x \mathcal{E}(t,x)\Big) = \delta(t,x)$$

Проверим сначала, имеет ли однородное уравнение

$$\frac{\partial \mathcal{E}(t,x)}{\partial t} + \Big(v, \nabla_x \mathcal{E}(t,x)\Big) = 0$$

ненулевые решения. С этой целью вычислим преобразование Фурье от обеих частей этого уравнения по всем переменным и получим

$$(-i\tau)F\big[\mathcal{E}\big] - i(v,\xi)F\big[\mathcal{E}\big] = 0$$

$$-i\Big(\tau + (v,\xi)\Big)F\big[\mathcal{E}\big] = 0$$

Поскольку множитель $\Big(\tau + (v,\xi)\Big)$ обращается в нуль при $\tau = -(v,\xi)$, то у данного уравнения могут быть ненулевые решения, а находить их в $S'(\mathbb{R}^{1+m})$ мы не умеем.

Поэтому будем искать функции Грина по-другому.

Снова рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial \mathcal{E}(t,x)}{\partial t} + \Big(v, \nabla_x \mathcal{E}(t,x)\Big) = \delta(t,x) = \delta(t)\delta(x)$$

и возьмем преобразование Фурье от обеих частей уравнения только по x

$$\frac{\partial F_x\big[\mathcal{E}\big]}{\partial t} - i(v,\xi)F_x\big[\mathcal{E}\big] = \delta(t)$$

Обозначив

$$g(t,\xi) = F_x\big[\mathcal{E}\big](t,\xi),$$

получим

$$\frac{\partial g}{\partial t} - i(v,\xi)g = \delta(t) \tag{8}$$

и заметим, что при каждом ξ функция $g(t,\xi)$ является функцией Грина оператора

$$\frac{\partial}{\partial t} - i(v,\xi) \tag{9}$$

Найдем все функции Грина этого оператора.

Сначала найдем частное решение уравнения (8). С этой целью решим задачу Коши

$$y' - i(v,\xi)y = 0, \qquad y(0) = 1.$$

Поскольку

$$\lambda = i(v,\xi),$$

то общее решение этого уравнения имеет вид

$$y = Ce^{i(v,\xi)t}$$

С учетом условия

$$y(0) = 1$$

получаем

$$y = e^{i(v,\xi)t}$$

Так как $\mathrm{Re}\lambda = 0$, то частное решение уравнения (8) имеет вид

$$g(t,\xi) = \theta(t)e^{i(v,\xi)t}$$

(см. пособие для дистанционного занятия «Функция Грина линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами в $S'(\mathbb{R})$. Примеры решения задач»)

Теперь решим однородное уравнение

$$\frac{\partial g(t,\xi)}{\partial t} - i(v,\xi)\, g(t,\xi) = 0 \tag{10}$$

Для этого возьмем преобразование Фурье от обеих частей уравнения (10) по переменной t

$$\begin{gathered} -i\tau F_t\big[g\big](\tau,\xi) - i(v,\xi)F_t\big[g\big](\tau,\xi) = 0 \\ -i\Big(\tau + (v,\xi)\Big)F_t\big[g\big](\tau,\xi) = 0 \end{gathered} \tag{11}$$

Поскольку $\tau = -(v,\xi)$ – это нуль кратности 1, то решения уравнения (11) имеют вид

$$F_t\big[g\big](\tau,\xi) = C\delta\Big(\tau + (v,\xi)\Big)$$

где $C = C(\xi)$, а для уравнения (8) соответственно получаем

$$g(t,\xi) = C(\xi)F_\tau^{-1}\Big[\delta\Big(\tau + (v,\xi)\Big)\Big] = C(\xi)e^{i(v,\xi)t}$$

Таким образом, все функции Грина оператора (9) имеют вид

$$g(t,\xi) = \theta(t)e^{i(v,\xi)t} + C(\xi)e^{i(v,\xi)t}$$

Поскольку функция $g(t,\xi)$ является решением уравнения (8) только как функция переменной t при каждом фиксированном значении переменной ξ, то нужно еще проверить, что функция

$$g(t,\xi) = \theta(t)e^{i(v,\xi)t} + C(\xi)e^{i(v,\xi)t}\,,$$

где $C(\xi)$ – произвольная обобщенная функция из пространства $S'(\mathbb{R}^m)$, будет решением уравнения (8) и как функция всех переменных в пространстве $S'(\mathbb{R}^{m+1})$.

Для любой основной функции $\varphi \in S(\mathbb{R}^{1+m})$ выполнены равенства

$$\left\langle \frac{\partial g}{\partial t} - i(v,\xi)g\,,\, \varphi(t,\xi) \right\rangle = \left\langle g(t,\xi)\,,\, -\frac{\partial \varphi(t,\xi)}{\partial t} - i(v,\xi)\varphi(t,\xi) \right\rangle =$$

$$= \left\langle \Big(\theta(t) + C(\xi)\Big)e^{i(v,\xi)t}\,,\, -\frac{\partial \varphi(t,\xi)}{\partial t} - i(v,\xi)\varphi(t,\xi) \right\rangle =$$

$$= \left\langle \theta(t) + C(\xi)\,,\, -\, e^{i(v,\xi)t}\, \frac{\partial \varphi(t,\xi)}{\partial t} - i(v,\xi) e^{i(v,\xi)t} \varphi(t,\xi) \right\rangle =$$

$$= \left\langle \theta(t) + C(\xi)\,,\, -\frac{\partial}{\partial t}\Big(e^{i(v,\xi)t}\, \varphi(t,\xi) \Big) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial t}\Big(\theta(t) + C(\xi) \Big)\,,\, e^{i(v,\xi)t}\, \varphi(t,\xi) \right\rangle =$$

$$= \left\langle \delta(t)\,,\, e^{i(v,\xi)t}\, \varphi(t,\xi) \right\rangle = \langle \delta(t)\,,\, \varphi(t,\xi) \rangle$$

Итак, мы доказали, что функция $g(t,\xi)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial g}{\partial t} - i(v,\xi) g = \delta(t)$$

в пространстве $S'(\mathbb{R}^{1+m})$. Поэтому фундаментальное решение

$$\mathcal{E}(t,x) = F_{\xi}^{-1}\big[g(t,\xi) \big](t,x) = F_{\xi}^{-1}\left[\Big(\theta(t) + C(\xi) \Big) e^{i(v,\xi)t} \right](t,x) =$$

$$= F_{\xi}^{-1}\Big[\theta(t) + C(\xi) \Big](t, x - vt) = \theta(t)\delta(x - vt) + C_1(x - vt)$$

где $C_1(z)$ – произвольная обобщенная функция из пространства $S'(\mathbb{R}^m)$.

Ответ. $\mathcal{E}(t,x) = \theta(t)\delta(x - vt) + C_1(x - vt)$, где $C_1(z)$ – произвольная обобщенная функция из пространства $S'(\mathbb{R}^m)$.

На этом мы заканчиваем решение задач, связанных с вычислением функций Грина. Функции Грина основных операторов будут получены при рассмотрении других тем по мере необходимости.

Спасибо за внимание.
Не болейте!