Преобразование Фурье обобщенных функций из $S'(\mathbb{R}^m)$

Самарова С.С.

ФОПФ, 3 курс, УМФ

Учебное пособие для дистанционных занятий

В данном пособии мы продолжаем изучение пространства обобщенных функций $S'(\mathbb{R}^m)$. Нашей целью является решение типовых примеров и задач, связанных с преобразованием Фурье обобщенных функций.

Определение преобразования Фурье обобщенных функций

Напомним сначала определение преобразования Фурье абсолютно интегрируемых функций.

Определение 1 *Преобразованием Фурье абсолютно интегрируемой функции $\varphi(x)$ называют функцию, заданную формулой*

$$F[\varphi(x)]\,(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} e^{\,i(x,y)}\,\varphi(x)\,dx\,, \qquad y \in \mathbb{R}^m\,,$$

где через (x,y) обозначено скалярное произведение векторов x и y.

Из свойств преобразования Фурье, изученных Вами ранее, следует, что преобразование Фурье любой основной функции $\varphi(x) \in S(\mathbb{R}^m)$ существует и принадлежит пространству $S(\mathbb{R}^m)$.

Определение 2 *Преобразованием Фурье обобщенной функции* $f(x) \in S'(\mathbb{R}^m)$ *называют обобщенную функцию, действие которой на произвольную основную функцию* $\varphi(y)$, *задано формулой*

$$\Big\langle F[f(x)]\,(y)\,,\,\varphi(y)\Big\rangle = \Big\langle f(x)\,,\,F[\varphi(y)]\,(x)\Big\rangle \tag{1}$$

Проверим, что формула (1) действительно определяет обобщенную функцию, т.е. линейный непрерывный функционал на пространстве $S'(\mathbb{R}^m)$.

Линейность этого функционала непосредственно следует из линейности преобразования Фурье основных функций.

Докажем его непрерывность.

С этой целью докажем следующее утверждение.

Утверждение 1 *Если последовательность основных функций* $\varphi_n \in S(\mathbb{R}^m)$ *удовлетворяет условию*

$$\varphi_n \xrightarrow{S(\mathbb{R}^m)} 0 \quad \textit{при} \quad n \to \infty\,,$$

то

$$F\left[\,\varphi_n\right] \xrightarrow{S(\mathbb{R}^m)} 0 \quad \textit{при} \quad n \to \infty\,.$$

Доказательство. Для любых мультииндексов α и β из свойств преобразования Фурье следует равенство

$$y^{\beta}\partial^{\alpha}F\left[\varphi_n\right](y) = y^{\beta}F\left[(ix)^{\alpha}\varphi_n\right](y) = \frac{1}{(-i)^{|\beta|}}\;F\left[\partial^{\beta}\{(ix)^{\alpha}\varphi_n\}\right](y)$$

Кроме того, поскольку

$$\varphi_n \xrightarrow{S(\mathbb{R}^m)} 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty\,,$$

то имеет место равномерная сходимость

$$\left(1+|x|^{m+1}\right)\partial^{\beta}\{(ix)^{\alpha}\varphi_n\} \underset{\mathbb{R}^m}{\rightrightarrows} 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty\,,$$

а, значит, существует такое число $M > 0$, что для всех $x \in \mathbb{R}^m$ и всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$\left|\partial^{\beta}\{(ix)^{\alpha}\varphi_n\}\right| \leqslant \frac{M}{1+|x|^{m+1}}$$

причем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{M}{1+|x|^{m+1}}\,dx = \int\limits_0^{+\infty} dr \int\limits_{|x|=r} \frac{M}{1+r^{m+1}}\,dS_x \leqslant \int\limits_0^{+\infty} \frac{\widetilde{M}}{1+r^2}\,dr < \infty$$

Отсюда, применяя теорему Лебега об ограниченной сходимости, получаем

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\mathbb{R}^m} \left| y^\beta \partial^\alpha F\left[\varphi_n\right](y)\right| = \lim_{n\to\infty} \sup_{\mathbb{R}^m} \left| \frac{1}{(-i)^{|\beta|}}\; F\left[\partial^\beta\{(ix)^\alpha \varphi_n\}\right](y)\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sup_{\mathbb{R}^m} \left| \int\limits_{\mathbb{R}^m} e^{i(x,y)} \partial^\beta\{(ix)^\alpha \varphi_n\}\,dx \right| \leqslant \lim_{n\to\infty} \sup_{\mathbb{R}^m} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left| e^{i(x,y)} \partial^\beta\{(ix)^\alpha \varphi_n\}\right|\,dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left|\partial^\beta\{(ix)^\alpha \varphi_n\}\right|\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \lim_{n\to\infty} \left|\partial^\beta\{(ix)^\alpha \varphi_n\}\right|\,dx = 0$$

Утверждение 1 доказано.

Непрерывность функционала, заданного формулой (1), как и любого линейного функционала, достаточно доказать только в нуле.

С этой целью рассмотрим произвольную последовательность основных функций $\varphi_n \in S(\mathbb{R}^m)$, сходящуюся к нулю в пространстве $S(\mathbb{R}^m)$:

$$\varphi_n \xrightarrow{S(\mathbb{R}^m)} 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty\,.$$

Тогда из утверждения 1 следует, что и последовательность их преобразований Фурье тоже сходится к к нулю в пространстве $S(\mathbb{R}^m)$:

$$F\left[\varphi_n\right] \xrightarrow{S(\mathbb{R}^m)} 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty\,.$$

Поэтому по формуле (1) получаем

$$\Big\langle F[f(x)]\,(y)\,,\, \varphi_n(y)\Big\rangle = \Big\langle f(x)\,,\, F[\varphi_n(y)]\,(x)\Big\rangle \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty\,.$$

Непрерывность функционала, заданного формулой (1), а вместе с ней и корректность определения преобразования Фурье обобщенных функций, доказаны.

В отличие от обычных (не обобщенных) функций преобразование Фурье существует для каждой обобщенной функции из пространства $S'(\mathbb{R}^m)$, причем справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2 *Пусть $f(x)$ – абсолютно интегрируемая функция. Обозначим через $\hat{f}(y)$ ее преобразование Фурье*

$$\hat{f}(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} e^{\,i(x,y)}\, f(x)\, dx\,, \qquad y \in \mathbb{R}^m\,.$$

Тогда преобразование Фурье регулярного функционала, заданного $f(x)$, является регулярным функционалом, заданным $\hat{f}(y)$.

Доказательство.

По определению преобразования Фурье обобщенных функций получаем

$$\Big\langle F[f(x)]\,(y)\,,\,\varphi(y)\Big\rangle = \Big\langle f(x)\,,\,F[\varphi(y)]\,(x)\Big\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x)\,F[\varphi(y)]\,(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^m} dx\, f(x) \int\limits_{\mathbb{R}^m} e^{\,i(x,y)}\,\varphi(y)\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}^m} dx \int\limits_{\mathbb{R}^m} e^{\,i(x,y)}\,\varphi(y)\,f(x)\,dy$$

Поскольку подынтегральная функция

$$e^{\,i(x,y)}\,\varphi(y)\,f(x)$$

является абсолютно интегрируемой на $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, то по теореме Фубини можно изменить порядок интегрирования

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} dx \int\limits_{\mathbb{R}^m} e^{\,i(x,y)}\,\varphi(y)\,f(x)\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}^m} dy\,\varphi(y) \int\limits_{\mathbb{R}^m} e^{\,i(x,y)}\,f(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^m} \varphi(y)\,\hat{f}(y)\,dy = \Big\langle \hat{f}(y)\,,\,\varphi(y)\Big\rangle$$

Таким образом,

$$F[f(x)]\,(y) = \hat{f}(y)\,,$$

что и требовалось доказать.

Определение обратного преобразования Фурье обобщенных функций

Напомним сначала определение обратного преобразования Фурье абсолютно интегрируемой функции.

Определение 3 *Обратным преобразованием Фурье абсолютно интегрируемой функции* $\varphi(x)$, *называют функцию, заданную формулой*

$$F^{-1}[\varphi(x)]\,(y) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int\limits_{\mathbb{R}^m} e^{-i(x,y)}\,\varphi(x)\,dx\,, \qquad y \in \mathbb{R}^m$$

Обратное преобразование Фурье любой основной функции $\varphi(x) \in S(\mathbb{R}^m)$ существует и принадлежит пространству $S(\mathbb{R}^m)$.

Определение 4 *Обратным преобразованием Фурье обобщенной функции* $f(x) \in S'(\mathbb{R}^m)$ *называют обобщенную функцию, действие которой на произвольную основную функцию* $\varphi(y)$, *определяется формулой*

$$\Big\langle F^{-1}[f(x)]\,(y)\,,\,\varphi(y)\Big\rangle = \Big\langle f(x)\,,\,F^{-1}[\varphi(y)]\,(x)\Big\rangle \tag{2}$$

Докажем, что формула (2) определяет обобщенную функцию.

Линейность непосредственно следует из линейности обратного преобразования Фурье основных функций, а непрерывность обеспечивается следующим утверждением.

Утверждение 3 *Если последовательность основных функций* $\varphi_k \in S(\mathbb{R}^m)$ *удовлетворяет условию*

$$\varphi_n \xrightarrow{S(\mathbb{R}^m)} 0 \quad \textit{при} \quad n \to \infty\,,$$

то

$$F^{-1}\,[\varphi_n] \xrightarrow{S(\mathbb{R}^m)} 0 \quad \textit{при} \quad n \to \infty\,.$$

Доказательство. Воспользовавшись утверждением 1, получаем

$$F^{-1}\,[\,\varphi_n]\,(y) = \frac{1}{(2\pi)^m} F\,[\,\varphi_n]\,(-y) \xrightarrow{S(\mathbb{R}^m)} 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty\,.$$

Утверждение 3 доказано.

Свойства преобразования Фурье обобщенных функций

Свойства преобразования Фурье обобщенных функций из $S'(\mathbb{R}^m)$ аналогичны свойствам преобразования Фурье абсолютно интегрируемых функций и непосредственно из них следуют.

Приведем сначала формулы, связывающие прямое и обратное преобразование Фурье обобщенных функций.

Для любой обобщенной функции $f \in S'(\mathbb{R}^m)$ справедливы равенства:

- $F^{-1}\big[\, F[\, f\,]\,(y)\,\big](x) = F\big[\, F^{-1}[\, f\,]\,(y)\,\big](x) = f(x)$
- $F^{-1}[\, f(x)\,](y) = \dfrac{1}{(2\pi)^m}\, F[\, f(x)\,](-y) = \dfrac{1}{(2\pi)^m}\, F[\, f(-x)\,](y)$

Доказательство этих свойств будет дано на лекциях.

Теперь приведем формулы, относящиеся к дифференцированию преобразования Фурье и к преобразованию Фурье от производных обобщенных функций.

Для любой обобщенной функции $f \in S'(\mathbb{R}^m)$ и любого мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ справедливы равенства

- $\partial^{\alpha} F\big[f(x)\big](y) = F\big[(ix)^{\alpha} f(x)\big](y)$
- $F\big[\partial^{\alpha} f(x)\big](y) = (-iy)^{\alpha} F\big[f(x)\big](y)$

В качестве примера докажем первую из этих формул.

Задача 1 (задание 1.16 (б)) *Для обобщенной функции $f \in S'(\mathbb{R}^m)$ доказать равенство*

$$\partial^{\alpha} F\big[f(x)\big](y) = F\big[(ix)^{\alpha} f(x)\big](y)$$

Доказательство. В соответствии с определениями дифференцирования и преобразования Фурье обобщенных функций для любой основной функции $\varphi \in S(\mathbb{R}^m)$ выполнены равенства

$$\Big\langle \partial^{\alpha} F\big[f(x)\big](y)\,,\, \varphi(y) \Big\rangle = (-1)^{|\alpha|} \Big\langle F\big[f(x)\big](y)\,,\, \partial^{\alpha}\varphi(y) \Big\rangle =$$

$$= (-1)^{|\alpha|} \Big\langle f(x)\,,\, F\big[\partial^{\alpha}\varphi(y)\big](x) \Big\rangle$$

Поскольку основная функция $\varphi(y)$ и все ее производные порядка $|\alpha|$ непрерывны и абсолютно интегрируемы, то можно воспользоваться следующим свойством преобразования Фурье абсолютно интегрируемых функций:

$$F\big[\partial^{\alpha}\varphi(y)\big](x) = (-ix)^{\alpha} F\big[\varphi(y)\big](x) = (-1)^{|\alpha|}\, (ix)^{\alpha} F\big[\varphi(y)\big](x).$$

Тогда с учетом определений операций умножения на бесконечно дифференцируемую функцию медленного роста и преобразования Фурье для обобщенных функций получаем

$$(-1)^{|\alpha|} \Big\langle f(x)\,,\, F\big[\partial^{\alpha}\varphi(y)\big](x) \Big\rangle = (-1)^{2|\alpha|} \big\langle f(x)\,,\, (ix)^{\alpha} F\,\big[\varphi(y)\big](x) \big\rangle =$$

$$= \left\langle (ix)^\alpha f(x)\,,\, F\left[\varphi(y)\right](x) \right\rangle = \Big\langle F\big[(ix)^\alpha f(x)\big](y)\,,\, \varphi(y) \Big\rangle$$

Доказано.

Точно так же можно провести и доказательство свойства

$$F\big[\partial^\alpha f(x)\big](y) = (-iy)^\alpha F\big[f(x)\big](y)$$

из **задания 1.16 в)**. Проделайте это самостоятельно.

Сформулируем еще одно свойство преобразования Фурье обобщенных функций, которое мы будем использовать при решении задач, а доказательство приведем после изучения темы «Линейные замены в аргументе обобщенной функции».

Для любой обобщенной функции $f \in S'(\mathbb{R}^m)$ и любого вектора $x_0 \in \mathbb{R}^m$ справедливо равенство

- $F\left[f(x - x_0)\right](y) = e^{i(y,x_0)} F\left[f(x)\right](y)$
- $F^{-1}\left[f(x - x_0)\right](y) = e^{-i(y,x_0)} F^{-1}\left[f(x)\right](y)$

Эти свойства называют «формулами сдвига» («формулами смещения»).

Примеры вычисления преобразования Фурье обобщенных функций в одномерном случае

Рассмотрим ряд примеров вычисления преобразования Фурье обобщенных функций из пространства $S'(\mathbb{R})$. Начнем с простого, но очень важного случая.

Задача 2 *В пространстве* $S'(\mathbb{R})$ *вычислить преобразование Фурье обобщенной функции*

$$\delta(x-a)\,,$$

где a *– произвольное действительное число.*

Решение. По определению преобразования Фурье обобщенной функции для каждой основной функции $\varphi(y) \in S(\mathbb{R})$ выполнены равенства

$$\Big\langle F\big[\delta(x-a)\big](y)\,,\, \varphi(y) \Big\rangle = \Big\langle \delta(x-a)\,,\, F\big[\varphi(y)\big](x) \Big\rangle =$$

$$= \left\langle \delta(x-a)\,,\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\,ixy}\,\varphi(y)\,dy \right\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\,iay}\,\varphi(y)\,dy = \left\langle e^{\,iay}\,,\,\varphi(y)\right\rangle$$

Следовательно,

$$F\big[\delta(x-a)\big]\,(y) = e^{\,iay}$$

Ответ. $F\big[\delta(x-a)\big]\,(y) = e^{\,iay}$

Из полученного в задаче 2 результата легко вытекают следующие утверждения:

- $F\big[\delta(x)\big]\,(y) = 1\,;$
- $F^{-1}[1]\,(y) = \delta(y)\,;$
- $F^{-1}\big[e^{\,iax}\big]\,(y) = \delta(y-a)$, где a – любое действительное число;
- $F\big[e^{\,iax}\big]\,(y) = 2\pi F^{-1}\big[e^{\,-iax}\big]\,(y) = 2\pi\delta(y+a)$, где a – любое действительное число;
- $F[1]\,(y) = 2\pi\delta(y)\,;$
- $F^{-1}\big[\delta(x-a)\big]\,(y) = \dfrac{1}{2\pi}\,e^{-\,iay}$, где a – любое действительное число.

Задача 3 *В пространстве $S'(\mathbb{R})$ найти преобразование Фурье обобщенной функции*

$$f(x) = x^2$$

Решение. В соответствии со свойствами преобразования Фурье обобщенных функций выполнены равенства

$$F\big[x^2\big]\,(y) = -F\big[(ix)^2\cdot 1\big]\,(y) = -F''[1]\,(y) = -2\pi\delta''\,(y)$$

Ответ. $F\big[x^2\big]\,(y) = -2\pi\delta''\,(y)$

Задача 4 *В пространстве* $S'(\mathbb{R})$ *найти преобразование Фурье обобщенной функции*

$$f(x) = \sin x$$

Решение. Воспользовавшись следствиями из задачи 2, получаем

$$F\left[\sin x\right](y) = F\left[\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right](y) = \frac{1}{2i}\Big(F\left[e^{ix}\right] - F\left[e^{-ix}\right]\Big) =$$

$$= \frac{2\pi}{2i}\Big(\delta(y+1) - \delta(y-1)\Big) = -\pi i\Big(\delta(y+1) - \delta(y-1)\Big)$$

Ответ. $F\left[\sin x\right](y) = -\pi i\Big(\delta(y+1) - \delta(y-1)\Big)$

Проиллюстрируем теперь применение свойств преобразования Фурье при решении однородного дифференциального уравнения первого порядка в пространстве $S'(\mathbb{R})$.

Задача 5 (задание, задача 1.15) *Пусть обобщенная функция* $f(x) \in S'(\mathbb{R})$ *такова, что*

$$f'(x) = 0$$

Доказать, что $f(x) = \mathrm{const}$.

Доказательство. Обозначив

$$\hat{f}(y) = F\big[f(x)\big](y),$$

получаем

$$F\big[f'(x)\big](y) = -iy\,F\big[f(x)\big](y) = -iy\,\hat{f}(y) = 0.$$

Как мы уже знаем, решением уравнения

$$-iy\,\hat{f}(y) = 0$$

является обобщенная функция

$$\hat{f}(y) = C\,\delta(y),$$

где C – любое число.

Применяя обратное преобразование Фурье, получаем

$$f(x) = F^{-1}\Big[\hat{f}(y)\Big](x) = F^{-1}\big[C\,\delta(y)\big](x) = C\,\frac{1}{2\pi} = \mathrm{const}.$$

Доказано.

Разберем еще один важный пример.

Задача 6 (задание, задача 1.14 в)) *В пространстве $S'(\mathbb{R})$ найти преобразование Фурье обобщенной функции*

$$f(x) = \operatorname{sign} x$$

Решение. В соответствии с определением преобразования Фурье обобщенных функций для каждой основной функции $\varphi(y) \in S(\mathbb{R})$ выполнены равенства

$$\Big\langle F[\operatorname{sign} x]\,(y)\,,\,\varphi(y)\Big\rangle = \Big\langle \operatorname{sign} x\,,\,F[\varphi(y)]\,(x)\Big\rangle = \left\langle \operatorname{sign} x\,,\,\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy}\,\varphi(y)\,dy\right\rangle =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \operatorname{sign} x \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy}\,\varphi(y)\,dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} \operatorname{sign} x\,\varphi(y)\,dy$$

К сожалению, непосредственно применить теорему Фубини, чтобы изменить порядок интегрирования в полученном интеграле, нельзя, поскольку подынтегральная функция

$$e^{ixy} \operatorname{sign} x\,\varphi(y)$$

не является абсолютно интегрируемой по переменной x.

Поэтому воспользуемся сходимостью повторного интеграла

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} \operatorname{sign} x\,\varphi(y)\,dy$$

и запишем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} \operatorname{sign} x\,\varphi(y)\,dy = \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{-R}^{+R} dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} \operatorname{sign} x\,\varphi(y)\,dy$$

Применяя теорему Фубини, получим

$$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_{-R}^{+R} dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} \operatorname{sign} x\,\varphi(y)\,dy = \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy\,\varphi(y) \int\limits_{-R}^{+R} e^{ixy} \operatorname{sign} x\,dx =$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy\, \varphi(y) \int\limits_{-R}^{+R} \big(\underbrace{\cos xy \operatorname{sign} x}_{\text{нечетн.}} + i \underbrace{\sin xy \operatorname{sign} x}_{\text{четн.}}\big)\, dx =$$

$$= 2i \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy\, \varphi(y) \int\limits_{0}^{+R} \sin xy\, dx = 2i \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)\ \frac{-\cos xy}{y}\bigg|_0^{+R}\, dy =$$

$$= 2i \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)\ \frac{(1-\cos Ry)}{y}\, dy = 2i \lim_{R\to+\infty} \text{ v.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)\ \frac{(1-\cos Ry)}{y}\, dy =$$

$$= 2i \text{ v.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(y)}{y}\, dy - 2i \lim_{R\to+\infty} \text{ v.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(y)}{y} \cos Ry\, dy =$$

$$= 2i \text{ v.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(y)}{y}\, dy - 2i \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(y)-\varphi(0)}{y} \cos Ry\, dy -$$

$$-2i\, \varphi(0) \lim_{R\to+\infty} \text{ v.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos Ry}{y}\, dy$$

Проанализируем каждое из слагаемых.

- По определению функции $\mathcal{P}\dfrac{1}{y}$ получаем

$$2i \text{ v.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(y)}{y}\, dy = \left\langle 2i\, \mathcal{P}\frac{1}{y}\,,\ \varphi(y) \right\rangle$$

- Поскольку функция
$$\frac{\varphi(y)-\varphi(0)}{y}$$
абсолютно интегрируема, то по лемме Римана имеем

$$2i \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(y)-\varphi(0)}{y} \cos Ry\, dy = 0$$

- В силу нечетности подынтегральной функции

$$2i\,\varphi(0)\ \text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos Ry}{y}\,dy = 0$$

Таким образом, окончательно получаем

$$\Big\langle F[\,\operatorname{sign} x]\,(y)\,,\,\varphi(y)\Big\rangle = \left\langle 2i\,\mathcal{P}\frac{1}{y}\,,\,\varphi(y)\right\rangle$$

Ответ. $F[\,\operatorname{sign} x]\,(y)\ = 2i\,\mathcal{P}\dfrac{1}{y}$

Теперь с помощью результата, полученного в задаче 6, решим несколько задач из домашнего задания.

Задача 7 (задание, задача 1.14 б)) *В пространстве* $S'(\mathbb{R})$ *найти преобразование Фурье обобщенной функции*

$$f(x) = \mathcal{P}\frac{1}{x}$$

Решение. Применяя к ответу задачи 6 обратное преобразование Фурье, получаем

$$F^{-1}\left[\mathcal{P}\frac{1}{x}\right](y) = \frac{1}{2i}\operatorname{sign} y = -\frac{i}{2}\operatorname{sign} y$$

Поэтому

$$F\left[\mathcal{P}\frac{1}{x}\right](y) = 2\pi F^{-1}\left[\mathcal{P}\frac{1}{x}\right](-y) = -\pi i\operatorname{sign}(-y) = \pi i\operatorname{sign} y$$

Ответ. $F\left[\mathcal{P}\dfrac{1}{x}\right](y) = \pi i\operatorname{sign} y$

Задача 8 (задание, задача 1.14 г)) *В пространстве* $S'(\mathbb{R})$ *найти преобразование Фурье обобщенной функции*

$$f(x) = \theta(x)$$

Решение. Представляя функцию $\theta(x)$ в виде

$$\theta(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sign} x + \frac{1}{2}\,,$$

с помощью результатов задач 2 и 6 получаем

$$F\big[\theta(x)\big](y) = \frac{1}{2}\,F\big[\operatorname{sign} x\big](y) + \frac{1}{2}\,F\big[1\big](y) = \frac{1}{2}\cdot 2i\,\mathcal{P}\frac{1}{y} + \frac{1}{2}\cdot 2\pi\,\delta(y) = i\,\mathcal{P}\frac{1}{y} + \pi\,\delta(y)$$

Ответ. $F\big[\theta(x)\big](y) = i\,\mathcal{P}\dfrac{1}{y} + \pi\,\delta(y)$

Задача 9 (задание, задача 1.14 д)) *В пространстве* $S'(\mathbb{R})$ *найти преобразование Фурье обобщенной функции*

$$f(x) = |x|$$

Решение. Воспользовавшись свойствами преобразования Фурье обобщенных функций и определением функции $\mathcal{P}\dfrac{1}{y^2}$, получаем

$$F\big[\,|x|\,\big](y) = -iF\big[\,ix\cdot\operatorname{sign} x\big](y) = -iF'\big[\operatorname{sign} x\big](y) = -i\left(2i\,\mathcal{P}\frac{1}{y}\right)' = -2\,\mathcal{P}\frac{1}{y^2}$$

Ответ. $F\big[\,|x|\,\big](y) = -2\,\mathcal{P}\dfrac{1}{y^2}$

Преобразование Фурье рациональной дроби $\dfrac{1}{x+b+ia}$ в $S'(\mathbb{R})$

Нашей целью является вычисление преобразования Фурье регулярного функционала вида

$$\frac{1}{x+b+ia}$$

при $a \neq 0$ в $S'(\mathbb{R})$. Именно такой задачи в задании нет, однако результат, полученный в ней, имеет важное значение при применении аппарата обобщенных функций в курсе УМФ.

Существует несколько способов вычисления преобразования Фурье от дроби такого вида. Рассмотрим самый простой, на мой взгляд, способ. Для этого решим вспомогательную задачу.

Задача 10 *Для любого действительного числа* $a \neq 0$ *вычислить в* $S'(\mathbb{R})$ *преобразование Фурье обобщенной функции*

$$f(x) = \theta(ax)\, e^{-ax}$$

Решение. Прежде всего, заметим, что функция

$$f(x) = \theta(ax)\, e^{-ax}$$

является абсолютно интегрируемой, поскольку

$$\Big|\, \theta(ax)\, e^{-ax} \Big| \leqslant e^{-|ax|}$$

и

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-|ax|}\, dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-|a||x|}\, dx = 2\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-|a|x}\, dx = -\,\frac{2}{|a|}\, e^{-|a|x}\,\Bigg|_{0}^{+\infty} = \frac{2}{|a|} < \infty$$

Значит, для вычисления преобразования Фурье обобщенной функции

$$f(x) = \theta(ax)\, e^{-ax}$$

мы можем воспользоваться результатом утверждения 2.

Для этого найдем интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy}\, \theta(ax)\, e^{-ax} dx$$

В случае $a > 0$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy}\, \theta(ax)\, e^{-ax} dx = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{x(iy-a)} dx = \frac{e^{x(iy-a)}}{iy-a}\Bigg|_{0}^{+\infty} = \frac{-1}{iy-a}$$

В случае $a < 0$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy}\, \theta(ax)\, e^{-ax} dx = \int\limits_{-\infty}^{0} e^{x(iy-a)} dx = \frac{e^{x(iy-a)}}{iy-a}\Bigg|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{iy-a}$$

Объединяя обе формулы в одну, получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy}\, \theta(ax)\, e^{-ax} dx = \frac{-\operatorname{sign} a}{iy - a} = \frac{i \operatorname{sign} a}{y + ia}$$

Таким образом,

$$F\left[\theta(ax)\, e^{-ax}\right](y) = \frac{i \operatorname{sign} a}{y + ia}$$

Ответ. $\quad F\left[\theta(ax)\, e^{-ax}\right](y) = \dfrac{i \operatorname{sign} a}{y + ia}$

Для любого действительного числа $a \neq 0$ из полученного в задаче 10 результата и свойств преобразований Фурье вытекают следующие утверждения:

- $$F^{-1}\left[\frac{1}{x + ia}\right](y) = \frac{1}{i \operatorname{sign} a}\, \theta(ay)\, e^{-ay} = -i \operatorname{sign} a\, \theta(ay)\, e^{-ay}$$

- $$F^{-1}\left[\frac{1}{x + b + ia}\right](y) = e^{iby} F^{-1}\left[\frac{1}{x + ia}\right](y) = -i \operatorname{sign} a\, \theta(ay)\, e^{-ay+iby}$$

- $$F\left[\frac{1}{x + b + ia}\right](y) = 2\pi F^{-1}\left[\frac{1}{x + b + ia}\right](-y) =$$

$$= -2\pi i \operatorname{sign} a\, \theta(-ay)\, e^{ay-iby}$$

Существует и другой способ вычисления преобразования Фурье от дроби

$$\frac{1}{x + b + ia}$$

Этот способ является прямым вычислением преобразования Фурье данного регулярного функционала и использует методы ТФКП. Однако при таком пути решения требуются большие затраты времени и усилий, в том числе и на обоснование производимых действий. Мы на нем останавливаться не будем.

Упражнение для всех желающих. Выведите формулы Сохоцкого с помощью результатов, полученных выше.

Примеры вычисления преобразования Фурье в $S'(\mathbb{R}^3)$

Рассмотрим примеры вычисления преобразований Фурье для обобщенных функций из $S'(\mathbb{R}^3)$.

Как и в одномерном случае, выберем сначала функцию, для которой найти преобразование Фурье не очень сложно, вычислим его, а затем, используя полученный результат, найдем преобразования Фурье более сложных в вычислительном плане функций.

Задача 11 (задание 1.17 б)) *Вычислить в* $S'(\mathbb{R}^3)$ *преобразование Фурье обобщенной функции*

$$f(x) = \frac{1}{|x|},$$

где $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ *– длина вектора* $x = (x_1, x_2, x_3)$.

Решение. По определению преобразования Фурье обобщенной функции для любой основной функции $\varphi \in S(\mathbb{R}^3)$ выполнено равенство

$$\left\langle F\left[\frac{1}{|x|}\right](y)\,,\,\varphi(y)\right\rangle = \left\langle \frac{1}{|x|}\,,\,F\left[\varphi(y)\right](x)\right\rangle$$

Поскольку для любой основной функции $\varphi \in S(\mathbb{R}^3)$ существует число M такое, что

$$|\varphi(x)| \leqslant \frac{M}{1+|x|^4}\,, \tag{3}$$

то выполнены неравенства

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi(x)}{|x|}dx\right| \leqslant \int\limits_0^{\infty} dr \int\limits_0^{2\pi} d\psi \int\limits_0^{\pi} d\theta\ \frac{|\varphi(x)|\,r^2\sin\theta}{r} \leqslant 4\pi M \int\limits_0^{\infty} \frac{r}{1+r^4}\,dr < \infty\,.$$

Поэтому функция $\dfrac{1}{|x|}$ задает регулярный функционал в $S(\mathbb{R}^3)$. Следовательно,

$$\left\langle \frac{1}{|x|}\,,\,F\left[\varphi(y)\right](x)\right\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{F\left[\varphi(y)\right](x)}{|x|}dx = \int\limits_{\mathbb{R}^3} dx \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{i(x,y)}\ \varphi(y)}{|x|}dy$$

К сожалению, просто изменить порядок интегрирования в получившемся интеграле нельзя, так как функция

$$\frac{e^{i(x,y)}\,\varphi(y)}{|x|}$$

не является абсолютно интегрируемой по переменной x.

Поэтому, воспользовавшись тем, что повторный интеграл

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} dx \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{i(x,y)}\,\varphi(y)}{|x|} dy$$

сходится, получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} dx \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{i(x,y)}\,\varphi(y)}{|x|} dy = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{|x|<R} dx \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{i(x,y)}\,\varphi(y)}{|x|} dy.$$

По теореме Фубини

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{|x|<R} dx \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{i(x,y)}\,\varphi(y)}{|x|} dy = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dy\,\varphi(y) \int\limits_{|x|<R} \frac{e^{i(x,y)}}{|x|} dx \tag{4}$$

и остается вычислить интеграл

$$\int\limits_{|x|<R} \frac{e^{i(x,y)}}{|x|} dx\,.$$

Для этого перейдем к сферическим координатам, при этом введем их так, чтобы угол θ был углом между вектором x и вектором y.

$$\int\limits_{|x|<R} \frac{e^{i(x,y)}}{|x|} dx = \int\limits_0^R dr \int\limits_0^{2\pi} d\psi \int\limits_0^{\pi} \frac{1}{r}\, e^{\,ir|y|\cos\theta}\, r^2 \sin\theta d\theta =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^R dr \int\limits_0^{\pi} e^{\,ir|y|\cos\theta}\, r\sin\theta d\theta = 2\pi \int\limits_0^R \left.\frac{e^{\,ir|y|\cos\theta}}{-i|y|}\right|_0^{\pi} dr =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^R \frac{e^{-ir|y|} - e^{\,ir|y|}}{-i|y|} dr = \frac{4\pi}{|y|} \int\limits_0^R \sin(r|y|)dr = -\frac{4\pi}{|y|^2}\Big(\cos\big(R\,|y|\big) - 1\Big)$$

Подставим полученный результат в формулу (4)

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dy\ \varphi(y) \int\limits_{|x|<R} \frac{e^{i(x,y)}}{|x|}dx = -\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{4\pi\,\varphi(y)}{|y|^2}\Big(\cos\big(R\,|y|\big)-1\Big)dy =$$

$$= -\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{4\pi\,\varphi(y)}{|y|^2}\cos\big(R\,|y|\big)dy + 4\pi\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{\varphi(y)}{|y|^2}dy =$$

$$= -\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{4\pi\,\varphi(y)}{|y|^2}\cos\big(R\,|y|\big)dy + \left\langle \frac{4\pi}{|y|^2}\,,\,\varphi(y)\right\rangle$$

Докажем, что

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{4\pi\,\varphi(y)}{|y|^2}\cos\big(R\,|y|\big)dy = 0\ . \tag{5}$$

Действительно,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{4\pi\,\varphi(y)}{|y|^2}\cos\big(R\,|y|\big)dy =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} dr \int\limits_0^{2\pi} d\psi \int\limits_0^{\pi}\ \frac{4\pi\,\varphi\big(r\cos\psi\sin\theta, r\sin\psi\sin\theta, r\cos\theta\big)}{r^2}\cos\big(Rr\big)\ r^2\sin\theta\ d\theta =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} dr\cos\big(Rr\big) \int\limits_0^{2\pi} d\psi \int\limits_0^{\pi}\ 4\pi\varphi\big(r\cos\psi\sin\theta, r\sin\psi\sin\theta, r\cos\theta\big)\sin\theta\ d\theta$$

В силу неравенства (3) имеем оценку

$$\left| \int\limits_0^{2\pi} d\psi \int\limits_0^{\pi}\ 4\pi\varphi\big(r\cos\psi\sin\theta, r\sin\psi\sin\theta, r\cos\theta\big)\sin\theta\ d\theta \right| \leqslant \frac{16\pi^2 M}{1+r^4}$$

и, поскольку функция

$$\frac{16\pi^2 M}{1+r^4}$$

является абсолютно интегрируемой, то по лемме Римана получаем справедливость формулы (5).

Таким образом,

$$\left\langle F\left[\frac{1}{|x|}\right](y)\,,\,\varphi(y)\right\rangle = \left\langle \frac{4\pi}{|y|^2}\,,\,\varphi(y)\right\rangle$$

Ответ. $\quad F\left[\dfrac{1}{|x|}\right](y) = \dfrac{4\pi}{|y|^2}$

Из полученного в задаче 11 результата легко вытекают следующие утверждения:

- $\quad F^{-1}\left[\dfrac{1}{|x|^2}\right](y) = \dfrac{1}{4\pi|y|}$
- **(задание 1.17 а))** $\quad F\left[\dfrac{1}{|x|^2}\right](y) = (2\pi)^3 F^{-1}\left[\dfrac{1}{|x|^2}\right](-y) = \dfrac{2\pi^2}{|y|}$
- $\quad F^{-1}\left[\dfrac{1}{|x|}\right](y) = \dfrac{1}{2\pi^2|y|^2}$

Вычисление преобразования Фурье для δ - функции, сосредоточенной на сфере **(задание 1.17 г))**

$$\left\langle \delta_S(x)\,,\,\varphi(x)\right\rangle = \int\limits_{|x|=1} \varphi(y)\;dS_y\,,$$

проводится по той же схеме, что и решение задачи 11, но является более простым, поскольку в этом случае для применения теоремы Фубини не требуется переход к пределу. Оставляю это Вам для самостоятельного решения.

Задача 12 (задание 1.17 в)) *Вычислить в $S'(\mathbb{R}^3)$ преобразование Фурье обобщенной функции*

$$f(x) = |x|,$$

где $|x| = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$ – длина вектора $x = (x_1, x_2, x_3)$.

Решение. Используя свойства преобразования Фурье и результат задачи 11, получаем

$$F\big[\,|x|\,\big](y) = F\left[|x|^2\cdot\frac{1}{|x|}\right](y) = -F\left[\Big((ix_1)^2+(ix_2)^2+(ix_3)^2\Big)\cdot\frac{1}{|x|}\right](y) =$$

$$= -\Delta F\left[\frac{1}{|x|}\right](y) = -4\pi\Delta\left(\frac{1}{|y|^2}\right)$$

Ответ. $F\left[|x|\right](y) = -4\pi\Delta\left(\dfrac{1}{|y|^2}\right)$

Замечание. По согласованию с лектором ответ оставляем в таком виде.

Примеры вычисления преобразования Фурье в $S'(\mathbb{R}^m)$

В качестве примеров вычисления преобразований Фурье в $S'(\mathbb{R}^m)$ решим следующие задачи.

Задача 13 *Вычислить в* $S'(\mathbb{R}^m)$ *преобразование Фурье обобщенной функции* $\delta(x)$.

Решение. По определению преобразования Фурье обобщенной функции для любой основной функции $\varphi \in S(\mathbb{R}^m)$ выполнено равенство

$$\Big\langle F\big[\delta(x)\big](y)\,,\,\varphi(y)\Big\rangle = \Big\langle \delta(x)\,,\,F\big[\varphi(y)\big](x)\Big\rangle = \left\langle \delta(x)\,,\,\int\limits_{\mathbb{R}^m} e^{\,i(x,y)}\varphi(y)\,dy\right\rangle =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^m} \varphi(y)\,dy = \big\langle 1\,,\,\varphi(y)\big\rangle$$

Ответ. $F\big[\delta(x)\big](y) = 1$

Задача 14 *Вычислить в* $S'(\mathbb{R}^m)$ *преобразование Фурье обобщенной функции*

$$f(x) = 1$$

Решение. С учетом результата задачи 13 получаем

$$F\left[1\right](y) = (2\pi)^m F^{-1}\left[1\right](y) = (2\pi)^m\delta(y)$$

Ответ. $F\left[1\right](y) = (2\pi)^m\delta(y)$

Задача 15 (задание 1.18 б)) *Для* $x \in \mathbb{R}^m$ *и* $a \in \mathbb{R}^m$ *вычислить в* $S'(\mathbb{R}^m)$ *преобразование Фурье обобщенной функции*

$$f(x) = |x-a|^2,$$

где $|x-a| = \sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+\ldots+(x_m-a_m)^2}$ *– длина вектора* $(x-a) = (x_1-a_1, x_2-a_2, \ldots, x_m-a_m)$.

Решение. Используя свойства преобразования Фурье и результат задачи 14, получаем

$$F\left[|x-a|^2\right](y) = F\left[|x-a|^2 \cdot 1\right](y) =$$

$$= F\left[\Big((x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+\ldots+(x_m-a_m)^2\Big)\cdot 1\right](y) =$$

$$= F\Big[\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_m^2-2x_1a_1-\ldots-2x_ma_m+a_1^2+\ldots+a_m^2\right)\cdot 1\Big](y) =$$

$$= -F\left[\Big((ix_1)^2+(ix_2)^2+\ldots+(ix_m)^2\Big)\cdot 1\right](y)+$$

$$+2ia_1F\left[ix_1\cdot 1\right](y)+\ldots+2ia_mF\left[ix_m\cdot 1\right](y)+\left(a_1^2+\ldots+a_m^2\right)F[1](y) =$$

$$= -\Delta F[1](y)+2ia_1\frac{\partial F[1](y)}{\partial y_1}+\ldots+2ia_m\frac{\partial F[1](y)}{\partial y_m}+\left(a_1^2+\ldots+a_m^2\right)F[1](y) =$$

$$= (2\pi)^m\left(-\Delta\delta(y)+2ia_1\frac{\partial\delta(y)}{\partial y_1}+\ldots+2ia_m\frac{\partial\delta(y)}{\partial y_m}+\left(a_1^2+\ldots+a_m^2\right)\delta(y)\right)$$

Ответ.

$$(2\pi)^m\left(-\Delta\delta(y)+2ia_1\frac{\partial\delta(y)}{\partial y_1}+\ldots+2ia_m\frac{\partial\delta(y)}{\partial y_m}+\left(a_1^2+\ldots+a_m^2\right)\delta(y)\right)$$

Остальные задачи задания 1.18 решаются аналогичными методами. Решите эти задачи самостоятельно.

На следующем занятии мы рассмотрим линейные замены в аргументе обобщенной функции.

Спасибо за внимание.
Не болейте!