Дифференцирование обобщенных функций

Самарова С.С.

ФОПФ, 3 курс, УМФ

Учебное пособие для дистанционных занятий

В данном пособии мы продолжим изучение пространства обобщенных функций $S'(\mathbb{R}^m)$ и рассмотрим операцию дифференцирования обобщенных функций.

Как мы хорошо знаем, обычная (не обобщенная) функция не всегда является дифференцируемой, однако у каждой обобщенной функции существуют все частные производные любого порядка.

Определение 1 *Пусть f – произвольная обобщенная функция из пространства $S'(\mathbb{R}^m)$ и α – произвольный мультииндекс.*

Частной производной $\partial^\alpha f$ называют обобщенную функцию, действие которой на каждую основную функцию $\varphi(x) \in S(\mathbb{R}^m)$ определяется формулой

$$\langle \partial^\alpha f \, , \, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f \, , \, \partial^\alpha \varphi \rangle$$

Объясним, откуда возникло такое определение на самом простом примере.

Для этого рассмотрим непрерывно дифференцируемую функцию медленного роста $f(x)$, производная $f'(x)$ которой также имеет медленный рост. Тогда для любой основной функции $\varphi(x) \in S(\mathbb{R})$ справедливо равенство

$$\langle f' \, , \, \varphi \rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\, dx = f(x)\varphi(x)\big|_{-\infty}^{+\infty} - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\, dx =$$

$$= -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx = -\left\langle f\,,\,\varphi'(x)\right\rangle,$$

что полностью соответствует определению 1.

Как мы видим, определение 1 расширяет понятие дифференцирования и дает возможность находить производные у некоторых функций, которые не являются дифференцируемыми в обычном смысле.

Рассмотрим несколько примеров.

Задача 1 *В пространстве $S'(\mathbb{R})$ найти производную θ-функции Хевисайда*

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < 0; \\ 1, & \text{если} \quad x \geqslant 0. \end{cases}$$

Решение. График функции Хевисайда изображен на рис.1

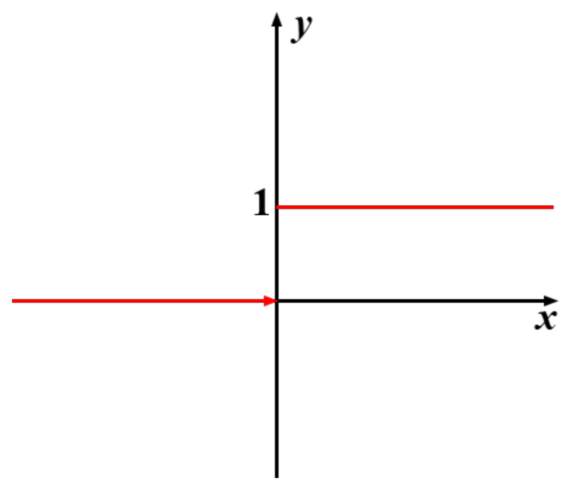

Рис.1

Функция $\theta(x)$ является функцией медленного роста и задает регулярный функционал в пространстве $S'(\mathbb{R})$. Найдем его производную $\theta'(x)$ в $S'(\mathbb{R})$.

В соответствии с определением дифференцирования в $S'(\mathbb{R})$ для любой основной функции $\varphi(x) \in S(\mathbb{R})$ выполнены равенства

$$\left\langle \theta'(x)\,,\,\varphi(x)\right\rangle = -\left\langle \theta(x)\,,\,\varphi'(x)\right\rangle = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \theta(x)\,\varphi'(x)\,dx = -\int\limits_{0}^{+\infty} \varphi'(x)\,dx =$$

$$= -\,\varphi(x)\big|_0^{+\infty} = \varphi(0) = \left\langle \delta(x)\,,\,\varphi(x)\right\rangle$$

Следовательно,
$$\theta'(x) = \delta(x)$$

Решение задачи 1 завершено.

Для решения следующей задачи нам потребуется еще одно определение.

Определение 2 *Обобщенной функцией* $\delta(x - x_0)$, *где* $x_0 \in \mathbb{R}^m$, *называют функционал из пространства* $S'(\mathbb{R}^m)$, *действие которого на каждую основную функцию* $\varphi(x) \in S(\mathbb{R}^m)$ *определяется формулой*
$$\big\langle \delta(x - x_0)\,,\, \varphi \big\rangle = \varphi(x_0)$$

Задача 2 *В пространстве* $S'(\mathbb{R})$ *найти производную функции*
$$f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{если} \quad x < -1; \\ 2 - 2x^2, & \text{если} \quad -1 \leqslant x \leqslant 1,5; \\ 2x - 1, & \text{если} \quad x > 1,5. \end{cases}$$

Решение. График функции $f(x)$ изображен на рис.2

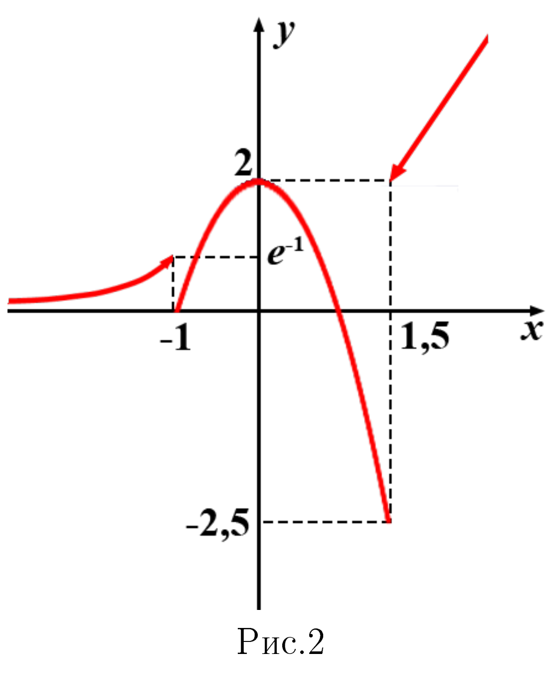

Рис.2

Функция $f(x)$ является функцией медленного роста и задает регулярный функционал в пространстве $S'(\mathbb{R})$. Найдем его производную $f'(x)$ в $S'(\mathbb{R})$.

В соответствии с определением дифференцирования в $S'(\mathbb{R})$ для любой основной функции $\varphi(x) \in S(\mathbb{R})$ выполнены равенства

$$\left\langle f'(x)\,,\,\varphi(x)\right\rangle = -\left\langle f(x)\,,\,\varphi'(x)\right\rangle = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi'(x)\,dx =$$

$$= -\int\limits_{-\infty}^{-1} e^x\,\varphi'(x)\,dx - \int\limits_{-1}^{1{,}5}(2-2x^2)\varphi'(x)\,dx - \int\limits_{1{,}5}^{+\infty}(2x-1)\varphi'(x)\,dx =$$

$$= -\left. e^x\,\varphi(x)\right|_{-\infty}^{-1} + \int\limits_{-\infty}^{-1} e^x\,\varphi(x)\,dx - \left.(2-2x^2)\,\varphi(x)\right|_{-1}^{1{,}5} + \int\limits_{-1}^{1{,}5}(-4x)\,\varphi(x)\,dx -$$

$$-\left.(2x-1)\,\varphi(x)\right|_{1{,}5}^{+\infty} + \int\limits_{1{,}5}^{+\infty} 2\,\varphi(x)\,dx =$$

$$= -e^{-1}\varphi(-1) + \int\limits_{-\infty}^{-1} e^x\,\varphi(x)\,dx + 2,5\,\varphi(1,5) + \int\limits_{-1}^{1{,}5}(-4x)\,\varphi(x)\,dx + 2\,\varphi(1,5) +$$

$$+\int\limits_{1{,}5}^{+\infty} 2\,\varphi(x)\,dx =$$

$$= -e^{-1}\varphi(-1) + 4,5\,\varphi(1,5) + \int\limits_{-\infty}^{-1} e^x\,\varphi(x)\,dx + \int\limits_{-1}^{1{,}5}(-4x)\,\varphi(x)\,dx + \int\limits_{1{,}5}^{+\infty} 2\,\varphi(x)\,dx$$

Если обозначить через $\{f'(x)\}$ функцию

$$\{f'(x)\} = \begin{cases} e^x, & \text{если} \quad x < -1; \\ -4x, & \text{если} \quad -1 < x < 1,5; \\ 2, & \text{если} \quad x > 1,5; \end{cases}$$

которая совпадает с производной кусочно-гладкой функции $f(x)$ в тех точках, где эта производная существует, т.е. на множестве

$$(-\infty; -1) \cup (-1; 1,5) \cup (1,5\,; +\infty)\,,$$

то действие обобщенной функции $f'(x)$ на основную функцию $\varphi(x)$ можно записать по формулам

$$\big\langle f'(x)\,,\,\varphi(x)\big\rangle =$$

$$= -e^{-1}\big\langle \delta(x+1)\,,\,\varphi(x)\big\rangle + 4,5\big\langle \delta(x-1,5)\,,\,\varphi(x)\big\rangle + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \{f'(x)\}\,\varphi(x)\,dx =$$

$$= \big\langle -e^{-1}\delta(x+1) + 4,5\,\delta(x-1,5) + \{f'(x)\}\,,\,\varphi(x)\big\rangle$$

Таким образом, производная функции $f(x)$ в пространстве $S'(\mathbb{R})$ имеет вид

$$f'(x) = -e^{-1}\delta(x+1) + 4,5\,\delta(x-1,5) + \{f'(x)\} \tag{1}$$

Решение задачи 2 завершено.

Замечание. В формуле (1) числа $-e^{-1}$ и $4,5$ представляют собой скачки кусочно-гладкой функции $f(x)$ в точках разрыва $x=-1$ и $x=1,5$ соответственно:

$$h(-1) = f(-1+0) - f(-1-0) = -e^{-1}\,;$$

$$h(1,5) = f(1,5+0) - f(1,5-0) = 4,5\,,$$

и формулу (1) можно переписать в виде

$$f'(x) = h(-1)\,\delta(x+1) + h(1,5)\,\delta(x-1,5) + \{f'(x)\}$$

Дифференцирование других кусочно-гладких функций медленного роста в пространстве $S'(\mathbb{R})$ осуществляется аналогично.

Пожалуйста, не ошибайтесь в знаках при вычислении скачков! Скачок функции $f(x)$ в точке $x=x_0$ вычисляется по формуле

$$h(x_0) = f(x_0+0) - f(x_0-0)$$

Задача 3 (задание, задача 1.10) *В пространстве* $S'(\mathbb{R})$ *доказать равенство*

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \mathcal{P}\frac{1}{x}$$

Решение. Покажем, что функция $\ln|x|$ задает регулярный функционал на пространстве $S(\mathbb{R})$.

Для этого сначала проверим, что интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln|x|\,\varphi(x)\,dx$$

существует для любой основной функции $\varphi(x)\in S(\mathbb{R})$.

С этой целью представим его в виде суммы трёх интегралов

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln|x|\,\varphi(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{-1} \ln|x|\,\varphi(x)\,dx + \int\limits_{1}^{+\infty} \ln|x|\,\varphi(x)\,dx + \int\limits_{-1}^{1} \ln|x|\,\varphi(x)\,dx$$

и докажем существование каждого из них.

- Для доказательства существования первых двух интегралов заметим, что при $|x|\geqslant 1$ выполнено неравенство

  $$\big|\ln|x|\,\varphi(x)\big| < |x|\,|\varphi(x)|$$

  Поскольку $\varphi(x)\in S(\mathbb{R})$, то существует такая константа $M>0$, что

  $$\big|\ln|x|\,\varphi(x)\big| < |x|\,|\varphi(x)| < \frac{M}{1+x^2}$$

  Функция

  $$\frac{M}{1+x^2}$$

  интегрируема на полуинтервалах $(-\infty,-1]$ и $[1,+\infty)$, откуда по теореме сравнения следует существование интегралов

  $$\int\limits_{-\infty}^{-1} \ln|x|\,\varphi(x)\,dx \qquad \text{и} \qquad \int\limits_{1}^{+\infty} \ln|x|\,\varphi(x)\,dx\,.$$

- Для доказательства существования третьего интеграла представим его в виде суммы двух интегралов

$$\int\limits_{-1}^{1} \ln|x|\,\varphi(x)\,dx = \int\limits_{-1}^{0} \ln(-x)\,\varphi(x)\,dx + \int\limits_{0}^{1} \ln x\,\varphi(x)\,dx$$

Воспользовавшись в первом из слагаемых заменой переменной

$$y = -x; \quad dy = -dx,$$

получаем

$$\int\limits_{-1}^{1} \ln|x|\,\varphi(x)\,dx = -\int\limits_{1}^{0} \ln y\,\varphi(-y)\,dy + \int\limits_{0}^{1} \ln x\,\varphi(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{0}^{1} \ln x\,\big(\varphi(x) + \varphi(-x)\big)\,dx$$

Сделаем еще одну замену переменной

$$x = \frac{1}{y}; \quad dx = -\frac{dy}{y^2}$$

Тогда

$$\int\limits_{0}^{1} \ln x\,\big(\varphi(x) + \varphi(-x)\big)\,dx = -\int\limits_{+\infty}^{1} (-\ln y)\left(\varphi\left(\frac{1}{y}\right) + \varphi\left(-\frac{1}{y}\right)\right)\frac{dy}{y^2} =$$

$$= \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{(-\ \ln y)}{y^2}\left(\varphi\left(\frac{1}{y}\right) + \varphi\left(-\frac{1}{y}\right)\right) dy$$

В силу неравенства

$$\ln y \leqslant \sqrt{y}, \qquad \forall y \in [1, +\infty)\,,$$

справедлива оценка

$$\left|-\ \frac{\ln y}{y^2}\left(\varphi\left(\frac{1}{y}\right) + \varphi\left(-\frac{1}{y}\right)\right)\right| \leqslant \frac{1}{y^{3/2}}\left(\left|\varphi\left(\frac{1}{y}\right)\right| + \left|\varphi\left(-\frac{1}{y}\right)\right|\right) \leqslant \frac{2M}{y^{3/2}}\,,$$

где M – положительная константа. Поскольку интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{2M}{y^{3/2}}\,dy < \infty\,,$$

то по теореме сравнения получаем, что интеграл

$$\int\limits_{-1}^{1} \ln|x|\,\varphi(x)\,dx$$

существует.

Тем самым доказано, что областью определения функционала, задаваемого функцией $\ln|x|$, является пространство $S(\mathbb{R})$.

Непрерывность этого функционала доказывается по той же схеме с использованием понятия сходимости в пространстве $S(\mathbb{R})$. Из-за недостатка времени оставляю это доказательство в качестве упражнения для всех желающих.

В соответствии с определением дифференцирования в $S'(\mathbb{R})$ для любой основной функции $\varphi(x) \in S(\mathbb{R})$ имеем

$$\left\langle \frac{d}{dx}\,\ln|x|\,,\,\varphi(x)\right\rangle = -\left\langle \ln|x|\,,\,\varphi'(x)\right\rangle = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln|x|\,\varphi'(x)\,dx =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to+0}\Bigg(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} \ln(-x)\,\varphi'(x)\,dx + \int\limits_{+\varepsilon}^{+\infty} \ln x\,\varphi'(x)\,dx\Bigg) =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to+0}\Bigg(\ln(-x)\,\varphi(x)\big|_{-\infty}^{-\varepsilon} - \int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx + \ln x\,\varphi(x)\big|_{+\varepsilon}^{+\infty} - \int\limits_{+\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx\Bigg) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\Big(\ln\varepsilon\,\varphi(\varepsilon) - \ln\varepsilon\,\varphi(-\varepsilon)\Big) + \text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$$

Докажем, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\Big(\ln\varepsilon\,\varphi(\varepsilon) - \ln\varepsilon\,\varphi(-\varepsilon)\Big) = 0$$

Действительно,

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\Big(\ln\varepsilon\,\varphi(\varepsilon)-\ln\varepsilon\,\varphi(-\varepsilon)\Big)=\lim_{\varepsilon\to+0}(2\varepsilon\,\ln\varepsilon)\cdot\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon)}{2\varepsilon}=0\cdot\varphi'(0)=0$$

Таким образом,

$$\left\langle\frac{d}{dx}\,\ln|x|\,,\,\varphi(x)\right\rangle=\text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx=\left\langle\mathcal{P}\frac{1}{x}\,,\,\varphi(x)\right\rangle,$$

что и требовалось доказать.

После перерыва мы рассмотрим методы решения простейших линейных однородных уравнений в пространстве $S'(\mathbb{R})$.

Спасибо за внимание.
Не болейте!