О замене переменной в аргументе дельта-функции. Примеры решения задач

Самарова С.С.

ФОПФ, 3 курс, УМФ

Учебное пособие для дистанционных занятий

Задачи, связанные с линейными заменами в аргументе обобщённых функций, разбирались на соответствующем вебинаре и в пособии для дистанционных занятий. В данном пособии рассматриваются задачи, связанные с обобщёнными функциями, которые построены из одномерной дельта-функции с помощью замен в аргументе (не обязательно линейных) и умножения на локально интегрируемую функцию.

Пусть непрерывная в $\mathbb{R}^m$ функция $\psi(x)$ принимает только действительные значения, а локально интегрируемая в $\mathbb{R}^m$ функция $h(x)$ удовлетворяет условию: для некоторого натурального числа p интеграл

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{|h(x)|dx}{1+|x|^p}$$

сходится.

Определение 1 *Обобщенной функцией*

$$h(x)\delta\big(t-\psi(x)\big)$$

называют функционал на $S(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m)$, *заданный для* $\forall\varphi(t,x)\in S(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m)$

формулой

$$\Big\langle h(x)\delta\big(t-\psi(x)\big)\,,\,\varphi(t,x)\Big\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^m} h(x)\,\varphi\big(\psi(x),x\big)\,dx \tag{1}$$

Замечание. С частными случаями обобщенных функций такого типа мы встречались и раньше. Например, на вебинаре «Линейные замены в аргументе обобщенной функции» при решении задачи 3 (задание 1.20) мы вывели формулу, описывающую действие обобщенной функции $\delta(x_1-x_2)\in S'(\mathbb{R}^2)$ на основную, а именно, для $\forall\varphi(x)\in S(\mathbb{R}^2)$

$$\big\langle\delta(x_1-x_2)\,,\,\varphi(x_1,x_2)\big\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t,t)\,dt\,.$$

Нетрудно заметить, что этот результат полностью совпадает с формулой (1), если в ней переобозначить переменные

$$t=x_1,\quad x=x_2$$

и положить

$$h(x)=1,\quad \psi(x)=x_2\,.$$

Приведем примеры использования определения 1. Для этого сначала решим задачу из экзаменационной контрольной по УМФ 2018/2019 учебного года.

Задача 1 *Найти в пространстве* $S'(\mathbb{R}^2)$ *преобразование Фурье обобщенной функции*

$$f(x,y)=|x|\,\delta(2x-y)\,.$$

Решение.

В силу определения преобразования Фурье обобщенной функции для любой основной функции $\varphi(\xi,\zeta)\in S(\mathbb{R}^2)$ выполнено равенство

$$\Big\langle F\big[|x|\delta(2x-y)\big](\xi,\zeta)\,,\,\varphi(\xi,\zeta)\Big\rangle = \Big\langle |x|\delta(2x-y)\,,\,F\big[\varphi(\xi,\zeta)\big](x,y)\Big\rangle$$

К сожалению, **было бы неверным** далее написать, что

$$\Big\langle |x|\delta(2x-y)\,,\,F\big[\varphi(\xi,\zeta)\big](x,y)\Big\rangle = \Big\langle \delta(2x-y)\,,\,|x|F\big[\varphi(\xi,\zeta)\big](x,y)\Big\rangle,$$

поскольку функция $|x|$ не является бесконечно дифференцируемой, а, значит, функция

$$|x|F\big[\varphi(\xi,\zeta)\big](x,y) \notin S(\mathbb{R}^2)\,.$$

По этой причине придется поступить по-другому. Сделаем линейную замену

$$\begin{cases} t=-y, \\ \tilde{x}=-x, \end{cases} \qquad |\det A|=1$$

в аргументе обобщенной функции

$$f(x,y)=|x|\delta(2x-y)$$

(см. пособие «Линейные замены в аргументе обобщенной функции», определение замены в случае, когда размерности совпадают). В результате получим

$$\Big\langle |x|\delta(2x-y)\,,\,F\big[\varphi(\xi,\zeta)\big](x,y)\Big\rangle = \Big\langle |\tilde{x}|\delta(t-2\tilde{x}), F\big[\varphi(\xi,\zeta)\big](-\tilde{x},-t)\Big\rangle$$

Воспользуемся теперь определением 1, в котором положим

$$h(\tilde{x})=|\tilde{x}|, \quad \psi(\tilde{x})=2\tilde{x}$$

Тогда

$$\Big\langle |\tilde{x}|\delta(t-2\tilde{x})\,,\,F\big[\varphi(\xi,\zeta)\big](-\tilde{x},-t)\Big\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\tilde{x}|F\big[\varphi(\xi,\zeta)\big](-\tilde{x},-2\tilde{x})\,d\tilde{x} =$$

В результате замены переменной

$$z=-\tilde{x}$$

получим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\tilde{x}|F\big[\varphi(\xi,\zeta)\big](-\tilde{x},-2\tilde{x})\,d\tilde{x} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |z|F\left[\varphi(\xi,\zeta)\right](z,2z)\,dz =$$

$$= \Big\langle |z| \,,\, F\big[\varphi(\xi,\zeta)\big](z,2z) \Big\rangle = i\Big\langle -iz\cdot \operatorname{sign} z \,,\, F\big[\varphi(\xi,\zeta)\big](z,2z) \Big\rangle =$$

$$= i\Big\langle \operatorname{sign} z \,,\, -izF\big[\varphi(\xi,\zeta)\big](z,2z) \Big\rangle = i\left\langle \operatorname{sign} z \,,\, F\left[\frac{\partial\varphi(\xi,\zeta)}{\partial\xi}\right](z,2z) \right\rangle \qquad (2)$$

При решении задачи 1.14 в) из задания (см. пособие «Преобразование Фурье обобщенных функций из $S'(\mathbb{R}^m)$», задача 6) было найдено преобразование Фурье

$$F\left[\operatorname{sign} z\right](y) = 2i\,\mathcal{P}\frac{1}{y}$$

Следовательно,

$$\operatorname{sign} z = 2i\,F^{-1}\left[\mathcal{P}\frac{1}{y}\right](z)$$

Поэтому выражение (2) можно представить в виде

$$i\left\langle \operatorname{sign} z \,,\, F\left[\frac{\partial\varphi(\xi,\zeta)}{\partial\xi}\right](z,2z) \right\rangle = i\left\langle 2i\,F^{-1}\left[\mathcal{P}\frac{1}{y}\right](z) \,,\, F\left[\frac{\partial\varphi(\xi,\zeta)}{\partial\xi}\right](z,2z) \right\rangle$$

Согласно определению линейной замены в аргументе обобщенной функции (см. пособие «Линейные замены в аргументе обобщенной функции») полученное выражение можно переписать:

$$i\left\langle 2i\,F^{-1}\left[\mathcal{P}\frac{1}{y}\right](z) \,,\, F\left[\frac{\partial\varphi(\xi,\zeta)}{\partial\xi}\right](z,2z) \right\rangle = -2\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{\xi+2\zeta} \,,\, \frac{\partial\varphi(\xi,\zeta)}{\partial\xi} \right\rangle =$$
$$= 2\left\langle \frac{\partial}{\partial\xi}\,\mathcal{P}\frac{1}{\xi+2\zeta} \,,\, \varphi(\xi,\zeta) \right\rangle$$

Таким образом,

$$F\big[|x|\,\delta(2x-y)\big](\xi,\zeta) = 2\frac{\partial}{\partial\xi}\,\mathcal{P}\frac{1}{\xi+2\zeta}$$

Дальнейшее упрощение этого выражения не требуется.

Ответ. $2\dfrac{\partial}{\partial\xi}\,\mathcal{P}\dfrac{1}{\xi+2\zeta}$

В заключение решим еще одну задачу, требующую применения определения 1.

Задача 2 (задание 1.23 б)) *Пусть* $a > 0$. *В пространстве* $S'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$ *найти преобразование Фурье по переменной* $x \in \mathbb{R}^3$ *обобщенной функции*

$$f(t, x) = \frac{\delta(at - |x|)}{|x|}$$

Решение. Сначала для $\forall \varphi(t, x) \in S(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$ вычислим действие функционала

$$\left\langle \frac{\delta(at - |x|)}{|x|}, \varphi(t, x) \right\rangle \tag{3}$$

Воспользовавшись линейной заменой

$$\begin{cases} \tau = at, \\ \tilde{x} = x, \end{cases} \qquad |\det A| = a$$

в аргументе обобщенной функции

$$f(x, y) = \frac{\delta(at - |x|)}{|x|}$$

(см. пособие «Линейные замены в аргументе обобщенной функции», определение замены для случая, когда размерности совпадают), получаем

$$\left\langle \frac{\delta(at - |x|)}{|x|}, \varphi(t, x) \right\rangle = \left\langle \frac{1}{|\tilde{x}|} \delta(\tau - |\tilde{x}|), \frac{1}{a} \varphi\left(\frac{\tau}{a}, \tilde{x}\right) \right\rangle$$

Поскольку функция

$$h(\tilde{x}) = \frac{1}{|\tilde{x}|}$$

является локально интегрируемой в $\mathbb{R}^3$ (это легко проверить, перейдя к сферическим координатам), применим формулу (1) из определения 1

$$\left\langle \frac{1}{|\tilde{x}|} \delta(\tau - |\tilde{x}|), \frac{1}{a} \varphi\left(\frac{\tau}{a}, \tilde{x}\right) \right\rangle = \frac{1}{a} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\tilde{x}|} \varphi\left(\frac{|\tilde{x}|}{a}, \tilde{x}\right) d\tilde{x} \tag{4}$$

Так как функция

$$\frac{1}{|\tilde{x}|} \varphi\left(\frac{|\tilde{x}|}{a}, \tilde{x}\right)$$

является абсолютно интегрируемой в $\mathbb{R}^3$, то, применяя теорему Фубини к интегралу в в правой части формулы (4), получаем равенство

$$\left\langle \frac{1}{|\tilde{x}|}\delta(\tau - |\tilde{x}|)\,,\, \frac{1}{a}\,\varphi\left(\frac{\tau}{a}\,,\tilde{x}\right)\right\rangle = \frac{1}{a}\int\limits_{0}^{+\infty} dr \int\limits_{|\tilde{x}|=r} \frac{1}{r}\,\varphi\left(\frac{r}{a}\,,\,\tilde{x}\right)\,dS_{\tilde{x}}$$

Сделав во внешнем интеграле правой части формулы (4) замену переменной

$$r = at, \quad dr = a\,dt,$$

запишем

$$\frac{1}{a}\int\limits_{0}^{+\infty} dr \int\limits_{|\tilde{x}|=r} \frac{1}{r}\,\varphi\left(\frac{r}{a}\,,\tilde{x}\right)\,dS_{\tilde{x}} = \int\limits_{0}^{+\infty} dt \int\limits_{|\tilde{x}|=at} \frac{1}{at}\,\varphi\left(t,\tilde{x}\right)\,dS_{\tilde{x}}$$

Итак, для выражения (3) окончательно получаем

$$\left\langle \frac{\delta(at - |x|)}{|x|}\,,\,\varphi(t,x)\right\rangle = \int\limits_{0}^{+\infty} dt \int\limits_{|x|=at} \frac{1}{at}\,\varphi\left(t,x\right)\,dS_{x} \tag{5}$$

Теперь найдем преобразование Фурье по x обобщенной функции

$$\frac{\delta(at - |x|)}{|x|}$$

По определению преобразования Фурье обобщенной функции для $\forall\varphi(t,x) \in S(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ получаем

$$\left\langle F_x\left[\frac{\delta(at - |x|)}{|x|}\right](t,\xi)\,,\,\varphi(t,\xi)\right\rangle = \left\langle \frac{\delta(at - |x|)}{|x|}\,,\,F_{\xi}\big[\varphi(t,\xi)\big](t,x)\right\rangle$$

Далее по формуле (5) находим

$$\left\langle \frac{\delta(at - |x|)}{|x|}\,,\,F_{\xi}\big[\varphi(t,\xi)\big](t,x)\right\rangle = \int\limits_{0}^{+\infty} dt \int\limits_{|x|=at} \frac{1}{at}\,F_{\xi}\big[\varphi(t,\xi)\big]\,(t,x)\,dS_{x} =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} dt\, \frac{1}{at} \int\limits_{|x|=at} dS_x \int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{\,i(x,\xi)}\, \varphi(t,\xi)\, d\xi \tag{6}$$

Поскольку при каждом $t > 0$ выполнено неравенство

$$\int\limits_{\{|x|=at\}\times\mathbb{R}^3} \left| e^{\,i(x,\xi)}\varphi(t,\xi)\right| \, dS_x\, d\xi = \int\limits_{\{|x|=at\}\times\mathbb{R}^3} |\,\varphi(t,\xi)| \, dS_x\, d\xi =$$

$$= 4\pi a^2 t^2 \int\limits_{\mathbb{R}^3} |\varphi(t,\xi)| \, d\xi < \infty \,,$$

то по теореме Фубини можно поменять местами внутренние интегралы в формуле (6)

$$\int\limits_0^{+\infty} dt\, \frac{1}{at} \int\limits_{|x|=at} dS_x \int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{\,i(x,\xi)}\varphi(t,\xi)\, d\xi = \int\limits_0^{+\infty} dt\, \frac{1}{at} \int\limits_{\mathbb{R}^3} d\xi\, \varphi(t,\xi) \int\limits_{|x|=at} e^{\,i(x,\xi)}\, dS_x \tag{7}$$

Вычислим отдельно интеграл

$$\int\limits_{|x|=at} e^{\,i(x,\xi)}\, dS_x \tag{8}$$

С этой целью параметризуем сферу, выбрав в качестве θ угол между направлениями вектора ξ и вектора x, в качестве угла ψ угол с произвольно выбранным фиксированным направлением в плоскости, перпендикулярной ξ. Тогда

$$(x,\xi) = at|\xi|\cos\theta, \quad dS_x = a^2t^2 \sin\theta\, d\psi\, d\theta$$

и интеграл (8) можно преобразовать

$$\int\limits_{|x|=at} e^{\,i(x,\xi)}\, dS_x = \int\limits_0^{2\pi} d\psi \int\limits_0^{\pi} e^{\,iat|\xi|\cos\theta} a^2t^2 \sin\theta\, d\theta = 2\pi a^2 t^2 \cdot \left. \frac{e^{\,iat|\xi|\cos\theta}}{(-iat|\xi|)}\right|_0^{\pi} =$$

$$= 2\pi i a t \cdot \frac{e^{-iat|\xi|} - e^{\,iat|\xi|}}{|\xi|} = 4\pi a t \cdot \frac{\sin\bigl(at|\xi|\bigr)}{|\xi|}$$

Подставим полученный результат в формулу (7)

$$\int\limits_0^{+\infty} dt\, \frac{1}{at} \int\limits_{\mathbb{R}^3} d\xi\, \varphi(t,\xi) \int\limits_{|x|=at} e^{\,i(x,\xi)}\, dS_x = \int\limits_0^{+\infty} dt \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{4\pi \sin\bigl(at|\xi|\bigr)}{|\xi|}\, \varphi(t,\xi)\, d\xi =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3} \frac{4\pi\theta(t) \sin\bigl(at|\xi|\bigr)}{|\xi|}\, \varphi(t,\xi)\, dt\, d\xi$$

Таким образом, мы выяснили, что для $\forall \varphi(t,x) \in S(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ выполнено равенство

$$\left\langle F_x\left[\frac{\delta(at-|x|)}{|x|}\right](t,\xi)\,,\, \varphi(t,\xi) \right\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3} \frac{4\pi\theta(t) \sin\bigl(at|\xi|\bigr)}{|\xi|}\, \varphi(t,\xi)\, dt\, d\xi$$

Значит,

$$F_x\left[\frac{\delta(at-|x|)}{|x|}\right](t,\xi) = \frac{4\pi\theta(t) \sin\bigl(at|\xi|\bigr)}{|\xi|}$$

Ответ. $$F_x\left[\frac{\delta(at-|x|)}{|x|}\right](t,\xi) = \frac{4\pi\theta(t) \sin\bigl(at|\xi|\bigr)}{|\xi|}\,.$$

Спасибо за внимание.
Не болейте!