Свертка обобщенных функций. Примеры решения задач

Самарова С.С.

ФОПФ, 3 курс, УМФ

Учебное пособие для дистанционных занятий

В этом пособии для дистанционного занятия мы рассмотрим примеры вычисления сверток обобщенных функций.

Напомним сначала определение и основные свойства сверток обобщенных функций, данные Вам на лекциях.

Определение 1 *Если для обобщенных функций* $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ *и* $g \in S'(\mathbb{R}^n)$, *любой основной функции* $\varphi(x) \in S(\mathbb{R}^n)$ *и любой 1-срезки* $\eta_1(x)$ *существует предел*

$$\lim_{R\to+\infty}\left\langle f(x)\,,\,\eta_1\left(\frac{x}{R}\right)\left\langle g(y)\,,\,\varphi(x+y)\right\rangle\right\rangle$$

значение которого не зависит от выбора 1-срезки $\eta_1(x)$, *то говорят, что у обобщенных функций* f *и* g *существует свертка* $f*g$, *являющаяся обобщенной функцией из* $S'(\mathbb{R}^n)$.

Действие свертки $f*g$ *на основные функции* $\varphi(x) \in S(\mathbb{R}^n)$ *определяется по формуле*

$$\langle f*g(x)\,,\,\varphi(x)\rangle = \lim_{R\to+\infty}\left\langle f(x)\,,\,\eta_1\left(\frac{x}{R}\right)\left\langle g(y)\,,\,\varphi(x+y)\right\rangle\right\rangle$$

Прежде, чем перечислить основные свойства свертки обобщенных функций, приведем определение финитной обобщенной функции.

Определение 2 *Пусть* $G \subset \mathbb{R}^n$ *– открытое множество. Говорят, что обобщенная функция* $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ *равна нулю на* G *и обозначают*

$$f|_G = 0$$

если для любой основной функции $\varphi(x) \in S(\mathbb{R}^n)$ *такой, что* $\operatorname{supp}\varphi \subset G$ *выполнено равенство*

$$\big\langle f(x), \varphi(x) \big\rangle = 0$$

Определение 3 *Пусть обобщенная функция* $f \in S'(\mathbb{R}^n)$*. Носителем обобщенной функции* f *называют множество*

$$\operatorname{supp} f = \mathbb{R}^n \setminus \{\cup\{G \subset \mathbb{R}^n \,:\, G - \text{открыто, и } f|_G = 0\}\}$$

Определение 4 *Обобщенную функцию* $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ *называют финитной, если ее носитель ограничен в* $\mathbb{R}^n$*.*

Перечислим основные свойства сверток обобщённых функций

1. Если одна из обобщенных функций f и g является финитной, то свертка $f * g$ существует.

2. Если одна из обобщенных функций f и g является финитной, то

$$f * g = g * f$$

3. Если существует свертка $f * g$, то для любого мультииндекса α

$$\partial^\alpha (f * g) = (\partial^\alpha f) * g = f * (\partial^\alpha g)$$

4. Для любой обобщённой функции $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ выполнены равенства

$$\delta(x) * f(x) = f(x) * \delta(x) = f$$

5. Пусть $\mathcal{E}$ – функция Грина линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами L. Тогда для любой обобщенной функции $f \in S'(\mathbb{R}^n)$, для которой существует свертка $f * \mathcal{E}$, обобщенная функция

$$u = f * \mathcal{E}$$

являeтся обобщенным решением уравнения

$$Lu = f$$

Перейдем к решению задач.

Задача 1 (задание 2.1) *Для любой обобщённой функции* $f \in S'(\mathbb{R}^n)$

1. *Доказать свойство 4 для сверток обобщенных функций*

$$\delta(x) * f(x) = f(x) * \delta(x) = f$$

2. *Для любого мультииндекса* α *доказать равенства*

$$(\partial^\alpha \delta(x)) * f(x) = f(x) * (\partial^\alpha \delta(x)) = \partial^\alpha f(x)$$

Решение.

1. Поскольку $\delta(x)$ – финитная обобщенная функция, то по свойству 1 свертка $\delta(x) * f(x)$ существует с любой $f(x)$ и по свойству 2 выполнено равенство

$$\delta(x) * f(x) = f(x) * \delta(x)$$

По определению свертки для любой 1-срезки $\eta_1(x)$ и любой основной функции $\varphi(x) \in S(\mathbb{R}^n)$ справедливы равенства

$$\left\langle \Big(\delta(x) * f(x)\Big)(x)\,,\, \varphi(x) \right\rangle = \lim_{R\to+\infty} \left\langle \delta(x)\,,\, \eta_1\left(\frac{x}{R}\right) \Big\langle f(y)\,,\, \varphi(x+y) \Big\rangle \right\rangle =$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \eta_1\left(0\right) \Big\langle f(y)\,,\, \varphi(y) \Big\rangle = \Big\langle f(y)\,,\, \varphi(y) \Big\rangle$$

Таким образом,

$$\delta(x) * f(x) = f(x) * \delta(x) = f$$

2. Поскольку свертки $\delta(x) * f(x)$ и $f(x) * \delta(x)$ существуют, то, используя результаты пункта 1 и свойство 3, для любого мультииндекса α получаем

$$\Big(\partial^\alpha \delta(x)\Big) * f(x) = \partial^\alpha \Big(\delta(x) * f(x)\Big) = \partial^\alpha f(x)$$

$$f(x) * \Big(\partial^\alpha \delta(x)\Big) = \partial^\alpha \Big(f(x) * \delta(x)\Big) = \partial^\alpha f(x)$$

Решение задачи завершено.

Докажем свойство 5 для сверток обобщенных функций.

Задача 2 *Пусть* $\mathcal{E}$ *– функция Грина линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами* L , *а* f *– любая обобщённая функция из пространства* $S'(\mathbb{R}^n)$

Доказать, что если существует свертка $f*\mathcal{E}$, *то обобщенная функция*

$$u = f * \mathcal{E}$$

является обобщенным решением уравнения

$$Lu = f$$

Решение. Используя свойства 3 и 4 для сверток обобщенных функций, получаем

$$Lu = L(f * \mathcal{E}) = f * (L\mathcal{E}) = f * \delta(x) = f$$

Доказано.

Задача 3 *В пространстве* $S'(\mathbb{R})$ *вычислить свертку*

$$\theta(x) * \Big(\theta(x)x^2\Big)$$

Решение. По определению свертки (если она существует) для любой основной функции $\varphi(x) \in S(\mathbb{R})$ и любой 1-срезки $\eta_1(x)$ должно быть выполнено равенство

$$\Big\langle \theta(x) * \Big(\theta(x)x^2\Big)\,,\, \varphi(x)\Big\rangle = \lim_{R\to+\infty}\Big\langle \theta(x)\,,\, \eta_1\Big(\frac{x}{R}\Big)\Big\langle \theta(y)y^2\,,\, \varphi(x+y)\Big\rangle\Big\rangle$$

Выясним существует ли предел в правой части равенства, и посмотрим, зависит ли этот предел от выбора 1-срезки $\eta_1(x)$.

$$\lim_{R\to+\infty}\Big\langle \theta(x)\,,\, \eta_1\Big(\frac{x}{R}\Big)\Big\langle \theta(y)y^2\,,\, \varphi(x+y)\Big\rangle\Big\rangle =$$

$$= \lim_{R\to+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\,\theta(x)\,\eta_1\Big(\frac{x}{R}\Big)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\theta(y)\,y^2\varphi(x+y)dy \tag{1}$$

Сделаем оценку функции

$$\Big|\theta(x)\,\eta_1\Big(\frac{x}{R}\Big)\theta(y)\,y^2\varphi(x+y)\Big|$$

В силу финитности и непрерывности 1-срезки существует $M>0$ такая, что выполнена оценка

$$\left|\eta_1\left(\frac{x}{R}\right)\right| \leqslant M$$

Кроме того, при $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned} 0 \leqslant x \leqslant x+y \quad &\Rightarrow \quad (x+y)^2 \geqslant x^2 \\ 0 \leqslant y \leqslant x+y \quad &\Rightarrow \quad (x+y)^2 \geqslant y^2 \end{aligned}$$

поэтому существует такая константа $A>0$

$$\bigl|\,\varphi(x+y)\bigr| \leqslant \frac{A}{\left(1+(x+y)^2\right)^3} \leqslant \frac{A}{\left(1+y^2\right)^2\left(1+x^2\right)}$$

Таким образом,

$$\left|\theta(x)\,\eta_1\left(\frac{x}{R}\right)\theta(y)\,y^2\varphi(x+y)\right| \leqslant \frac{M\,A\,y^2}{\left(1+y^2\right)^2\left(1+x^2\right)}$$

В силу того, что функция, стоящая в правой части неравенства, абсолютно интегрируема по обеим переменным и не зависит от R, к интегралу в формуле (1) можно применять и теорему Лебега об ограниченной сходимости, и теорему Фубини

$$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\,\theta(x)\,\eta_1\left(\frac{x}{R}\right) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \theta(y)\,y^2\varphi(x+y)dy =$$

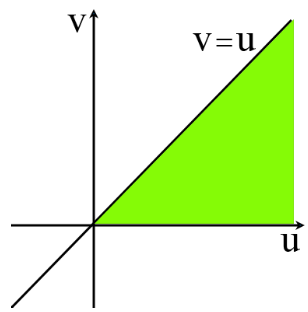
$$= \lim_{R\to+\infty} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \theta(x)\,\eta_1\left(\frac{x}{R}\right)\theta(y)\,y^2\varphi(x+y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \theta(x)\,\theta(y)\,y^2\varphi(x+y)\,dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{\substack{x>0\\ y>0}} y^2\varphi(x+y)\,dx\,dy$$

Сделав в интеграле замену переменных

$$\begin{cases} u = x+y, \\ v = y, \end{cases} \qquad |J| = 1$$

получим
$$\iint\limits_{\substack{x>0\\y>0}} y^2\varphi(x+y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\substack{u-v>0\\v>0}} v^2\varphi(u)\,du\,dv =$$



$$= \int\limits_0^{+\infty} du\,\varphi(u)\int\limits_0^u v^2dv = \int\limits_0^{+\infty}\varphi(u)\frac{u^3}{3}du = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(u)\,\theta(u)\frac{u^3}{3}du = \left\langle \theta(x)\,\frac{x^3}{3}\,,\,\varphi(x)\right\rangle$$

Таким образом,
$$\theta(x)*\Big(\theta(x)x^2\Big) = \theta(x)\,\frac{x^3}{3}$$

Ответ. $\quad \theta(x)*\Big(\theta(x)x^2\Big) = \theta(x)\,\dfrac{x^3}{3}$

Задача 4 *В пространстве* $S'(\mathbb{R}^3)$ *вычислить свертку*
$$\big(\theta(x-z)\delta(y+z)\big)*\Big(e^{-x}\,\theta(x)\delta(y+x)\delta(z+x)\Big)$$

Решение.

По определению свертки (если она существует) для любой основной функции $\varphi(x,y,z)\in S(\mathbb{R}^3)$ и любой 1-срезки $\eta_1(x,y,z)$ должно быть выполнено равенство

$$\left\langle \big(\theta(x-z)\,\delta(y+z)\big)*\Big(e^{-x}\,\theta(x)\,\delta(y+x)\,\delta(z+x)\Big),\varphi(x,y,z)\right\rangle =$$

$$=\lim_{R\to+\infty}\left\langle \theta(x-z)\delta(y+z)\,,\,\eta_1\left(\frac{x}{R},\frac{y}{R},\frac{z}{R}\right)\left\langle e^{-\xi}\,\theta(\xi)\,\delta(\eta+\xi)\,\delta(\zeta+\xi)\,,\,\varphi(x+\xi,y+\eta,z+\zeta)\right\rangle\right\rangle$$

Выясним существует ли предел в правой части равенства, и посмотрим, зависит ли этот предел от выбора 1-срезки $\eta_1(x,y,z)$.

Сначала при помощи замены переменных

$$\begin{cases} u = \xi, \\ v = \xi + \eta, \\ w = \xi + \zeta, \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det A = 1$$

преобразуем выражение

$$\Big\langle e^{-\xi}\,\theta(\xi)\,\delta(\eta+\xi)\,\delta(\zeta+\xi)\,,\,\varphi(x+\xi, y+\eta, z+\zeta)\Big\rangle =$$

$$= \Big\langle e^{-u}\,\theta(u)\,\delta(v)\,\delta(w)\,,\,\varphi(x+u, y+v-u, z+w-u)\Big\rangle =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-u}\,\theta(u)\varphi(x+u, y-u, z-u)\,du$$

Тогда

$$\lim_{R\to+\infty}\left\langle \theta(x-z)\,\delta(y+z)\,,\,\eta_1\left(\frac{x}{R},\frac{y}{R},\frac{z}{R}\right)\Big\langle e^{-\xi}\,\theta(\xi)\,\delta(\eta+\xi)\,\delta(\zeta+\xi)\,,\,\varphi(x+\xi, y+\eta, z+\zeta)\Big\rangle\right\rangle =$$

$$= \lim_{R\to+\infty}\left\langle \theta(x-z)\delta(y+z)\,,\,\eta_1\left(\frac{x}{R},\frac{y}{R},\frac{z}{R}\right)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-u}\,\theta(u)\,\varphi(x+u, y-u, z-u)\,du\right\rangle$$

Далее, используя определение замены в аргументе дельта-функции, получаем

$$\lim_{R\to+\infty}\left\langle \theta(x-z)\,\delta(y+z)\,,\,\eta_1\left(\frac{x}{R},\frac{y}{R},\frac{z}{R}\right)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-u}\,\theta(u)\,\varphi(x+u, y-u, z-u)\,du\right\rangle =$$

$$= \lim_{R\to+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^2} dx\,dz\,\theta(x-z)\,\eta_1\left(\frac{x}{R},\frac{-z}{R},\frac{z}{R}\right)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-u}\,\theta(u)\varphi(x+u, -z-u, z-u)\,du \tag{2}$$

Сделаем оценки, необходимые для применения теоремы Лебега об ограниченной сходимости и теоремы Фубини.

Для этого заметим, что для любого многочлена $P(\widehat{u},\widehat{v},\widehat{w})$ и любой основной функции $\varphi(\widehat{u},\widehat{v},\widehat{w})$ существует константа $A>0$ такая, что для всех $(\widehat{u},\widehat{v},\widehat{w})\in\mathbb{R}^3$ выполнено неравенство

$$|P(\widehat{u},\widehat{v},\widehat{w})\cdot\varphi(\widehat{u},\widehat{v},\widehat{w})|\leqslant A$$

Для выбора подходящего многочлена $P(\widehat{u},\widehat{v},\widehat{w})$ обозначим

$$\begin{cases}\widehat{u}=x+u,\\ \widehat{v}=-z-u,\\ \widehat{w}=z-u,\end{cases}\qquad\Longleftrightarrow\qquad\begin{cases}u=-\dfrac{\widehat{v}+\widehat{w}}{2},\\[2ex] x=\widehat{u}+\dfrac{\widehat{v}+\widehat{w}}{2},\\[2ex] z=\dfrac{\widehat{w}-\widehat{v}}{2},\end{cases}$$

и возьмем

$$P(\widehat{u},\widehat{v},\widehat{w})=\left(1+u^2\right)\left(1+x^2\right)\left(1+z^2\right)=$$

$$=\left(1+\left(-\frac{\widehat{v}+\widehat{w}}{2}\right)^2\right)\left(1+\left(\widehat{u}+\frac{\widehat{v}+\widehat{w}}{2}\right)^2\right)\left(1+\left(\frac{\widehat{w}-\widehat{v}}{2}\right)^2\right)$$

Тогда, с учетом ограниченности 1-срезки $\eta_1(x,y,z)$

$$\left|\eta_1\left(\frac{x}{R},\frac{-z}{R},\frac{z}{R}\right)\right|\leqslant M$$

справедлива оценка

$$\left|\theta(x-z)\eta_1\left(\frac{x}{R},\frac{-z}{R},\frac{z}{R}\right)e^{-u}\,\theta(u)\,\varphi(x+u,-z-u,z-u)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{M\cdot A}{(1+u^2)\,(1+x^2)\,(1+z^2)}$$

В силу того, что функция, стоящая в правой части неравенства, абсолютно интегрируема по обеим переменным и не зависит от R, к интегралу в формуле (2) можно применять и теорему Фубини, и теорему Лебега об ограниченной сходимости

$$\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^2} dx\,dz\,\theta(x-z)\,\eta_1\left(\frac{x}{R},\frac{-z}{R},\frac{z}{R}\right)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-u}\,\theta(u)\,\varphi(x+u,-z-u,z-u)\,du =$$

$$= \lim_{R\to+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^3} \theta(x-z)\,\eta_1\left(\frac{x}{R},\frac{-z}{R},\frac{z}{R}\right) e^{-u}\,\theta(u)\,\varphi(x+u,-z-u,z-u)\,du\,dx\,dz =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^3} \theta(x-z)e^{-u}\,\theta(u)\,\varphi(x+u,-z-u,z-u)\,du\,dx\,dz$$

Делая в интеграле замену

$$\begin{cases} \widehat{u} = x+u, \\ \widehat{v} = -z-u, \\ \widehat{w} = z-u, \end{cases} \qquad J(x,u,z) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \qquad |J(\widehat{u},\widehat{v},\widehat{w})| = \frac{1}{|J(x,y,z)|} = \frac{1}{2}$$

далее получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \theta(x-z)\,e^{-u}\,\theta(u)\,\varphi(x+u,-z-u,z-u)\,du\,dx\,dz =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^3} \theta(\widehat{u}+\widehat{v})\,e^{\frac{\widehat{v}+\widehat{w}}{2}}\,\theta(-\widehat{v}-\widehat{w})\,\varphi(\widehat{u},\widehat{v},\widehat{w})\,d\widehat{u}\,d\widehat{v}\,d\widehat{w} =$$

$$= \left\langle \frac{1}{2}\theta(x+y)\,e^{\frac{y+z}{2}}\,\theta(-y-z)\,,\ \varphi(x,y,z)\right\rangle$$

Таким образом,

$$\big(\theta(x-z)\,\delta(y+z)\big) * \Big(e^{-x}\,\theta(x)\,\delta(y+x)\,\delta(z+x)\Big) = \frac{1}{2}\,\theta(x+y)\,e^{\frac{y+z}{2}}\,\theta(-y-z)$$

Ответ.

$$\big(\theta(x-z)\,\delta(y+z)\big) * \Big(e^{-x}\,\theta(x)\,\delta(y+x)\,\delta(z+x)\Big) = \frac{1}{2}\,\theta(x+y)\,e^{\frac{y+z}{2}}\,\theta(-y-z)$$

В заключение решим задачу из экзаменационной контрольной по УМФ 2019/2020 учебного года.

Задача 5 *В пространстве* $S'(\mathbb{R}^2)$ *рассматривается дифференциальный оператор*

$$L = 3\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} + 2, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

а) *Доказать, что оператор* L *имеет в* $S'(\mathbb{R}^2)$ *единственную функцию Грина* $G(t,x) \in S'(\mathbb{R}^2)$.

б) *Вычислить функцию Грина* $G(t,x)$ *оператора* L.

в) *Найти решение* $u(t,x) \in S'(\mathbb{R}^2)$ *уравнения*

$$Lu(t,x) = \theta(t)\delta(x).$$

Решение.

а) Функция Грина $G(t,x)$ оператора L является решением уравнения

$$3\,\frac{\partial G(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial G(t,x)}{\partial x} + 2\,G(t,x) = \delta(t,x)$$

Взяв преобразование Фурье по всем переменным от обеих частей этого уравнения, получим

$$3(-i\tau)F\big[G\big] + (-i\xi)F\big[G\big] + 2\,F\big[G\big] = 1$$

$$(-3i\tau - i\xi + 2)F\big[G\big] = 1 \tag{3}$$

Поскольку при $(\tau,\xi) \in \mathbb{R}^2$ выполнено неравенство

$$\big|-3i\tau - i\xi + 2\big| \geqslant 2 \tag{4}$$

то уравнение (3) имеет единственное решение в пространстве $S'(\mathbb{R}^2)$. Действительно, поскольку для любой основной функции $\varphi \in S(\mathbb{R}^2)$

$$\Big\langle F\big[G\big]\,,\, \varphi(\tau,\xi)\Big\rangle = \Big\langle F\big[G\big]\,,\; (-3i\tau - i\xi + 2)\cdot\; \frac{\varphi(\tau,\xi)}{(-3i\tau - i\xi + 2)}\Big\rangle$$

а в силу неравенства (4) функция

$$\frac{\varphi(\tau,\xi)}{(-3i\tau - i\xi + 2)} \in S(\mathbb{R}^2)$$

то

$$\Big\langle F\big[G\big]\,,\,\varphi(\tau,\xi)\Big\rangle = \left\langle (-3i\tau - i\xi + 2)F\big[G\big]\,,\ \frac{\varphi(\tau,\xi)}{(-3i\tau - i\xi + 2)}\right\rangle =$$
$$= \left\langle 1\,,\ \frac{\varphi(\tau,\xi)}{(-3i\tau - i\xi + 2)}\right\rangle = \left\langle \frac{1}{-3i\tau - i\xi + 2}\,,\ \varphi(\tau,\xi)\right\rangle$$

Отсюда следует, что функция Грина для оператора L является единственной и ее преобразование Фурье равно

$$F\big[G\big] = \frac{1}{-3i\tau - i\xi + 2}$$

б) Вычислим функцию Грина $G(t,x)$ оператора L.

$$G(t,x) = F^{-1}\left[\frac{1}{-3i\tau - i\xi + 2}\right] = F_\tau^{-1}\left[F_\xi^{-1}\left[\frac{1}{-3i\tau - i\xi + 2}\right]\right]$$

Воспользовавшись формулой для обратного преобразования Фурье от рациональной дроби

$$F^{-1}\left[\frac{1}{x + b + ia}\right](y) = -i\,\mathrm{sign}\,a\ \theta(ay)\ e^{-ay + iby}, \quad a \neq 0,$$

(см. пособие для дистанционного обучения «Преобразование Фурье обобщенных функций из $S'(\mathbb{R}^m)$», задача 12), находим

$$F_\xi^{-1}\left[\frac{1}{-3i\tau - i\xi + 2}\right] = iF_\xi^{-1}\left[\frac{1}{\xi + 3\tau + 2i}\right] = \theta(x)\ e^{-2x + 3i\tau x}$$

Следовательно,

$$G(t,x) = F_\tau^{-1}\left[\theta(x)\ e^{-2x+3i\tau x}\right] = \theta(x)\ e^{-2x}F_\tau^{-1}\left[e^{3i\tau x}\right] = \theta(x)\ e^{-2x}\delta(t - 3x)$$

в) Поскольку свертки обобщенных функций удовлетворяют свойству 5, то решение $u(t,x) \in S'(\mathbb{R}^2)$ уравнения

$$Lu(t,x) = \theta(t)\delta(x)$$

можно вычислить по формуле

$$u(t,x) = \theta(t)\delta(x) * G(t,x),$$

если такая свертка существует.

По определению свертки (если она существует) для любой основной функции $\varphi(t,x) \in S(\mathbb{R}^2)$ и любой 1-срезки $\eta_1(t,x)$ должно быть выполнено равенство

$$\left\langle \Big(\theta(t)\delta(x)\Big) * \Big(\theta(x)\, e^{-2x}\delta(t-3x)\Big)\,,\, \varphi(t,x) \right\rangle =$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \left\langle \theta(t)\delta(x)\,,\, \eta_1\left(\frac{t}{R}\,,\,\frac{x}{R}\right) \left\langle \theta(y)\, e^{-2y}\delta(\tau-3y)\,,\, \varphi(t+\tau, x+y) \right\rangle \right\rangle$$

Выясним существует ли предел в правой части равенства, и посмотрим, зависит ли этот предел от выбора 1-срезки $\eta_1(x)$.

$$\lim_{R\to+\infty} \left\langle \theta(t)\delta(x)\,,\, \eta_1\left(\frac{t}{R}\,,\,\frac{x}{R}\right) \left\langle \theta(y)\, e^{-2y}\delta(\tau-3y)\,,\, \varphi(t+\tau, x+y) \right\rangle \right\rangle =$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} dt\, \eta_1\left(\frac{t}{R}\,,\, 0\right) \left\langle \theta(y)\, e^{-2y}\delta(\tau-3y)\,,\, \varphi(t+\tau, y) \right\rangle =$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} dt\, \eta_1\left(\frac{t}{R}\,,\, 0\right) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \theta(y)\, e^{-2y}\, \varphi(t+3y, y) dy =$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} dt \int\limits_0^{+\infty} \eta_1\left(\frac{t}{R}\,,\, 0\right)\, e^{-2y}\, \varphi(t+3y, y) dy \qquad (5)$$

Сделаем оценку модуля подынтегральной функции для всех $t \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$

$$\left| \eta_1\left(\frac{t}{R}\,,\, 0\right)\, e^{-2y}\, \varphi(t+3y, y) \right|$$

В силу финитности и непрерывности 1-срезки существует $M > 0$ такая, что выполнена оценка

$$\left| \eta_1\left(\frac{x}{R}\right) \right| \leqslant M$$

Кроме того, при $t \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$ выполнены неравенства

$$0 \leqslant t \leqslant t+3y \quad \Rightarrow \quad (t+3y)^2 \geqslant t^2,$$

поэтому существует такая константа $A > 0$

$$\left|\, \varphi(t+3y, y) \right| \leqslant \frac{A}{(1+(t+3y)^2)(1+y^2)} \leqslant \frac{A}{(1+t^2)(1+y^2)}$$

Таким образом,

$$\left| \eta_1\left(\frac{t}{R}\,,\, 0\right)\, e^{-2y}\, \varphi(t+3y, y) \right| \leqslant \frac{M \cdot A}{(1+t^2)(1+y^2)}$$

В силу того, что функция, стоящая в правой части неравенства, абсолютно интегрируема по обеим переменным на множестве $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$ и не зависит от R, к интегралу в формуле (5) можно применять и теорему Лебега об ограниченной сходимости, и теорему Фубини

$$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} dt \int\limits_0^{+\infty} \eta_1\left(\frac{t}{R}\,,\, 0\right)\, e^{-2y}\, \varphi(t+3y, y) dy =$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \iint\limits_{\substack{t>0\\ y>0}} \eta_1\left(\frac{t}{R}\,,\, 0\right)\, e^{-2y}\, \varphi(t+3y, y)\, dt\, dy =$$

$$= \iint\limits_{\substack{t>0\\ y>0}} e^{-2y}\,\varphi(t+3y,y)\,dt\,dy$$

Сделав в интеграле замену переменных

$$\begin{cases} u = t+3y, \\ v = y, \end{cases} \qquad\qquad |J| = 1$$

получим

$$\iint\limits_{\substack{t>0\\ y>0}} e^{-2y}\,\varphi(t+3y,y)\,dt\,dy = \iint\limits_{\substack{u-3v>0\\ v>0}} e^{-2v}\varphi(u,v)\,du\,dv =$$

$$= \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \theta(u-3v)\;\theta(v)\;e^{-2v}\varphi(u,v)\,du\,dv = \Big\langle \theta(u-3v)\;\theta(v)\;e^{-2v}\,,\,\varphi(u,v)\Big\rangle$$

Таким образом,

$$u(t,x) = \theta(t-3x)\;\theta(x)\;e^{-2x}$$

Ответ. $\quad G(t,x) = \theta(x)\;e^{-2x}\delta(t-3x); \qquad u(t,x) = \theta(t-3x)\;\theta(x)\;e^{-2x}$

На этом мы заканчиваем решение задач, связанных с вычислением сверток обобщенных функций. Примеры вычисления сверток с функциями Грина основных операторов будут рассмотрены при изучении следующих тем.

Спасибо за внимание.
Не болейте!