Классическое решение волнового уравнения

Самарова С.С.

ФОПФ, 3 курс, УМФ

Учебное пособие для дистанционных занятий

Данное пособие посвящено поиску классических решений задачи Коши для одномерного волнового уравнения (уравнения колебаний струны) и для однородного многомерного волнового уравнения с начальными условиями специального вида, позволяющими свести задачу к одномерному случаю.

В одномерном случае приводятся выводы формул Даламбера и Дюамеля для классического решения задачи Коши.

Постановка задачи Коши для волнового уравнения в классическом случае

Определение 1 *Дифференциальное уравнение*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = f(t,x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где a *– положительное число, называют волновым уравнением в* $\mathbb{R}^n$.

В случае, когда $f(t,x) \equiv 0$, волновое уравнение называют однородным, в противном случае – неоднородным.

Определение 2 *Задачей Коши для волнового уравнения в* $\mathbb{R}^n$ *называют задачу о поиске решения* $u(t,x) \in C^2(t \geqslant 0, x \in \mathbb{R}^n)$ *уравнения*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = f(t,x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

удовлетворяющего начальным условиям

$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

$$u_t(0,x) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

где $\quad f(t,x) \in C(t \geqslant 0, x \in \mathbb{R}^n), \quad u_0(x) \in C^2(\mathbb{R}^n), \quad u_1(x) \in C^2(\mathbb{R}^n).$

На лекциях будет доказана следующая теорема, которую мы будем использовать при решении задач.

Теорема. *Классическое решение задачи Коши для волнового уравнения единственно.*

Общее решение однородного одномерного волнового уравнения

В одномерном случае однородное волновое уравнение имеет вид

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \tag{1}$$

Найдем общее решение уравнения (1), т.е. решим задачу 1.1 из домашнего задания.

Запишем уравнение (1) в виде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u = 0\,. \tag{2}$$

Поскольку коэффициенты дифференциального оператора, стоящего в левой части уравнения (2), постоянны, то его можно разложить на множители

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - a\,\frac{\partial}{\partial x}\right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} + a\,\frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0$$

Подберем замену переменных

$$t = t(\xi,\eta), \quad x = x(\xi,\eta)$$

такую, чтобы

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial t} - a\,\frac{\partial}{\partial x}\,,$$
$$\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial t} + a\,\frac{\partial}{\partial x}\,.$$

Вспоминая формулу дифференцирования сложной функции $u = u\big(t(\xi,\eta), x(\xi,\eta)\big)$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \eta}$$

видим, что нам нужно, чтобы

$$\frac{\partial t}{\partial \xi} = 1\,; \quad \frac{\partial x}{\partial \xi} = -a\,; \quad \frac{\partial t}{\partial \eta} = 1\,; \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = a.$$

Этим условиям удовлетворяет линейная замена

$$\begin{cases} t = \xi + \eta, \\ x = -a\xi + a\eta, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \xi = \dfrac{1}{2}\left(t - \dfrac{x}{a}\right), \\ \eta = \dfrac{1}{2}\left(t + \dfrac{x}{a}\right) \end{cases}$$

и в переменных (ξ,η) уравнение (2) принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

Решим это уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = c(\eta) \quad \Leftrightarrow \quad u = \int c(\eta)\,d\eta + g(\xi)$$

где $c(\eta)$ и $g(\xi)$ – произвольные функции. В силу произвольности выбора функции $c(\eta)$ интеграл

$$\int c(\eta)\,d\eta$$

также является произвольной функцией, которую мы обозначим $f(\eta)$.

Следовательно, искомая функция в переменных (ξ,η) имеет вид

$$u = f(\eta) + g(\xi)\,,$$

а в исходных переменных (t,x)

$$u = f\left(\frac{1}{2}\left(t + \frac{x}{a}\right)\right) + g\left(\frac{1}{2}\left(t - \frac{x}{a}\right)\right)$$

Таким образом,
$$u(t,x) = F(x+at) + G(x-at)$$
где F и G – произвольные функции. Поскольку мы ищем решение
$$u(t,x) \in C^2(\mathbb{R}^2)$$
то от функций F и G нужно потребовать, чтобы они были из класса $C^2(\mathbb{R})$.

Формула Даламбера

Выведем формулу, позволяющую выписать решение задачи Коши для однородного одномерного волнового уравнения, т.е решим задачу 1.3 из домашнего задания.

Задача 1 *Пусть $a > 0$. Для любых функций $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$ и $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$ найти классическое решение $u(t,x) \in C^2(t \geqslant 0, x \in \mathbb{R})$ уравнения*
$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$
удовлетворяющее начальным условиям
$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R},$$
$$u_t(0,x) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Решение.

Поскольку любое решение однородного одномерного волнового уравнения имеет вид
$$u(t,x) = F(x+at) + G(x-at),$$
то из начальных условий получаем систему уравнений для нахождения функций F и G
$$\begin{cases} u(0,x) = F(x) + G(x) = u_0(x), \\ u_t(0,x) = F'(x) \cdot a + G'(x) \cdot (-a) = u_1(x) \end{cases}$$
Интегрируя второе уравнение, получаем
$$a\,F(x) - a\,G(x) = \int\limits_{x_0}^{x} u_1(\xi)\,d\xi + C,$$

где C – произвольная постоянная. Таким образом,

$$\begin{cases} F(x) + G(x) = u_0(x), \\ F(x) - G(x) = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int\limits_{x_0}^{x} u_1(\xi)\,d\xi + \dfrac{C}{a}, \end{cases}$$

откуда находим

$$\begin{cases} F(x) = \dfrac{1}{2}u_0(x) + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{x_0}^{x} u_1(\xi)\,d\xi + \dfrac{C}{2a}, \\ G(x) = \dfrac{1}{2}u_0(x) - \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{x_0}^{x} u_1(\xi)\,d\xi - \dfrac{C}{2a} \end{cases}$$

Следовательно,

$$u(t,x) = \frac{1}{2}u_0(x+at) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x+at} u_1(\xi)\,d\xi + \frac{C}{2a} + \frac{1}{2}u_0(x-at) - \frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x-at} u_1(\xi)\,d\xi - \frac{C}{2a}$$

Окончательно, получаем формулу, которая носит название **«Формула Даламбера»**

$$u(t,x) = \frac{u_0(x+at) + u_0(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} u_1(\xi)\,d\xi$$

Задача решена.

Замечание. Из формулы Даламбера вытекает единственность классического решения задачи Коши для одномерного волнового уравнения.

Формула Дюамеля

Выведем формулу, позволяющую выписать решение задачи Коши для неоднородного одномерного волнового уравнения с нулевыми начальными условиями, т.е. решим задачу 1.2 из домашнего задания.

Задача 2 *Пусть* $a > 0$. *Для любой функции* $f \in C^1(t \geqslant 0, x \in \mathbb{R})$ *найти классическое решение* $u(t,x) \in C^2(t \geqslant 0, x \in \mathbb{R})$ *задачи Коши*

$$\begin{aligned} &u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(t,x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},\\ &u(0,x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ &u_t(0,x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3}$$

Решение.

Для решения поставленной задачи Коши докажем сначала **«Принцип Дюамеля»**, который состоит в следующем.

Если для всех $\tau > 0$ существует решение $g(\tau, t, x) \in C^{0,2,2}(\tau > 0, t \geqslant \tau, \mathbb{R})$ задачи Коши

$$\begin{aligned} &g_{tt} - a^2 g_{xx} = 0, \quad t > \tau, \quad x \in \mathbb{R}\\ &g(\tau,\tau,x) = 0, \quad \tau > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ &g_t(\tau,\tau,x) = f(\tau,x), \quad \tau > 0, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{4}$$

то решение задачи Коши (3) можно представить в виде

$$u(t,x) = \int\limits_0^t g(\tau,t,x)\,d\tau$$

Для доказательства Принципа Дюамеля нужно проверить выполнение трёх условий:

1. $u(0,x) = \int\limits_0^0 g(\tau,0,x)\,d\tau = 0$

2. Поскольку

$$u_t(t,x) = g(t,t,x) + \int\limits_0^t g_t(\tau,t,x)\,d\tau = \int\limits_0^t g_t(\tau,t,x)\,d\tau\,,$$

то

$$u_t(0,x) = 0$$

3.

$$u_{tt}(t,x) = g_t(t,t,x) + \int\limits_0^t g_{tt}(\tau,t,x)\,d\tau = f(t,x) + a^2\int\limits_0^t g_{xx}(\tau,t,x)\,d\tau =$$

$$= f(t,x) + a^2\left(\int\limits_0^t g(\tau,t,x)\,d\tau\right)_{xx} = f(t,x) + a^2 u_{xx}(t,x)$$

то есть

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(t,x)$$

В силу единственности решения задачи Коши для одномерного волнового уравнения доказательство принципа Дюамеля завершено.

По формуле Даламбера решение задачи Коши (5) с начальными условиями

$$u_0 = 0,\ u_1 = f(\tau,x)\ ,$$

имеет вид

$$g(\tau,t,x) = \frac{1}{2a}\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,\xi)\,d\xi$$

Воспользовавшись принципом Дюамеля, находим решение задачи 2 по формуле

$$u(t,x) = \frac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,\xi)\,d\xi$$

Полученная формула носит название **«Формула Дюамеля»** и завершает решение задачи 2.

Решение задачи Коши для многомерного волнового уравнения с начальными данными и правой частью специального вида

В ряде случаев задачу Коши для многомерного волнового уравнения удается свести к задаче Коши для одномерного волнового уравнения. Это оказывается возможным, когда начальные данные Коши и правая часть волнового уравнения имеют специальный вид. Следует отметить, что таких случаев достаточно много, но мы ограничимся только теми примерами, которые содержатся в домашнем задании.

Сначала рассмотрим случай, когда в начальные данные вектор $x \in \mathbb{R}^n$ входит только в виде скалярного произведения (l, x), где l – некоторый фиксированный вектор из $\mathbb{R}^n$.

В качестве примера решим задачу 1.4 из домашнего задания.

Задача 3 *Пусть* $a > 0$ *и* $l \in \mathbb{R}^n$. *Для любой функции* $w \in C^1(\mathbb{R})$ *найти классическое решение* $u(t,x) \in C^2(t \geqslant 0, x \in \mathbb{R}^n)$ *задачи Коши*

$$\begin{aligned} &u_{tt} - a^2 \Delta u = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ &u(0,x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ &u_t(0,x) = w\Big((l,x)\Big), \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{5}$$

Решение.

Обозначим буквой ξ скалярное произведение

$$\xi = (l, x) = l_1 x_1 + \ldots + l_n x_n$$

и будем искать решение задачи (5) в виде

$$u = v(t, \xi) = v(t, l_1 x_1 + \ldots + l_n x_n)$$

Тогда

$$v_{x_i} = v_\xi \cdot \xi_{x_i} = v_\xi \cdot l_i\,; \qquad v_{x_i x_i} = v_{\xi\xi} \cdot l_i^2; \qquad i = 1, 2, 3..., n$$

Следовательно,

$$\Delta v = v_{\xi\xi}\,(l_1^2 + l_2^2 + ... + l_n^2) = v_{\xi\xi}\,|l|^2$$

и задача Коши (5) сводится к одномерной задаче

$$\begin{aligned} &v_{tt} - a^2 |l|^2 v_{\xi\xi} = 0, \quad t > 0, \quad \xi \in \mathbb{R} \\ &v(0,\xi) = 0, \quad v_t(0,\xi) = w(\xi), \quad x \in \mathbb{R}\,, \end{aligned} \tag{6}$$

решать которую мы уже умеем. По формуле Даламбера находим

$$v(t,\xi) = \frac{1}{2a|l|} \int\limits_{\xi - a|l|t}^{\xi + a|l|t} w(\zeta)\, d\zeta$$

Подставляя вместо ξ скалярное произведение (l,x), получаем ответ задачи

$$u(t,x) = \frac{1}{2a|l|} \int\limits_{(l,x)-a|l|t}^{(l,x)+a|l|t} w(\zeta)\, d\zeta$$

В силу теоремы единственности решения задачи Коши для волнового уравнения других решений у задачи 3 нет.

Решение задачи 3 завершено.

Теперь решим задачу 1.5 из домашнего задания. В этой задаче требуется найти решение трехмерного однородного волнового уравнения, удовлетворяющее начальным условиям, которые являются сферически симметричными функциями.

Задача 4 *Пусть* $a > 0$, *функции* $u_0 \in C^3[0,+\infty)$ *и* $u_1 \in C^2[0,+\infty)$, *причем* $u_0'(0) = 0$. *Найти классическое решение* $u(t,x) \in C^2(t \geqslant 0, x \in \mathbb{R}^3)$ *задачи Коши*

$$\begin{aligned} &u_{tt} - a^2 \Delta u = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^3, \\ &u(0,x) = u_0(|x|), \quad x \in \mathbb{R}^3, \\ &u_t(0,x) = u_1(|x|), \quad x \in \mathbb{R}^3, \end{aligned} \tag{7}$$

где $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

Решение.

Обозначим

$$r = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

и будем искать решение задачи (7) в виде

$$u = v(t,r) = v\left(t, \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\right)$$

Поскольку функция v не зависит от углов θ, φ, то, переходя в задаче (7) к сферическим координатам, получаем

$$\begin{aligned} & v_{tt} = a^2\left(v_{rr} + \frac{2}{r}v_r\right), \quad t > 0, \quad r > 0, \\ & v(0,r) = u_0(r), \quad r \geqslant 0, \\ & v_t(0,r) = u_1(r), \quad r \geqslant 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Рассмотрим функцию

$$w(t,r) = r \cdot v(t,r)$$

и перепишем задачу (8) для функции w.

Поскольку

$$v(t,r) = \frac{w(t,r)}{r}$$

то

$$v_t = \frac{w_t}{r}$$

$$v_{tt} = \frac{w_{tt}}{r}$$

$$v_r = \frac{w_r}{r} - \frac{w}{r^2}$$

$$v_{rr} = \frac{w_{rr}}{r} - \frac{w_r}{r^2} - \frac{w_r}{r^2} + \frac{2w}{r^3} = \frac{w_{rr}}{r} - \frac{2w_r}{r^2} + \frac{2w}{r^3}$$

и из уравнения задачи (8) получаем

$$\frac{w_{tt}}{r} = a^2\left(\frac{w_{rr}}{r} - \frac{2w_r}{r^2} + \frac{2w}{r^3} + \frac{2w_r}{r^2} - \frac{2w}{r^3}\right) = a^2\,\frac{w_{rr}}{r}$$

Таким образом, задача (8) принимает вид

$$\begin{aligned} & w_{tt} = a^2 w_{rr} \qquad t > 0, \quad r > 0, \\ & w(0,r) = r\,u_0(r), \quad r \geqslant 0, \\ & w_t(0,r) = r\,u_1(r), \quad r \geqslant 0, \\ & w(t,0) = 0, \quad t \geqslant 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Заметим, что задача (9) рассматривается на полуоси $r \geqslant 0$, имеет два начальных условия и одно краевое условие, и сразу применить для ее решения формулу Даламбера нельзя. Однако краевое условие

$$w(t,0) = 0, \quad t \geqslant 0,$$

позволяет свести решение задачи (9) к решению задачи Коши на всей оси, воспользовавшись «методом отражений».

С этой целью продолжим начальные условия задачи (9) на отрицательные значения переменной r нечетным образом

$$w(0,r) = \begin{Bmatrix} r\,u_0(r), & r \geqslant 0, \\ r\,u_0(-r), & r < 0 \end{Bmatrix} = r\,u_0(|r|), \quad r \in \mathbb{R},$$

$$w_t(0,r) = \begin{Bmatrix} r\,u_1(r), & r \geqslant 0, \\ r\,u_1(-r), & r < 0 \end{Bmatrix} = r\,u_1(|r|), \quad r \in \mathbb{R},$$

и рассмотрим задачу Коши на всей оси

$$w_{tt} = a^2 w_{rr} \qquad t > 0, \quad r \in \mathbb{R},$$

$$w(0,r) = r\,u_0(|r|), \quad r \in \mathbb{R},$$

$$w_t(0,r) = r\,u_1(|r|), \quad r \in \mathbb{R},$$

Найдем решение этой задачи по формуле Даламбера

$$w(t,r) = \frac{(r+at)\,u_0(|r+at|) + (r-at)\,u_0(|r-at|)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{r-at}^{r+at} \xi\,u_1(|\xi|)\,d\xi$$

Покажем, что найденное решение является нечетной по переменной r функцией при каждом значении $t > 0$

$$w(t,-r) = \frac{(-r+at)\,u_0(|-r+at|) + (-r-at)\,u_0(|-r-at|)}{2} +$$

$$+\frac{1}{2a}\int\limits_{-r-at}^{-r+at} \xi\,u_1(|\xi|)\,d\xi =$$

$$= -\frac{(r-at)\,u_0(|r-at|) + (r+at)\,u_0(|r+at|)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{r+at}^{r-at} (-\zeta)\,u_1(|-\zeta|)\,(-d\zeta) =$$

$$= -\frac{(r-at)\,u_0(|r-at|) + (r+at)\,u_0(|r+at|)}{2} - \frac{1}{2a}\int\limits_{r-at}^{r+at} \zeta\,u_1(|\zeta|)\,d\zeta = -w(t,r)$$

Тем самым краевое условие

$$w(t,0) = 0, \quad t \geqslant 0$$

выполняется автоматически.

Таким образом, решение исходной задачи имеет вид

$$u(t,x) = \frac{(|x|+at)\,u_0(||x|+at|) + (|x|-at)\,u_0(||x|-at|)}{2|x|} + \frac{1}{2a|x|}\int\limits_{|x|-at}^{|x|+at} \xi\,u_1(|\xi|)\,d\xi$$

Решение задачи 4 закончено.

Решим еще одну задачу Коши для неоднородного волнового уравнения в трехмерном пространстве.

Задача 5 *Решить задачу Коши*

$$\begin{aligned} &9u_{tt} = \Delta u + 18e^t\cos(x+2y-2z), \quad t>0, \quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\\ &u(0,x,y,z) = \sin\sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3, \\ &u_t(0,x,y,z) = 0, \quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3. \end{aligned} \tag{10}$$

Решение. Заметим, что решение $u(t,x,y,z)$ задачи Коши (10) представляет собой сумму решений двух более простых задач Коши

$$u(t,x,y,z) = v(t,x,y,z) + w(t,x,y,z),$$

где функция $v(t,x,y,z)$ является решением задачи

$$\begin{aligned} &9v_{tt} = \Delta v + 18e^t\cos(x+2y-2z),\\ &v(0,x,y,z) = 0, \\ &v_t(0,x,y,z) = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

а функция $w(t,x,y,z)$ является решением задачи

$$9w_{tt} = \Delta w,$$

$$w(0,x,y,z) = \sin\sqrt{x^2+y^2+z^2}, \tag{12}$$

$$w_t(0,x,y,z) = 0.$$

Решим каждую из этих задач.

Начнем с задачи (11). Заметим, что задачу (11) можно свести к одномерному случаю с помощью метода «линейной комбинации», примененного при решении задачи 3, а затем воспользоваться формулой Дюамеля. Однако это достаточно трудоемкий путь.

В данном случае существует более легкий способ решения. Он основан на том, что функция

$$\cos(x+2y-2z)$$

является собственной функцией оператора Лапласа. Действительно,

$$\Delta(\cos(x+2y-2z)) = -\cos(x+2y-2z) - 2^2\cos(x+2y-2z) -$$
$$-(-2)^2\cos(x+2y-2z) = -9\cos(x+2y-2z)$$

Поэтому будем искать решение задачи (11) в виде

$$v(t,x,y,z) = f(t)\cos(x+2y-2z) \tag{13}$$

Подставляя выражение (14) в задачу (11), получаем

$$9f''(t)\cos(x+2y-2z) = -9f(t)\cos(x+2y-2z) + 18e^t\cos(x+2y-2z),$$

$$f(0)\cos(x+2y-2z) = 0,$$

$$f'(0)\cos(x+2y-2z) = 0.$$

Таким образом, решение задачи (11) сводится к решению задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка

$$f''(t) = -f(t) + 2e^t,$$

$$f(0) = 0, \tag{14}$$

$$f'(0) = 0.$$

Общее решение однородного уравнения в задаче (14) имеет вид

$$f_{\text{одн}}(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t$$

Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$f_{\text{частн}}(t) = \alpha e^t$$

Подставляя $f_{\text{частн}}$ в уравнение задачи (14), находим α

$$\alpha e^t = -\alpha e^t + 2e^t$$

$$2\alpha = 2$$

$$\alpha = 1$$

Таким образом, общее решение уравнения в задаче (14) имеет вид

$$f(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t + e^t$$

Найдем коэффициенты C_1 и C_2 из начальных условий задачи (14)

$$\begin{cases} f(0) = C_2 + 1 = 0, \\ f'(0) = C_1 + 1 = 0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} C_2 = -1, \\ C_1 = -1. \end{cases}$$

Следовательно,

$$f(t) = -\sin t - \cos t + e^t$$

и решение задачи Коши (11) имеет вид

$$v(t, x, y, z) = (e^t - \sin t - \cos t) \cos(x + 2y - 2z)$$

Теперь решим задачу (12):

$$9w_{tt} = \Delta w,$$

$$w(0, x, y, z) = \sin \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$w_t(0, x, y, z) = 0.$$

Поскольку в этой задаче начальные данные зависят только от

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

то, как и при решении задачи 4, будем искать решение в виде

$$w(t,x,y,z) = \frac{g(t,r)}{r}$$

Как мы уже видели при решении задачи 4, функция $g(t,r)$ должна быть решением задачи на полуоси $r \geqslant 0$

$$9g_{tt} = g_{rr},$$

$$g(0,r) = r\,\sin r,$$

$$g_t(0,r) = 0,$$

$$g(t,0) = 0.$$

Продолжая начальные условия на всю ось нечетным образом, получаем задачу Коши на всей оси $r \in (-\infty, +\infty)$

$$9g_{tt} = g_{rr},$$

$$g(0,r) = r\,\sin|r|,$$

$$g_t(0,r) = 0.$$

Решение этой задачи легко находится с помощью формулы Даламбера

$$g(t,r) = \frac{(r+t/3)\,\sin|r+t/3| + (r-t/3)\,\sin|r-t/3|}{2}$$

и мы получаем решение задачи (11)

$$w(t,x,y,z) = \frac{(r+t/3)\,\sin|r+t/3| + (r-t/3)\,\sin|r-t/3|}{2r}$$

где $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Складывая функции $v(t,x,y,z)$ и $w(t,x,y,z)$, находим решение исходной задачи

$$u(t,x,y,z) = (e^t - \sin t - \cos t)\cos(x + 2y - 2z) +$$
$$+ \frac{(r + t/3)\,\sin|r + t/3| + (r - t/3)\,\sin|r - t/3|}{2r}$$
где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Решение задачи 5 завершено.

На этом мы заканчиваем рассмотрение классических решений волновых уравнений. Начиная со следующего занятия мы переходим к изучению обобщенных функций и обобщенных решений уравнений математической физики.

Спасибо за внимание.
Не болейте!