Объемный потенциал

Самарова С.С.

МФТИ, 3 курс, УМФ (классический курс)

Объемный потенциал для области D

Пусть D – ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^3$, а $\rho(x)$ – абсолютно интегрируемая функция, заданная на D.

Объемным потенциалом для области D с плотностью $\rho(x)$ называют функцию

$$V_3(x) = \int\limits_D \frac{\rho(y)}{|x-y|}\, dy\,, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Физический смысл объемного потенциала для области D

По своему смыслу функция $V_3(x)$ представляет собой ньютоновский (или кулоновский) потенциал, создаваемый массами (или зарядами), распределенными в области D с плотностью $\rho(x)$.

Свойства объемного потенциала

- Если $\rho(x) \in C(\overline{D})$, то потенциал $V_3(x) \in C^{(1)}(\mathbb{R}^3)$.
- Вне множества $\overline{D}$ выполнено уравнение Лапласа
$$\Delta V_3(x) = 0$$
- Внутри области D выполнено уравнение Пуассона
$$\Delta V_3(x) = -4\pi\rho(x)$$
- $$V_3(x) = \frac{1}{|x|}\int\limits_D \rho(y)\,dy + O\left(\frac{1}{|x|^2}\right) \quad \text{при} \quad |x| \to \infty$$

Задача 1

Вычислить объемный потенциал для шара $D = \{|x| < R\}$ с плотностью $\rho(x) = \sqrt{|x|}$.

Решение (1-й способ – прямое вычисление).

Вычислим объемный потенциал по определению

$$V_3(x) = \int\limits_{|y|<R} \frac{\sqrt{|y|}}{|x-y|}\,dy$$

Перейдем к сферическим координатам, выбирая в качестве угла θ угол между векторами x и y, а в качестве угла φ – полярный угол в плоскости, перпендикулярной вектору x.

Кроме того, воспользуемся теоремой косинусов для вычисления $|x - y|$

$$|x - y| = \sqrt{|x|^2 + |y|^2 - 2|x||y|\cos\theta}$$

Таким образом, получаем

$$V_3(x) = \int\limits_0^R dr \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \frac{\sqrt{r} \cdot r^2 \sin\theta}{\sqrt{|x|^2 + r^2 - 2|x| r \cos\theta}} \, d\theta =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^R dr \int\limits_0^{\pi} \frac{r^{\frac{5}{2}} \sin\theta}{\sqrt{|x|^2 + r^2 - 2|x| r \cos\theta}} \, d\theta =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^R \frac{r^{\frac{5}{2}} \sqrt{|x|^2 + r^2 - 2|x| r \cos\theta}}{|x| r} \Bigg|_0^{\pi} dr =$$

$$= \frac{2\pi}{|x|} \int\limits_0^R r^{\frac{3}{2}} \Big(\big(r + |x| \big) - \big| r - |x| \big| \Big) dr$$

Рассмотрим два случая.

1. При $|x| \geq R$ находим

$$V_3(x) = \frac{2\pi}{|x|} \int\limits_0^R r^{\frac{3}{2}} \Big(r + |x| + r - |x| \Big) dr = \frac{4\pi}{|x|} \int\limits_0^R r^{\frac{5}{2}} dr =$$

$$= \frac{4\pi}{|x|} \cdot \frac{2\, r^{\frac{7}{2}}}{7} \Bigg|_0^R = \frac{8\pi R^{\frac{7}{2}}}{7|x|}$$

2. При $|x| < R$ находим

$$V_3(x) = \frac{2\pi}{|x|} \int\limits_0^{|x|} r^{\frac{3}{2}} \Big(r + |x| + r - |x| \Big) dr +$$

$$+ \frac{2\pi}{|x|} \int\limits_{|x|}^{R} r^{\frac{3}{2}} \Big(r + |x| - r + |x| \Big) dr = \frac{4\pi}{|x|} \int\limits_0^{|x|} r^{\frac{5}{2}} dr + 4\pi \int\limits_{|x|}^{R} r^{\frac{3}{2}} dr =$$

$$= \frac{4\pi}{|x|} \cdot \frac{2\,r^{\frac{7}{2}}}{7} \Bigg|_0^{|x|} + 4\pi \cdot \frac{2\,r^{\frac{5}{2}}}{5} \Bigg|_{|x|}^{R} = \frac{8\pi|x|^{\frac{5}{2}}}{7} + \frac{8\pi R^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{8\pi|x|^{\frac{5}{2}}}{5} =$$

$$= \frac{8\pi R^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{16\pi|x|^{\frac{5}{2}}}{35}$$

Ответ.

$$V_3(x) = \begin{cases} \dfrac{8\pi R^{\frac{7}{2}}}{7|x|} & \text{при} \quad |x| \geq R, \\ \dfrac{8\pi R^{\frac{5}{2}}}{5} - \dfrac{16\pi|x|^{\frac{5}{2}}}{35} & \text{при} \quad |x| < R. \end{cases}$$

Решение (2-й способ – использование свойств объемного потенциала).

1. При $|x| < R$ решим уравнение

$$\Delta V_3(x) = -4\pi\sqrt{|x|}$$

В силу сферической симметрии будем искать частное решение в виде $V_ч = V_ч(r)$

Запишем уравнение в сферических координатах

$$V_ч'' + \frac{2}{r} V_ч' = -4\pi\sqrt{r}$$

и подберем частное решение в виде $V_{\text{ч}} = Ar^{\frac{5}{2}}$

$$A \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} r^{\frac{1}{2}} + 2A \cdot \frac{5}{2} r^{\frac{1}{2}} = -4\pi\, r^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{15A}{4} + 5A = -4\pi$$

$$A = -\frac{16\pi}{35}$$

Учитывая общий вид гармонических функций в шаре, получаем, что общее решение однородного уравнения имеет вид $V_3(x) = Y_0 = a_0$

Таким образом, при $|x| < R$ потенциал имеет вид

$$V_3(x) = -\frac{16\pi |x|^{\frac{5}{2}}}{35} + a_0$$

2. При $|x| > R$ решим уравнение

$$\Delta V_3(x) = 0$$

Учитывая общий вид гармонических функций вне шара, находим

$$V_3(x) = V_3(r) = Y_0 + \frac{1}{r}\widehat{Y}_0 = a_1 + \frac{a_2}{r}$$

Поскольку при $r \to \infty$

$$V_3(r) = \frac{1}{r} \int\limits_{|y|<R} \sqrt{|y|}\, dy + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

то $a_1 = 0$, и

$$a_2 = \int\limits_{|y|<R} \sqrt{|y|}\, dy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} d\theta \int\limits_0^{R} \sqrt{r} \cdot r^2 \sin\theta\, dr =$$

$$= 4\pi \int\limits_0^R r^{\frac{5}{2}}\, dr = 4\pi \cdot \frac{2r^{\frac{7}{2}}}{7}\Bigg|_0^R = \frac{8\pi R^{\frac{7}{2}}}{7}$$

Таким образом, при $|x| > R$ потенциал имеет вид

$$V_3(x) = \frac{8\pi R^{\frac{7}{2}}}{7|x|}$$

3. Найдем a_0 из свойства непрерывности потенциала при $|x| = R$

$$-\frac{16\pi R^{\frac{5}{2}}}{35} + a_0 = \frac{8\pi R^{\frac{7}{2}}}{7R}$$

$$a_0 = \frac{8\pi R^{\frac{5}{2}}}{7} + \frac{16\pi R^{\frac{5}{2}}}{35} = \frac{8\pi R^{\frac{5}{2}}}{5}$$

И мы получаем

Ответ.

$$V_3(x) = \begin{cases} \dfrac{8\pi R^{\frac{7}{2}}}{7|x|} & \text{при} \quad |x| \geq R, \\ \dfrac{8\pi R^{\frac{5}{2}}}{5} - \dfrac{16\pi |x|^{\frac{5}{2}}}{35} & \text{при} \quad |x| < R. \end{cases}$$

Спасибо за внимание.
Не болейте!