Потенциалы простого и двойного слоя

Самарова С.С.

МФТИ, 3 курс, УМФ (классический курс)

Потенциал простого слоя для поверхности S

Пусть S – ограниченная кусочно-гладкая поверхность в пространстве $\mathbb{R}^3$, а $\mu(x)$ – непрерывная функция, заданная на S.

Потенциалом простого слоя для поверхности S с плотностью $\mu(x)$ называют функцию

$$V_3^{(0)}(x) = \int\limits_S \frac{\mu(y)}{|x-y|}\, dS_y\,, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Физический смысл потенциала простого слоя для поверхности S

По своему смыслу функция $V_3^{(0)}(x)$ представляет собой ньютоновский (или кулоновский) потенциал, создаваемый массами (или зарядами), распределенными на поверхности S с плотностью $\mu(x)$.

Свойства потенциала простого слоя

- Потенциал простого слоя $V_3^{(0)}(x) \in C(\mathbb{R}^3)$.
- Вне поверхности S выполнено уравнение Лапласа

$$\Delta V_3^{(0)}(x) = 0$$

- $V_3^{(0)}(x) = \dfrac{1}{|x|} \displaystyle\int\limits_S \mu(y)\, dS_y + O\left(\dfrac{1}{|x|^2}\right) \quad \text{при} \quad |x| \to \infty$

Задача 2. (задание 18.16)

Вычислить потенциал простого слоя, распределенного с постоянной плотностью μ_0 на сфере $|x| = R$.

Решение (1-й способ – прямое вычисление).

Вычислим потенциал простого слоя по определению

$$V_3^{(0)}(x) = \int\limits_{|y|=R} \frac{\mu_0}{|x-y|}\, dS_y$$

Параметризуем сферу, выбирая в качестве угла θ угол между векторами x и y, а в качестве угла φ – полярный угол в плоскости, перпендикулярной вектору x.

Кроме того, воспользовавшись теоремой косинусов для вычисления $|x-y|$ и учитывая, что $|y| = R$, получаем

$$|x-y| = \sqrt{|x|^2 + R^2 - 2|x|R\cos\theta}$$

Таким образом,

$$V_3^{(0)}(x) = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \frac{\mu_0 \cdot R^2 \sin\theta}{\sqrt{|x|^2 + R^2 - 2|x|R\cos\theta}}\, d\theta =$$

$$= 2\pi\mu_0 R^2 \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin\theta}{\sqrt{|x|^2 + R^2 - 2|x|R\cos\theta}}\, d\theta =$$

$$= 2\pi\mu_0 R^2 \left. \frac{\sqrt{|x|^2 + R^2 - 2|x|R\cos\theta}}{|x|R} \right|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2\pi\mu_0 R}{|x|}\Big(\big(R + |x|\big) - \big|R - |x|\big|\Big)$$

Рассмотрим два случая.

1. При $|x| \geq R$ находим

$$V_3^{(0)}(x) = \frac{2\pi\mu_0 R}{|x|}\big(R + |x| + R - |x|\big) = \frac{4\pi\mu_0 R^2}{|x|}$$

2. При $|x| < R$ находим

$$V_3^{(0)}(x) = \frac{2\pi\mu_0 R}{|x|}\Big(R + |x| - R + |x|\Big) = 4\pi\mu_0 R$$

Ответ.

$$V_3^{(0)}(x) = \begin{cases} \dfrac{4\pi\mu_0 R^2}{|x|} & \text{при} \quad |x| \geq R, \\ 4\pi\mu_0 R & \text{при} \quad |x| < R. \end{cases}$$

Решение (2-й способ – использование свойств потенциала простого слоя).

1. При $|x| < R$ решим уравнение Лапласа

$$\Delta V_3^{(0)}(x) = 0$$

Учитывая общий вид гармонических функций в шаре, находим решение уравнения Лапласа в шаре:

$$V_3^{(0)}(x) = Y_0 = a_0$$

2. При $|x| > R$ также решим уравнение Лапласа

$$\Delta V_3^{(0)}(x) = 0$$

Учитывая общий вид гармонических функций вне шара, находим решение уравнения Лапласа вне шара:

$$V_3^{(0)}(x) = V_3^{(0)}(r) = \frac{1}{r}\widehat{Y}_0 = \frac{a_1}{r}$$

Поскольку при $r \to \infty$

$$V_3^{(0)}(r) = \frac{1}{r} \int\limits_{|y|=R} \mu_0 \, dS_y + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

то

$$a_1 = \int\limits_{|y|=R} \mu_0 \, dS_y = 4\pi R^2 \mu_0$$

Таким образом, при $|x| > R$ потенциал имеет вид

$$V_3^{(0)}(x) = \frac{4\pi R^2 \mu_0}{|x|}$$

3. Найдем a_0 из свойства непрерывности потенциала простого слоя при $|x| = R$

$$a_0 = 4\pi R\mu_0$$

откуда получаем тот же самый, как и в способе 1,

Ответ.

$$V_3^{(0)}(x) = \begin{cases} \dfrac{4\pi\mu_0 R^2}{|x|} & \text{при} \quad |x| \geq R, \\ 4\pi\mu_0 R & \text{при} \quad |x| < R. \end{cases}$$

Потенциал двойного слоя для поверхности S

Пусть S – ограниченная кусочно-гладкая ориентированная поверхность в пространстве $\mathbb{R}^3$, а $\nu(x)$ – непрерывная функция, заданная на S.

Потенциалом двойного слоя для поверхности S с плотностью $\nu(x)$ называют функцию

$$V_3^{(1)}(x) = \int\limits_S \nu(y)\, \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) dS_y \,, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Физический смысл потенциала двойного слоя для поверхности S

По своему смыслу функция $V_3^{(1)}(x)$ представляет собой кулоновский потенциал, создаваемый диполями, распределенными на поверхности S с плотностью $\nu(x)$, дипольный момент которых направлен вдоль нормали к поверхности S.

Свойства потенциала двойного слоя

- Вне поверхности S выполнено уравнение Лапласа
$$\Delta V_3^{(1)}(x) = 0$$
- $V_3^{(1)}(x) = O\left(\dfrac{1}{|x|^2}\right) \quad \text{при} \quad |x| \to \infty$
- Если поверхность S является дважды непрерывно дифференцируемой, то потенциал двойного слоя $V_3^{(1)}(x) \in C(S)$.

- Пусть D – ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с дважды непрерывно дифференцируемой границей S. Тогда $V_3^{(1)}(x)$ для поверхности S с плотностью $\nu(x)$ имеет разрыв при переходе через поверхность S, причем для $\forall x_0 \in S$ выполнены равенства

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D}} V_3^{(1)}(x) = -2\pi\nu(x_0) + V_3^{(1)}(x_0)$$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \notin \overline{D}}} V_3^{(1)}(x) = 2\pi\nu(x_0) + V_3^{(1)}(x_0)$$

Задача 2. (задание 18.20)

Вычислить потенциал двойного слоя, распределенного с постоянной плотностью ν_0 на сфере $|x| = R$.

Решение (1-й способ – прямое вычисление).

Вычислим потенциал двойного слоя по определению

$$V_3^{(1)}(x) = \int\limits_{|y|=R} \nu_0 \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) dS_y$$

При каждом фиксированном x введем для переменной y сферические координаты, выбирая в качестве угла θ угол между векторами x и y, а в качестве угла φ – полярный угол в плоскости, перпендикулярной вектору x.

Кроме того, воспользуемся теоремой косинусов для вычисления $|x-y|$

$$|x-y| = \sqrt{|x|^2 + |y|^2 - 2|x||y|\cos\theta} =$$
$$= \sqrt{|x|^2 + r^2 - 2|x| r\cos\theta}$$

Поскольку на сфере внешняя нормаль направлена по радиусу, то

$$\frac{\partial}{\partial n_y}\left(\frac{1}{|x-y|}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\sqrt{|x|^2+r^2-2|x|r\cos\theta}}\right)=$$

$$=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)(2r-2|x|\cos\theta)}{(|x|^2+r^2-2|x|r\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}=\frac{|x|\cos\theta-r}{(|x|^2+r^2-2|x|r\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial n_y}\left(\frac{1}{|x-y|}\right)\Bigg|_{|y|=R} = \frac{|x|\cos\theta - R}{\left(|x|^2 + R^2 - 2|x|R\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Таким образом,

$$V_3^{(1)}(x) = \int\limits_{|y|=R} \nu_0 \frac{\partial}{\partial n_y}\left(\frac{1}{|x-y|}\right) dS_y =$$

$$= \nu_0 \int\limits_{|y|=R} \frac{|x|\cos\theta - R}{\left(|x|^2 + R^2 - 2|x|R\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}} dS_y =$$

$$= \nu_0 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \frac{|x|\cos\theta - R}{(|x|^2 + R^2 - 2|x|R\cos\theta)^{\frac{3}{2}}} R^2 \sin\theta\, d\theta$$

1. Пусть $|x| \neq R$

В результате замены переменной

$$z = |x|^2 + R^2 - 2|x|R\cos\theta, \quad dz = 2|x|R\sin\theta d\theta,$$

получаем

$$|x|\cos\theta = \frac{|x|^2 + R^2 - z}{2R}, \quad |x|\cos\theta - R = \frac{|x|^2 - R^2 - z}{2R}$$

Тогда

$$\nu_0 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \frac{|x|\cos\theta - R}{\left(|x|^2 + R^2 - 2|x|R\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}} R^2 \sin\theta \, d\theta =$$

$$= 2\pi\nu_0 \int\limits_{(R-|x|)^2}^{(R+|x|)^2} \frac{|x|^2 - R^2 - z}{4|x| z^{\frac{3}{2}}} \, dz =$$

$$= \frac{\pi\nu_0}{2|x|} \left(|x|^2 - R^2\right) \left(-\frac{2}{\sqrt{z}}\right)\Bigg|_{(R-|x|)^2}^{(R+|x|)^2} - \frac{\pi\nu_0}{2|x|} \cdot 2\sqrt{z} \,\Bigg|_{(R-|x|)^2}^{(R+|x|)^2} =$$

$$= \frac{\pi \nu_0}{|x|} \left(|x|^2 - R^2 \right) \left(-\frac{1}{R + |x|} + \frac{1}{|R - |x||} \right) -$$

$$-\frac{\pi \nu_0}{|x|} \cdot \left(\left(R + |x| \right) - \left| R - |x| \right| \right)$$

Рассмотрим два случая.

1 а). При $|x| > R$ находим

$$V_3^{(1)}(x) = \frac{\pi\nu_0}{|x|}\left(|x|^2 - R^2\right)\left(-\frac{1}{R+|x|} + \frac{1}{|x|-R}\right) -$$

$$-\frac{\pi\nu_0}{|x|}\cdot\left(R+|x|+R-|x|\right) =$$

$$= \frac{\pi\nu_0}{|x|}\left(|x|^2 - R^2\right)\cdot\frac{R-|x|+R+|x|}{|x|^2-R^2} - \frac{2\pi R\nu_0}{|x|} = 0$$

1 б). При $|x| < R$ находим

$$V_3^{(1)}(x) = \frac{\pi\nu_0}{|x|}\left(|x|^2 - R^2\right)\left(-\frac{1}{R+|x|} + \frac{1}{R-|x|}\right) -$$

$$-\frac{\pi\nu_0}{|x|}\cdot\left(R + |x| - R + |x|\right) =$$

$$= \frac{\pi\nu_0}{|x|}\left(|x|^2 - R^2\right)\cdot\frac{-R+|x|+R+|x|}{R^2-|x|^2} - 2\pi\nu_0 =$$

$$= -2\pi\nu_0 - 2\pi\nu_0 = -4\pi\nu_0$$

2. Если же $|x| = R$, то

$$V_3^{(1)}(x) = \nu_0 \int\limits_{|y|=R} \frac{|x|\cos\theta - R}{\left(|x|^2 + R^2 - 2|x|R\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}}\, dS_y =$$

$$= \nu_0 \int\limits_{|y|=R} \frac{R\cos\theta - R}{\left(2R^2 - 2R^2\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}}\, dS_y =$$

$$= -\nu_0 \int\limits_{|y|=R} \frac{1}{2\sqrt{2}R^2\left(1 - \cos\theta\right)^{\frac{1}{2}}}\, dS_y =$$

$$= -\frac{\nu_0}{2\sqrt{2}R^2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \frac{R^2 \sin\theta}{(1-\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}\, d\theta = -\frac{\pi\nu_0}{\sqrt{2}}\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin\theta}{(1-\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}\, d\theta =$$

$$= -\frac{\pi\nu_0}{\sqrt{2}} \cdot 2\sqrt{1-\cos\theta}\,\Big|_0^{\pi} = -\frac{\pi\nu_0}{\sqrt{2}} \cdot 2(\sqrt{2}-0) = -2\pi\nu_0$$

Ответ. $$V_3^{(1)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad |x| > R, \\ -2\pi\nu_0 & \text{при} \quad |x| = R, \\ -4\pi\nu_0 & \text{при} \quad |x| < R. \end{cases}$$

Решение (2-й способ – использование свойств потенциала двойного слоя).

1. При $|x| < R$ решим уравнение Лапласа

$$\Delta V_3^{(1)}(x) = 0$$

Учитывая общий вид гармонических функций в шаре, находим решение уравнения Лапласа в шаре:

$$V_3^{(1)}(x) = Y_0 = a_0$$

2. При $|x| > R$ также решим уравнение Лапласа

$$\Delta V_3^{(1)}(x) = 0$$

Учитывая общий вид гармонических функций вне шара, находим решение уравнения Лапласа вне шара:

$$V_3^{(1)}(x) = V_3^{(1)}(r) = \frac{1}{r}\widehat{Y}_0 = \frac{a_1}{r}$$

Поскольку при $r \to \infty$

$$V_3^{(1)}(r) = O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

то $a_2 = 0$.

Таким образом, при $|x| > R$ потенциал имеет вид

$$V_3^{(1)}(x) = 0$$

3. Найдем значение потенциала двойного слоя в точках x_0 на сфере, используя свойство

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ |x| > R}} V_3^{(1)}(x) = 2\pi\nu(x_0) + V_3^{(1)}(x_0)$$

$$0 = 2\pi\nu_0 + V_3^{(1)}(x_0)$$

$$V_3^{(1)}(x_0) = -2\pi\nu_0$$

Таким образом, при $|x| = R$ потенциал имеет вид

$$V_3^{(1)}(x) = -2\pi\nu_0$$

4. Теперь найдем a_0, используя свойство

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D}} V_3^{(1)}(x) = -2\pi\nu(x_0) + V_3^{(1)}(x_0),$$

где $|x_0| = R$.

$$a_0 = -2\pi\nu_0 - 2\pi\nu_0 = -4\pi\nu_0$$

Следовательно, при $|x| < R$ потенциал имеет вид

$$V_3^{(1)}(x) = -4\pi\nu_0$$

откуда получаем тот же самый, как и в способе 1,

Ответ. $$V_3^{(1)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad |x| > R, \\ -2\pi\nu_0 & \text{при} \quad |x| = R, \\ -4\pi\nu_0 & \text{при} \quad |x| < R. \end{cases}$$

Спасибо за внимание.
Не болейте!