Сферические функции

Самарова С.С.

МФТИ, 3 курс, УМФ (классический курс)

Уравнения Лапласа и Пуассона в пространстве

Однородное эллиптическое уравнение

$$\Delta u = 0, \quad \text{где} \quad \Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}\,, \quad u = u(x, y, z),$$

называют уравнением Лапласа в пространстве, а его решения называют гармоническими функциями в $\mathbb{R}^3$.

Неоднородное уравнение

$$\Delta u = f(x, y, z)$$

называют уравнением Пуассона в пространстве.

Обозначим

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Мы будем рассматривать решения уравнений Лапласа и Пуассона $u(x, y, z) \in C^2(D)$ в следующих областях:

- в шаре $\quad D = \{r < R\};$
- вне шара $\quad D = \{r > R\};$
- в шаровом слое $\quad D = \{R_1 < r < R_2\}.$

Краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона в сферически симметричных областях в $\mathbb{R}^3$

Так же, как и для круговых областей в пространстве $\mathbb{R}^2$, для сферически симметричных областей в пространстве $\mathbb{R}^3$ для уравнения Лапласа и Пуассона мы будем решать краевые задачи Дирихле, Неймана и смешанного типа.

Постановка этих задач в $\mathbb{R}^3$ и условия разрешимости задачи Неймана полностью аналогичны случаю $\mathbb{R}^2$, который мы подробно рассмотрели на предыдущем дистанционном занятии, и сейчас мы на этих вопросах останавливаться не будем.

Оператор Лапласа в сферических координатах

Оператор Лапласа в сферических координатах имеет вид

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

Оператор Лапласа-Бельтрами

Оператор, действующий на функции по формуле

$$\Delta_{\theta,\varphi} = \frac{1}{\sin\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \cdot \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

носит название оператора Лапласа-Бельтрами и является «угловой частью» оператора Лапласа в сферических координатах. Этот оператор часто рассматривают как оператор, действующий на функции, определенные на единичной сфере.

Сферические функции

Ограниченные на единичной сфере 2π – периодические по φ собственные функции оператора Лапласа-Бельтрами называют сферическими функциями.

На лекциях доказывается, что сферические функции существуют лишь для собственных значений

$$\lambda_n = -n(n+1), \quad n = 0,\, 1,\, \ldots,$$

Сферическую функцию, соответствующую собственному значению λ_n , обозначают $Y_n(\theta, \varphi)$.

Полиномы Лежандра

Для того, чтобы выписать общий вид сферических функций $Y_n(\theta, \varphi)$, введем несколько определений.

Полиномами Лежандра называют многочлены вида

$$P_n(\xi) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n \left(\xi^2 - 1\right)^n}{d\xi^n}, \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

которые мы будем рассматривать при $\xi \in [-1, 1]$.

Присоединенные полиномы Лежандра

Для каждого $n = 0,\ 1,\ \dots$ по формуле

$$P_n^{(m)}(\xi) = \left(1 - \xi^2\right)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{d^m P_n(\xi)}{d\xi^m}, \quad 0 \le m \le n,$$

определяют присоединенные полиномы Лежандра, которые мы также будем рассматривать при $\xi \in [-1, 1]$.

При $m = 0$ присоединенный полином Лежандра совпадает с полиномом Лежандра.

Общий вид сферических функций

Сферические функции $Y_n(\theta, \varphi)$ выражаются через присоединенные полиномы Лежандра по формуле

$$Y_n(\theta, \varphi) = \sum_{k=0}^{n} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi)\, P_n^{(k)}(\cos\theta)$$

Для удобства приведем формулы для $Y_n(\theta, \varphi)$ при $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3.$

$$
\begin{aligned}
Y_0(\theta,\varphi) =& a_0,\\
Y_1(\theta,\varphi) =& a_1\cos\theta + (b_1\cos\varphi + c_1\sin\varphi)\sin\theta,\\
Y_2(\theta,\varphi) =& a_2\left(3\cos^2\theta - 1\right) + (b_2\cos\varphi + c_2\sin\varphi)\sin\theta\cos\theta +\\
& + (d_2\cos 2\varphi + e_2\sin 2\varphi)\sin^2\theta,\\
Y_3(\theta,\varphi) =& a_3\left(5\cos^3\theta - 3\cos\theta\right) +\\
& + (b_3\cos\varphi + c_3\sin\varphi)\sin\theta\left(5\cos^2\theta - 1\right) +\\
& + (d_3\cos 2\varphi + e_3\sin 2\varphi)\sin^2\theta\cos\theta +\\
& + (f_3\cos 3\varphi + g_3\sin 3\varphi)\sin^3\theta
\end{aligned}
$$

Общий вид гармонических функций в сферически симметричных областях в $\mathbb{R}^3$

- общий вид гармонических в шаре функций

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n\, Y_n(\theta,\varphi)$$

- общий вид гармонических вне шара функций

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}}\, Y_n(\theta,\varphi)$$

- общий вид гармонических в шаровом слое функций

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(r^n\,Y_n(\theta,\varphi)+\frac{1}{r^{n+1}}\,\widehat{Y}_n(\theta,\varphi)\right)$$

где $Y_n(\theta,\varphi)$ и $\widehat{Y}_n(\theta,\varphi)$ – сферические функции.

Примеры решения задач

Задача 1 [задание 16.27(5)]

Найти функцию, гармоническую внутри шара $\{r < R\}$ и такую, что

$$(u + u_r)\big|_{r=R} = \sin\theta(\sin\varphi + \cos\varphi\cos\theta + \sin\theta).$$

Решение.

1. Представим краевое условие в виде линейной комбинации сферических функций:

$$\sin\theta(\sin\varphi+\cos\varphi\cos\theta+\sin\theta)=$$

$$=\sin\theta\sin\varphi+\cos\varphi\sin\theta\cos\theta+(1-\cos^2\theta)=$$

$$=\sin\varphi\sin\theta+\cos\varphi\sin\theta\cos\theta-\frac{1}{3}(3\cos^2\theta-1)+\frac{2}{3}$$

Обозначим $Y_n^*(\theta,\varphi)$ сферические функции из преобразованного краевого условия:

$$Y_0^*(\theta,\varphi) = \frac{2}{3}$$
$$Y_1^*(\theta,\varphi) = \sin\varphi\sin\theta,$$
$$Y_2^*(\theta,\varphi) = -\frac{1}{3}\left(3\cos^2\theta - 1\right) + \cos\varphi\sin\theta\cos\theta.$$

Тогда краевое условие можно записать в виде:

$$(u+u_r)\big|_{r=R} = Y_0^*(\theta,\varphi) + Y_1^*(\theta,\varphi) + Y_2^*(\theta,\varphi)$$

2. Поскольку гармонические в шаре функции имеют вид

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n Y_n(\theta, \varphi),$$

то в данной задаче будем искать решение в виде

$$u(r, \theta, \varphi) = Y_0(\theta, \varphi) + r\, Y_1(\theta, \varphi) + r^2\, Y_2(\theta, \varphi)$$

3. Найдем $u_r(r, \theta, \varphi)$

$$u_r = Y_1(\theta, \varphi) + 2r\, Y_2(\theta, \varphi)$$

тогда

$$\begin{aligned}(u + u_r)\big|_{r=R} =& Y_0(\theta, \varphi) + R\, Y_1(\theta, \varphi) + R^2\, Y_2(\theta, \varphi) + \\ & + Y_1(\theta, \varphi) + 2R\, Y_2(\theta, \varphi) = \\ =& Y_0(\theta, \varphi) + (R + 1)\, Y_1(\theta, \varphi) + \\ & + \left(R^2 + 2R\right)\, Y_2(\theta, \varphi)\end{aligned}$$

Подставляя найденное выражение в краевое условие

$$Y_0(\theta,\varphi) + (R+1)\,Y_1(\theta,\varphi) + \left(R^2 + 2R\right)\,Y_2(\theta,\varphi) =$$

$$= Y_0^*(\theta,\varphi) + Y_1^*(\theta,\varphi) + Y_2^*(\theta,\varphi),$$

находим

$$Y_0(\theta,\varphi) = Y_0^*(\theta,\varphi) = \frac{2}{3},$$

$$Y_1(\theta,\varphi) = \frac{1}{R+1}\cdot Y_1^*(\theta,\varphi) = \frac{1}{R+1}\sin\theta\sin\varphi,$$

$$Y_2(\theta,\varphi) = \frac{1}{R^2+2R}\cdot Y_2^*(\theta,\varphi) =$$

$$= \frac{1}{R^2+2R}\left(-\frac{1}{3}\left(3\cos^2\theta - 1\right) + \cos\varphi\sin\theta\cos\theta\right)$$

Таким образом,

$$u(r,\theta,\varphi) = \frac{2}{3} + \frac{r}{R+1}\sin\theta\sin\varphi +$$

$$+\frac{r^2}{R^2+2R}\left(-\frac{1}{3}\left(3\cos^2\theta - 1\right) + \cos\varphi\sin\theta\cos\theta\right)$$

Ответ.

$$u(r,\theta,\varphi) = \frac{2}{3} + \frac{r}{R+1}\sin\theta\sin\varphi +$$
$$+\frac{r^2}{R^2+2R}\left(-\frac{1}{3}\left(3\cos^2\theta - 1\right) + \cos\varphi\sin\theta\cos\theta\right)$$

Задача 2 [задание 16.28(2)]

Найти функцию, гармоническую вне шара $\{r < 1\}$ и такую, что

$$u\big|_{r=1} = \cos^2\theta\,\sin\theta\,\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right).$$

Решение.

1. Представим краевое условие в виде линейной комбинации сферических функций:

$$\cos^2\theta\,\sin\theta\,\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right)=$$

$$=\frac{1}{5}\sin\theta\left(5\cos^2\theta-1\right)\left(\frac{1}{2}\sin\varphi+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi\right)+$$

$$+\frac{1}{5}\sin\theta\left(\frac{1}{2}\sin\varphi+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi\right)$$

Обозначим $Y_n^*(\theta,\varphi)$ сферические функции из преобразованного краевого условия:

$$Y_1^*(\theta,\varphi) = \frac{1}{5}\sin\theta\left(\frac{1}{2}\sin\varphi + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi\right),$$

$$Y_3^*(\theta,\varphi) = \frac{1}{5}\sin\theta\left(5\cos^2\theta - 1\right)\left(\frac{1}{2}\sin\varphi + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi\right).$$

Тогда краевое условие можно записать в виде:

$$u\big|_{r=1} = Y_1^*(\theta,\varphi) + Y_3^*(\theta,\varphi)$$

2. Поскольку гармонические вне шара функции имеют вид

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} Y_n(\theta,\varphi)$$

то в данной задаче будем искать решение в виде

$$u(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{r^2} Y_1(\theta,\varphi) + \frac{1}{r^4} Y_3(\theta,\varphi)$$

3. Подставляя $u(r,\theta,\varphi)$ в краевое условие

$$u\big|_{r=1} = Y_1(\theta,\varphi) + Y_3(\theta,\varphi) = Y_1^*(\theta,\varphi) + Y_3^*(\theta,\varphi),$$

находим

$$Y_1(\theta,\varphi) = Y_1^*(\theta,\varphi) = \frac{1}{5}\sin\theta\left(\frac{1}{2}\sin\varphi + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi\right),$$

$$Y_3(\theta,\varphi) = Y_3^*(\theta,\varphi) =$$

$$= \frac{1}{5}\sin\theta\left(5\cos^2\theta - 1\right)\left(\frac{1}{2}\sin\varphi + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi\right)$$

Таким образом,

$$u(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{5r^2}\,\sin\theta\left(\frac{1}{2}\sin\varphi + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi\right) +$$

$$+\frac{1}{5r^4}\,\sin\theta\left(5\cos^2\theta - 1\right)\left(\frac{1}{2}\sin\varphi + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi\right) =$$

$$= \frac{1}{5r^2}\,\sin\theta\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{5r^4}\,\sin\theta\left(5\cos^2\theta - 1\right)\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right)$$

Ответ.

$$u(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{5r^2}\,\sin\theta\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right)+$$

$$+\frac{1}{5r^4}\,\sin\theta\left(5\cos^2\theta-1\right)\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right)$$

Задача 3 [задание 16.31(1)]

Найти функцию, гармоническую внутри шарового слоя $\{1 < r < 2\}$ и такую, что

$$(3u + u_r)\big|_{r=1} = 5\sin^2\theta\,\sin 2\varphi, \qquad u\big|_{r=2} = -\cos\theta.$$

Решение.

1. Обозначим $Y_n^*(\theta, \varphi)$ входящие в краевые условия сферические функции :

$$Y_1^*(\theta, \varphi) = -\cos\theta,$$
$$Y_2^*(\theta, \varphi) = 5\sin^2\theta\ \sin 2\varphi.$$

Тогда краевые условия можно записать в виде:

$$(3u + u_r)\big|_{r=1} = Y_2^*(\theta, \varphi), \qquad u\big|_{r=2} = Y_1^*(\theta, \varphi).$$

2. Поскольку гармонические в шаровом слое функции имеют вид

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(r^n\, Y_n(\theta,\varphi) + \frac{1}{r^{n+1}}\, \widehat{Y}_n(\theta,\varphi) \right)$$

то в данной задаче будем искать решение в виде

$$u(r,\theta,\varphi) = r\, Y_1(\theta,\varphi) + \frac{1}{r^2}\, \widehat{Y}_1(\theta,\varphi) + r^2\, Y_2(\theta,\varphi) + \frac{1}{r^3}\, \widehat{Y}_2(\theta,\varphi)$$

3. Найдем $u_r(r, \theta, \varphi)$

$$u_r = Y_1(\theta, \varphi) - \frac{2}{r^3}\widehat{Y}_1(\theta, \varphi) + 2r\, Y_2(\theta, \varphi) - 3\frac{1}{r^4}\widehat{Y}_2(\theta, \varphi)$$

тогда

$$\begin{aligned}(3u + u_r)\big|_{r=1} =& 3\, Y_1(\theta, \varphi) + 3\widehat{Y}_1(\theta, \varphi) + 3Y_2(\theta, \varphi) + \\ &+ 3\widehat{Y}_2(\theta, \varphi) + Y_1(\theta, \varphi) - 2\widehat{Y}_1(\theta, \varphi) + \\ &+ 2Y_2(\theta, \varphi) - 3\widehat{Y}_2(\theta, \varphi) \\ =& 4Y_1(\theta, \varphi) + \widehat{Y}_1(\theta, \varphi) + 5Y_2(\theta, \varphi)\end{aligned}$$

$$u\big|_{r=2} = 2Y_1(\theta, \varphi) + \frac{1}{4}\widehat{Y}_1(\theta, \varphi) + 4Y_2(\theta, \varphi) + \frac{1}{8}\widehat{Y}_2(\theta, \varphi)$$

3. Подставляя найденные выражения в краевые условия, получим

$$\begin{cases} 4Y_1(\theta,\varphi) + \widehat{Y}_1(\theta,\varphi) + 5Y_2(\theta,\varphi) = Y_2^*(\theta,\varphi), \\ 2Y_1(\theta,\varphi) + \frac{1}{4}\,\widehat{Y}_1(\theta,\varphi) + 4Y_2(\theta,\varphi) + \frac{1}{8}\,\widehat{Y}_2(\theta,\varphi) = Y_1^*(\theta,\varphi). \end{cases}$$

Эта система эквивалентна двум следующим системам

$$\begin{cases} 4Y_1(\theta,\varphi) + \widehat{Y}_1(\theta,\varphi) = 0, \\ 2Y_1(\theta,\varphi) + \frac{1}{4}\widehat{Y}_1(\theta,\varphi) = Y_1^*(\theta,\varphi), \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} 5Y_2(\theta,\varphi) = Y_2^*(\theta,\varphi), \\ 4Y_2(\theta,\varphi) + \frac{1}{8}\widehat{Y}_2(\theta,\varphi) = 0. \end{cases}$$

Решим первую систему

$$\begin{cases} 4Y_1(\theta,\varphi) + \widehat{Y}_1(\theta,\varphi) = 0, \\ 2Y_1(\theta,\varphi) + \frac{1}{4}\widehat{Y}_1(\theta,\varphi) = Y_1^*(\theta,\varphi), \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4Y_1(\theta,\varphi) + \widehat{Y}_1(\theta,\varphi) = 0, \\ 8Y_1(\theta,\varphi) + \widehat{Y}_1(\theta,\varphi) = 4Y_1^*(\theta,\varphi), \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_1(\theta,\varphi) = Y_1^*(\theta,\varphi), \\ 4Y_1(\theta,\varphi) + \widehat{Y}_1(\theta,\varphi) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y_1(\theta,\varphi) = Y_1^*(\theta,\varphi), \\ \widehat{Y}_1(\theta,\varphi) = -4Y_1^*(\theta,\varphi). \end{cases}$$

Решим вторую систему

$$\begin{cases} 5Y_2(\theta, \varphi) = Y_2^*(\theta, \varphi), \\ 4Y_2(\theta, \varphi) + \frac{1}{8}\,\widehat{Y}_2(\theta, \varphi) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_2(\theta, \varphi) = \frac{1}{5}\,Y_2^*(\theta, \varphi), \\ \widehat{Y}_2(\theta, \varphi) = -\frac{32}{5}\,Y_2^*(\theta, \varphi). \end{cases}$$

Таким образом,

$$u(r,\theta,\varphi) = r\,Y_1^*(\theta,\varphi) - \frac{4}{r^2}\,Y_1^*(\theta,\varphi) + \frac{r^2}{5}\,Y_2^*(\theta,\varphi) -$$

$$-\frac{32}{5r^3}\,Y_2^*(\theta,\varphi) = \left(r - \frac{4}{r^2}\right)Y_1^*(\theta,\varphi) + \left(\frac{r^2}{5} - \frac{32}{5r^3}\right)Y_2^*(\theta,\varphi) =$$

$$= -\left(r - \frac{4}{r^2}\right)\cos\theta + 5\left(\frac{r^2}{5} - \frac{32}{5r^3}\right)\sin^2\theta\,\sin 2\varphi =$$

$$= \left(\frac{4}{r^2} - r\right)\cos\theta + \left(r^2 - \frac{32}{r^3}\right)\sin^2\theta\,\sin 2\varphi$$

Ответ.

$$u(r,\theta,\varphi) = \left(\frac{4}{r^2} - r\right)\cos\theta + \left(r^2 - \frac{32}{r^3}\right)\sin^2\theta\,\sin 2\varphi$$

Спасибо за внимание.
Не болейте!