Функция Грина оператора Штурма-Лиувилля

Самарова С.С.

МФТИ, 3 курс, УМФ (классический курс)

Оператор Штурма-Лиувилля

Оператором Штурма-Лиувилля называют линейный дифференциальный оператор

$$Ly(x) = -\left(p(x)y'(x)\right)' + q(x)y(x), \quad x \in (a, b),$$

где

- $p(x) \in C^1[a, b]$ и $p(x) > 0$ для $\forall x \in [a, b]$;
- $q(x) \in C[a, b]$ и $q(x) \geq 0$ для $\forall x \in [a, b]$;

Оператор Штурма-Лиувилля

Оператором Штурма-Лиувилля называют линейный дифференциальный оператор

$$Ly(x) = -\left(p(x)y'(x)\right)' + q(x)y(x), \quad x \in (a, b),$$

где

- $p(x) \in C^1[a, b]$ и $p(x) > 0$ для $\forall x \in [a, b]$;
- $q(x) \in C[a, b]$ и $q(x) \geq 0$ для $\forall x \in [a, b]$;

- $y(x) \in C^2(a,b) \cup C^1[a,b]$ и $y(x)$ удовлетворяет однородным краевым условиям

$$\begin{cases} \alpha_1 y(a) - \alpha_2 y'(a) = 0, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \end{cases}$$

а числа α_1, α_2, β_1, β_2 неотрицательны и

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0, \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0.$$

Задача Штурма-Лиувилля

Задачу поиска собственных значений и собственных функций для оператора Штурма-Лиувилля

$$Ly(x) = \lambda y(x), \quad x \in (a, b),$$

$$\begin{cases} \alpha_1 y(a) - \alpha_2 y'(a) = 0, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \end{cases}$$

называют задачей Штурма-Лиувилля.

Решение уравнения $Ly(x) = f(x)$

Если $\lambda = 0$ не является собственным значением оператора Штурма-Лиувилля L, то решение уравнения

$$Ly(x) = f(x)$$

можно представить в виде

$$y(x) = \int_a^b G(x,t)f(t)dt$$

Функцию $G(x,t)$ называют функцией Грина оператора Штурма-Лиувилля.

Построение функции Грина оператора Штурма-Лиувилля

Пусть $\lambda = 0$ не является собственным значением оператора Штурма-Лиувилля L.

Построим функцию Грина по следующей схеме:

- Найдем $y_1(x)$ - ненулевое решение однородного уравнения

$$Ly(x) = 0,$$

удовлетворяющее только краевому условию на левом конце отрезка $[a, b]$:

$$\alpha_1 y(a) - \alpha_2 y'(a) = 0$$

- Найдем $y_2(x)$ - ненулевое решение однородного уравнения
$$Ly(x) = 0,$$
удовлетворяющее только краевому условию на правом конце отрезка $[a, b]$:
$$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0$$

- Вычислим $W(x)$ - определитель Вронского для $y_1(x)$ и $y_2(x)$

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

и найдем

$$p(x)W(x)$$

- Выпишем функцию Грина для оператора Штурма-Лиувилля

$$G(x,t) = -\frac{1}{p(x)W(x)} \begin{cases} y_1(x)\cdot y_2(t), & a \le x \le t \le b, \\ y_2(x)\cdot y_1(t), & a \le t \le x \le b. \end{cases}$$

Замечание 1

В силу того, что $\lambda = 0$ не является собственным значением оператора L, определитель Вронского

$$W(x) \neq 0 \quad \text{для } \forall x \in [a, b]$$

Доказательство (от противного)

Пусть $\exists\, x_0 \in [a, b]$ такое, что $W(x_0) = 0$. Тогда

$$W(x) = 0 \quad \text{для} \quad \forall x \in [a, b],$$

поскольку $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – решения уравнения $Ly = 0$.

В частности, $W(b) = 0$. Следовательно, существует число k такое, что

$$\begin{cases} y_1(b) = k\, y_2(b), \\ y_1'(b) = k\, y_2'(b). \end{cases}$$

Но тогда решение $y_1(x)$ будет удовлетворять также и краевому условию в точке b, то есть будет собственной функцией оператора L с $\lambda = 0$.
Противоречие.

Замечание 2

$$p(x)W(x) = \mathrm{const} \quad \text{для } \forall x \in [a, b]$$

Доказательство

Запишем уравнение

$$Ly(x) = -\left(p(x)y'(x)\right)' + q(x)y(x) = 0$$

в виде

$$-p(x)y''(x) - p'(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$$

По формуле Лиувилля

$$W(x) = Ce^{-\int \frac{p'(x)}{p(x)}dx} = C_1 e^{-\ln p(x)} = \frac{C_1}{p(x)}$$

Таким образом,

$$p(x)W(x) = C_1$$

Доказательство завершено.

При решении задач проводить отдельную проверку того, что $\lambda = 0$ не является собственным значением оператора L, не нужно.

Замечание 3

Если $\lambda = 0$ является собственным значением оператора L, то функцию Грина построить не удастся.

Доказательство

Пусть $z(x)$ – собственная функция оператора L с собственным значением $\lambda = 0$.

Тогда $Lz(x) = 0$ и определитель Вронского для функций $z(x)$ и $y_1(x)$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} z(x) & y_1(x) \\ z'(x) & y_1'(x) \end{vmatrix}$$

обращается в нуль при $x = a$.

Значит, существует число k_1 такое, что $y_1(x) = k_1 z(x)$ для $\forall x \in [a, b]$.

Точно так же доказываем, что существует число k_2 такое, что $y_2(x) = k_2 z(x)$ для $\forall x \in [a, b]$.

Значит, решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно зависимы и их определитель Вронского $W(x) = 0$.

Таким образом, функцию Грина построить не удастся.

Доказательство завершено.

Сведение задачи Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению

Если $\lambda = 0$ не является собственным значением оператора Штурма-Лиувилля L, то решение уравнения

$$Ly(x) = \lambda y(x)$$

эквивалентно решению интегрального уравнения

$$y(x) = \lambda \int\limits_a^b G(x,t) y(t) dt$$

Примеры решения задач

Задача 1 [задание 15.6(3)]

Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля

$$Ly = -\sin^2 x \cdot y'' - \sin 2x \cdot y',$$

$$\begin{cases} |y(0)| < \infty\,, \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0\,, \end{cases}$$

на интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение.

1. Решим уравнение $Ly = 0$:

$$-\sin^2 x \cdot y'' - \sin 2x \cdot y' = 0$$

$$-(\sin^2 x \cdot y')' = 0$$

$$\sin^2 x \cdot y' = C_1$$

$$y' = \frac{C_1}{\sin^2 x}$$

$$y = C_1 \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -C_1 \operatorname{ctg} x + C_2$$

2. Найдем $y_1(x)$:

$$|y_1(0)| < \infty \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1(x) \equiv 1$$

3. Найдем $y_2(x)$:

$$y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) + y_2'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 + C_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -C_2$$

$$y_2(x) = \operatorname{ctg} x + 1$$

4. Найдем определитель Вронского:

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & \operatorname{ctg} x + 1 \\ 0 & -\dfrac{1}{\sin^2 x} \end{vmatrix} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Тогда

$$p(x)W(x) = \sin^2 x \cdot \frac{(-1)}{\sin^2 x} = -1$$

5. Выпишем функцию Грина:

$$G(x,t) = -\frac{1}{(-1)}\begin{cases}\operatorname{ctg} t + 1, & 0 \le x \le t \le \dfrac{\pi}{2},\\ \operatorname{ctg} x + 1, & 0 \le t \le x \le \dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Ответ.

$$G(x,t) = \begin{cases}\operatorname{ctg} t + 1, & 0 \le x \le t \le \dfrac{\pi}{2},\\ \operatorname{ctg} x + 1, & 0 \le t \le x \le \dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

При решении задач часто полезно следующее

Замечание 4

Для любого оператора вида

$$\tilde{L}y = A(x)y''(x) + B(x)y'(x), \quad A(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a, b]\,,$$

который не является оператором Штурма-Лиувилля, можно найти такую функцию $\mu(x)$, что оператор

$$\mu(x)\tilde{L}y = \mu(x)A(x)y''(x) + \mu(x)B(x)y'(x)$$

будет оператором Штурма-Лиувилля.

Доказательство

Оператор $\mu(x)\tilde{L}$ будет оператором Штурма-Лиувилля

$$\mu(x)\tilde{L} = -p(x)y''(x) - p'(x)y'(x)$$

тогда, и только тогда, когда существует функция $p(x) > 0$, для которой

$$\begin{cases} \mu(x)A(x) = -p(x)\,, \\ \mu(x)B(x) = -p'(x)\,. \end{cases}$$

Разделим второе уравнение системы на первое:

$$\frac{p'(x)}{p(x)} = \frac{B(x)}{A(x)}$$

Интегрируя, получим

$$\int \frac{p'(x)}{p(x)}\,dx = \int \frac{B(x)}{A(x)}\,dx$$

$$\ln p(x) = \int \frac{B(x)}{A(x)}\,dx$$

Таким образом,

$$p(x) = e^{\int \frac{B(x)}{A(x)}dx}; \qquad \mu(x) = -\frac{p(x)}{A(x)} = -\frac{e^{\int \frac{B(x)}{A(x)}dx}}{A(x)}$$

Доказательство замечания 4 завершено.

Задача 2 [задание Т1(б)]

Свести к интегральному уравнению задачу

$$-(x+1)^2\,y'' - 3\,(x+1)\,y' = \lambda y + f(x), \quad 0 < x < 1,$$

$$\begin{cases} y'(0) = \alpha\, y(0)\,, \\ y'(1) = 0\,, \end{cases}$$

где $\alpha \geq 0\,,$ f – непрерывная на отрезке $[0,1]$ функция.

Решение.

1. Сначала преобразуем уравнение к виду, когда в левой части будет стоять оператор Штурма-Лиувилля.

В данном случае легко увидеть, что для этого нужно умножить обе части уравнения на $(x+1)$:

$$-(x+1)^3 y'' - 3(x+1)^2 y' = (x+1)\big(\lambda y + f(x)\big)$$

$$-((x+1)^3 y')' = (x+1)\big(\lambda y + f(x)\big)$$

В менее очевидных случаях для определения множителя $\mu(x)$ нужно воспользоваться результатом замечания 4.

2. Решим уравнение

$$-((x+1)^3 y')' = 0$$

$$(x+1)^3 y' = C_1$$

$$y' = \frac{C_1}{(x+1)^3}$$

$$y = C_1 \int \frac{dx}{(x+1)^3} = -\frac{C_1}{2(x+1)^2} + C_2$$

3. Найдем $y_1(x)$:

$$y_1'(0) = \alpha\, y_1(0) \quad \Rightarrow \quad C_1 = \alpha \left(-\frac{C_1}{2} + C_2 \right)$$

$$\Rightarrow \quad C_1 \left(1 + \frac{\alpha}{2} \right) = \alpha\, C_2 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{2\alpha}{2+\alpha} C_2$$

$$y_1(x) = -\frac{\alpha}{(2+\alpha)(x+1)^2} + 1$$

4. Найдем $y_2(x)$:

$$y_2'(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{C_1}{8} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_2(x) \equiv 1$$

5. Найдем определитель Вронского:

$$W(x) = \begin{vmatrix} -\dfrac{\alpha}{(2+\alpha)(x+1)^2} + 1 & 1 \\ \dfrac{2\alpha}{(2+\alpha)(x+1)^3} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{2\alpha}{(2+\alpha)(x+1)^3}$$

При $\alpha = 0$ определитель Вронского обращается в нуль, и при этом значении α согласно замечанию 3 функцию Грина построить не удастся.

Поэтому рассмотрим два случая.

1 случай. Пусть $\alpha \neq 0$.

Тогда

$$p(x)W(x) = (x+1)^3 \cdot \frac{(-2\alpha)}{(2+\alpha)(x+1)^3} = -\frac{2\alpha}{(2+\alpha)}$$

и можно выписать функцию Грина:

$$G(x,t) = \frac{2+\alpha}{2\alpha}\begin{cases} -\dfrac{\alpha}{(2+\alpha)(x+1)^2} + 1, & 0 \le x \le t \le 1\,, \\ -\dfrac{\alpha}{(2+\alpha)(t+1)^2} + 1, & 0 \le t \le x \le 1\,. \end{cases}$$

Интегральное уравнение в этом случае имеет вид

$$y(x) = \int\limits_0^1 G(x,t)(t+1)\Big(\lambda\, y(t) + f(t)\Big)dt$$

2 случай. Пусть $\alpha = 0$.

1. В этом случае преобразуем уравнение

$$-(x+1)^3 y'' - 3(x+1)^2 y' = (x+1)\big(\lambda y + f(x)\big)$$

так, чтобы число $\lambda = 0$ уже не было собственным

значением оператора, стоящего в левой части.

С этой целью добавим в обе части уравнения слагаемое $q(x)y$. Вид этого слагаемого будем выбирать так, чтобы получившее однородное уравнение можно было решить явно.

В нашем случае возьмем $q(x) = k(x+1)$, где число k подберем позже. Тогда

$$-(x+1)^3 y'' - 3(x+1)^2 y' + k(x+1)y = (x+1)\Big(\lambda y + ky + f(x)\Big)$$

2. Решим уравнение

$$-(x+1)^3 y'' - 3(x+1)^2 y' + k(x+1)y = 0$$

Сокращая уравнение на $(x+1)$, видим, что получилось уравнение Эйлера

$$-(x+1)^2 y'' - 3(x+1)y' + ky = 0$$

Выпишем характеристическое уравнение

$$-\rho(\rho-1) - 3\rho + k = 0$$

$$\rho^2 + 2\rho - k = 0$$

$$\rho_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+k}$$

Возьмем $k = 3$, чтобы получились хорошие корни

$$\rho_1 = -3, \quad \rho_2 = 1.$$

Тогда решение уравнения Эйлера примет вид

$$y(x) = \frac{C_1}{(x+1)^3} + C_2(x+1)$$

3. Найдем $y_1(x)$:

$$y_1'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad -3C_1 + C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 3C_1$$

$$y_1(x) = \frac{1}{(x+1)^3} + 3(x+1)$$

4. Найдем $y_2(x)$:

$$y_2'(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{3C_1}{16} + C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{3C_1}{16}$$

$$y_2(x) = \frac{16}{(x+1)^3} + 3(x+1)$$

5. Найдем определитель Вронского:

$$W(x) = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{(x+1)^3} + 3(x+1) & \dfrac{16}{(x+1)^3} + 3(x+1) \\ -\dfrac{3}{(x+1)^4} + 3 & -\dfrac{48}{(x+1)^4} + 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{180}{(x+1)^3}$$

Следовательно,

$$p(x)W(x) = (x+1)^3 \cdot \frac{(-180)}{(x+1)^3} = -180$$

и можно выписать функцию Грина:

$$G(x,t)=\frac{1}{180}\begin{cases}\left(\dfrac{1}{(x+1)^3}+3(x+1)\right)\left(\dfrac{16}{(t+1)^3}+3(t+1)\right), \\ \qquad\qquad \text{при } 0\le x\le t\le 1, \\ \left(\dfrac{1}{(t+1)^3}+3(t+1)\right)\left(\dfrac{16}{(x+1)^3}+3(x+1)\right), \\ \qquad\qquad \text{при } 0\le t\le x\le 1. \end{cases}$$

Интегральное уравнение в этом случае имеет вид

$$y(x) = \int\limits_0^1 G(x,t)(t+1)\Big(\lambda\, y(t) + 3y(t) + f(t)\Big)dt$$

На этом наш вебинар заканчивается.

Спасибо за внимание.
Не болейте!