МФТИ
Московский Физико-Технический Институт

Функция Грина задачи Дирихле

Самарова С.С.

МФТИ, 3 курс, УМФ (классический курс)

Определение функции Грина задачи Дирихле

Пусть D – область в пространстве $\mathbb{R}^3$ с границей ∂D.

Функцией Грина задачи Дирихле для области D называют функцию двух переменных

$$G(x, y), \quad x \in \overline{D}, \quad y \in D,$$

обладающую следующими свойствами:

- $$G(x,y) = \frac{1}{4\pi|x-y|} + g(x,y),$$
  где функция $g(x,y)$ – гармоническая в области D и непрерывная в $\overline{D}$ по x при каждом $y \in D$;
- $$G(x,y)\big|_{x\in\partial D} = 0 \quad \text{при каждом } y \in D;$$
- Если область D неограничена, то
  $$G(x,y) \to 0 \quad \text{при } |x| \to \infty$$
  при каждом $y \in D$.

Применение функции Грина для решения задачи Дирихле

Решение $u(x)$ задачи Дирихле для уравнения Пуассона

$$\Delta u = -f(x), \quad x \in D,$$
$$u(x)\big|_{x\in\partial D} = u_0(x),$$

вычисляется по формуле

$$u(x) = -\int\limits_{\partial D} \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y} u_0(y)\,dS_y + \int\limits_D G(x,y) f(y)\,dy$$

Примеры решения задач

Задача 1 [задание 17.1(1)]

Построить функцию Грина для полупространства $D = \{x \in \mathbb{R}^3 : \; x_3 > 0\}$.

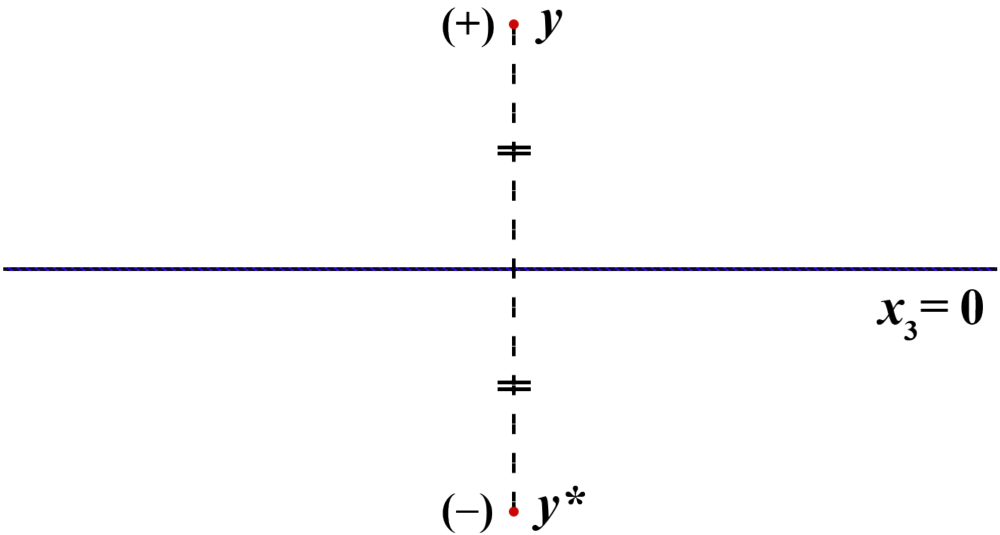
Решение. Будем строить функцию Грина

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi|x - y|} + g(x, y)$$

методом отражений.

Метод отражений основан на интерпретации функции Грина как потенциала, создаваемого в точке $x \in \overline{D}$ системой из нескольких электрических зарядов, один из которых расположен в точке $y \in D$, а другие выбираются вне $\overline{D}$ так, чтобы потенциал на границе области D был равен нулю.

В рассматриваемой задаче нужная система состоит из двух зарядов и изображена на следующем слайде.


(+)
y
x3 = 0
(−)
y*

Из рисунка получаем, что функция Грина имеет вид

$$G(x,y) = \frac{1}{4\pi|x-y|} - \frac{1}{4\pi|x-y^*|}$$

где $y = (y_1,\ y_2,\ y_3), \quad y^* = (y_1,\ y_2,\ -y_3), \quad y_3 > 0.$

Заметим, что функция

$$g(x,y) = -\frac{1}{4\pi|x-y^*|}$$

действительно является гармонической в области $D = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ x_3 > 0\}$, поскольку $y^* \notin D$.

Из соображений симметрии также следует, что, если $x \in \partial D$, то есть лежит на плоскости $x_3 = 0$, то $|x - y| = |x - y^*|$ и поэтому

$$G(x, y)\big|_{x_3=0} = 0$$

Ответ.

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi|x - y|} - \frac{1}{4\pi|x - y^*|}$$

Задача 2 [задание 17.1(2)]

Построить функцию Грина для двугранного угла $D = \{x \in \mathbb{R}^3 : \; x_2 > 0, \; x_3 > 0\}$.

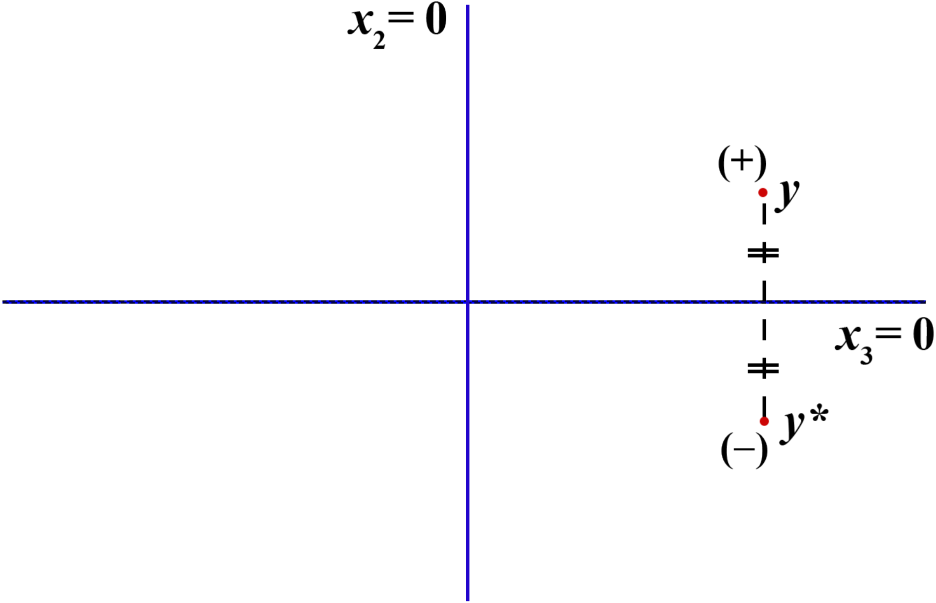
Решение. Для поиска функции Грина

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi|x - y|} + g(x, y)$$

снова применим метод отражений.

Сначала, как и в предыдущей задаче, поместим отрицательный единичный заряд в точку y^*, симметричную точке y относительно плоскости $x_3 = 0$.

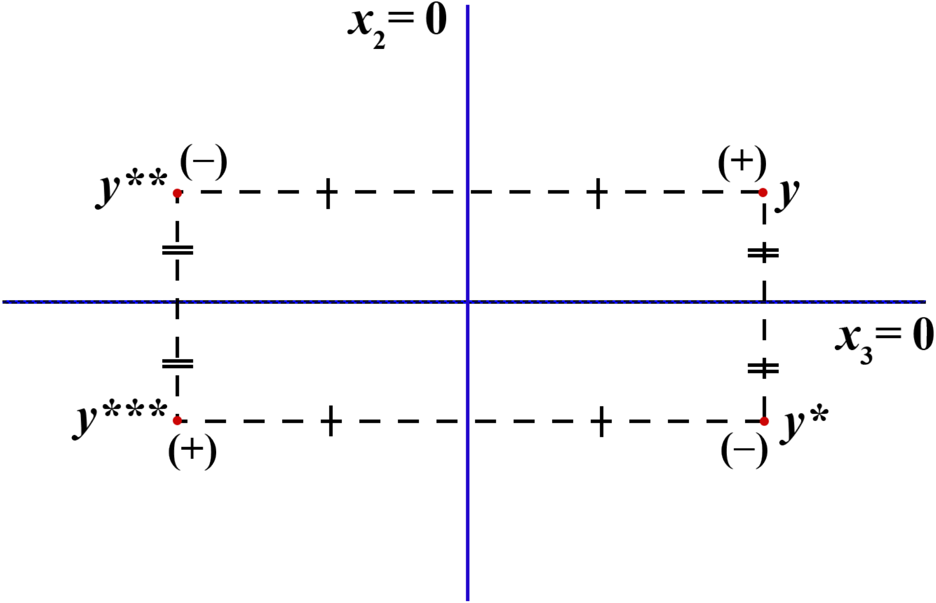
В результате потенциал, создаваемый системой из двух зарядов y и y^*, будет равен нулю на плоскости $x_3 = 0$.


$x_2 = 0$
(+)
y
(−)
y^*
$x_3 = 0$

Однако, как хорошо видно из рисунка на предыдущем слайде, на плоскости $x_2 = 0$ потенциал не равен нулю.

Для того, чтобы потенциал системы зарядов стал равным нулю также и на плоскости $x_2 = 0$, разместим заряды с противоположными знаками в точках, симметричных точкам y и y^* относительно плоскости $x_2 = 0$.

Получившаяся система зарядов изображена на следующем слайде.


$x_2 = 0$
y^{**}
(−)
(+)
y
$x_3 = 0$
y^{***}
(+)
(−)
y^*

Из рисунка следует, что функция Грина имеет вид

$$G(x,y) = \frac{1}{4\pi|x-y|} - \frac{1}{4\pi|x-y^*|} - \\ - \frac{1}{4\pi|x-y^{**}|} + \frac{1}{4\pi|x-y^{***}|}$$

где

$$y = (y_1,\ y_2,\ y_3); \qquad y^* = (y_1,\ y_2,\ -y_3);$$
$$y^{**} = (y_1,\ -y_2,\ y_3); \qquad y^{***} = (y_1,\ -y_2,\ -y_3);$$
$$y_2 > 0, \quad y_3 > 0\,.$$

Функция

$$g(x,y) = -\frac{1}{4\pi|x-y^*|} - \frac{1}{4\pi|x-y^{**}|} + \frac{1}{4\pi|x-y^{***}|}$$

является гармонической в области

$$D = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ x_2 > 0, \ x_3 > 0\}$$

поскольку $y^* \notin D, \ y^{**} \notin D, \ y^{***} \notin D.$

По соображениям симметрии

- для $\{x \in \mathbb{R}^3 : \ x_2 > 0, \ x_3 = 0\}$ выполнены равенства

$$|x - y| = |x - y^*| \quad \text{и} \quad |x - y^{**}| = |x - y^{***}|$$

- для $\{x \in \mathbb{R}^3 : \ x_2 = 0, \ x_3 > 0\}$ выполнены равенства

$$|x - y| = |x - y^{***}| \quad \text{и} \quad |x - y^*| = |x - y^{**}|$$

Следовательно,

$$G(x,y)\big|_{\{x_2>0,\ x_3=0\}} = 0; \qquad G(x,y)\big|_{\{x_2=0,\ x_3>0\}} = 0.$$

Ответ.

$$G(x,y) = \frac{1}{4\pi|x-y|} - \frac{1}{4\pi|x-y^*|} -$$

$$- \frac{1}{4\pi|x-y^{**}|} + \frac{1}{4\pi|x-y^{***}|}$$

Задача 3

Построить функцию Грина для шара
$D = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ |x| < R\}$.

Решение. Для построения функции Грина

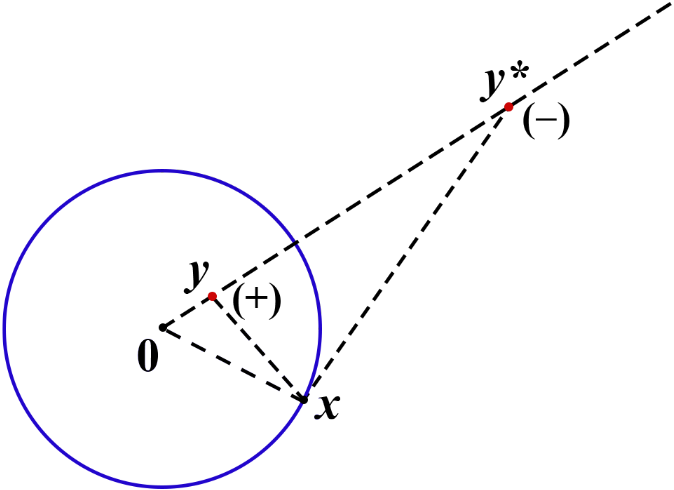
$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi|x-y|} + g(x, y)$$

будем применять метод отражений для сферы.

Напомним, что точку y^* называют симметричной точке y относительно сферы $\{x \in \mathbb{R}^3 : \ |x - x_0| = R\}$, если она лежит на том же луче с началом в центре сферы, что и точка y, и выполнено равенство

$$|y - x_0| \cdot |y^* - x_0| = R^2$$

Для того, чтобы получить потенциал, равный нулю на сфере $\{x \in \mathbb{R}^3 : \ |x| = R\}$, поместим отрицательный заряд величины q в точку y^*.



y*
(−)
y
(+)
0
x

Функция Грина в этом случае имеет вид

$$G(x,y) = \frac{1}{4\pi|x-y|} - \frac{q}{4\pi|x-y^*|}$$

Найдем величину заряда q.

Для этого рассмотрим произвольную точку x, лежащую на сфере $\{x \in \mathbb{R}^3 : \ |x - x_0| = R\}$.

Поскольку точки y и y^* симметричны относительно сферы, то выполнено равенство

$$|y| \cdot |y^*| = R^2$$

Из этого равенства получаем

$$\frac{|y|}{|x|} = \frac{|y|}{R} = \frac{R}{|y^*|} = \frac{|x|}{|y^*|}$$

Поэтому треугольники $\triangle 0xy$ и $\triangle 0y^*x$ подобны по второму признаку. Следовательно,

$$\frac{|y|}{R} = \frac{|x-y|}{|x-y^*|} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{|x-y|} = \frac{R}{|y|\cdot|x-y^*|}$$

Поскольку на сфере $\{|x| = R\}$ функция Грина должна быть равна нулю, то выполнены равенства

$$G(x,y)\big|_{\{|x|=R\}} = \left(\frac{1}{4\pi|x-y|} - \frac{q}{4\pi|x-y^*|}\right)\Bigg|_{\{|x|=R\}} =$$

$$= \left(\frac{R}{4\pi|y|\cdot|x-y^*|} - \frac{q}{4\pi|x-y^*|}\right)\Bigg|_{\{|x|=R\}} = 0$$

Значит, $q = \dfrac{R}{|y|}$.

Таким образом,

$$G(x,y) = \frac{1}{4\pi|x-y|} - \frac{R}{4\pi|y|\cdot|x-y^*|}$$

где

$$y^* = y\cdot\frac{R^2}{|y|^2}\,, \qquad |y| < R\,.$$

Ответ.

$$G(x,y) = \frac{1}{4\pi|x-y|} - \frac{R}{4\pi|y|\cdot|x-y^*|}$$

Задача 4 [задание 17.4(1)]

Найти решение задачи Дирихле

$$\Delta u = -f(x), \quad x_3 > 0,$$
$$u(x)\big|_{x_3=0} = u_0(x),$$

если $f(x)$ и $u_0(x)$ непрерывны и ограничены.

Решение.

Решение задачи Дирихле для данного уравнения можно найти при помощи функции Грина для области $D = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ x_3 > 0\}$ по формуле

$$u(x) = -\int\limits_{y_3=0} \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y} u_0(y)dS_y + \int\limits_{y_3>0} G(x,y)f(y)dy$$

В задаче 1 мы выяснили, что функция Грина для области $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 > 0\}$ имеет вид

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi|x - y|} - \frac{1}{4\pi|x - y^*|}$$

где $y = (y_1,\ y_2,\ y_3), \quad y^* = (y_1,\ y_2,\ -y_3), \quad y_3 > 0.$

Вычислим явно производную по направлению внешней нормали n_y к границе области $\{y \in \mathbb{R}^3 : y_3 > 0\}$ в точках $\{x \in \mathbb{R}^3,\ y \in \mathbb{R}^3 : y_3 = 0\}$

$$\left.\frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y}\right|_{y_3=0}$$

Для этого заметим, что внешняя нормаль к границе области $\{y \in \mathbb{R}^3 : y_3 > 0\}$ направлена вдоль оси Oy_3 в сторону уменьшения значений y_3.

Поэтому

$$\left.\frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y}\right|_{y_3=0} = -\left.\frac{\partial G(x,y)}{\partial y_3}\right|_{y_3=0}$$

Записывая $G(x,y)$ в координатах точек x и y, получаем

$$-\left.\frac{\partial G(x,y)}{\partial y_3}\right|_{y_3=0} = -\left.\frac{\partial}{\partial y_3}\left(\frac{1}{4\pi|x-y|} - \frac{1}{4\pi|x-y^*|}\right)\right|_{y_3=0} =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial y_3}\left(\frac{1}{4\pi\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4\pi\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3+y_3)^2}}\right)\Bigg|_{y_3=0} =$$

$$= -\left(\frac{(x_3 - y_3)}{4\pi \left((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} - \right.$$

$$\left. - \frac{-(x_3 + y_3)}{4\pi \left((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \right) \Bigg|_{y_3=0} =$$

$$= -\frac{x_3}{4\pi\left((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+x_3^2\right)^{\frac{3}{2}}} -$$

$$-\frac{x_3}{4\pi\left((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+x_3^2\right)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= -\frac{x_3}{2\pi\left((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+x_3^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Далее получаем

$$\left.\frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y}\right|_{y_3=0} = -\left.\frac{x_3}{2\pi\left((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+x_3^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right|_{y_3=0} =$$

$$= -\left.\frac{x_3}{2\pi|x-y|^3}\right|_{y_3=0}$$

Подставляя найденное выражение в формулу для решения задачи Дирихле, получаем окончательный ответ

$$u(x) = -\int\limits_{y_3=0} \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y} u_0(y) dS_y + \int\limits_{y_3>0} G(x,y) f(y) dy =$$

$$= \frac{x_3}{2\pi} \int\limits_{y_3=0} \frac{u_0(y)}{|x-y|^3} dS_y +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int\limits_{y_3>0} \left(\frac{1}{4\pi|x-y|} - \frac{1}{4\pi|x-y^*|} \right) f(y) dy$$

Спасибо за внимание.
Не болейте!