Уравнения Лапласа и Пуассона в круговых областях

Самарова С.С.

МФТИ, 3 курс, УМФ (классический курс)

Уравнения Лапласа и Пуассона на плоскости

Однородное эллиптическое уравнение

$$\Delta u = 0, \quad \text{где} \quad \Delta u = u_{xx} + u_{yy}\,, \quad u = u(x, y),$$

называют уравнением Лапласа на плоскости, а его решения называют гармоническими функциями.

Неоднородное уравнение

$$\Delta u = f(x, y)$$

называют уравнением Пуассона на плоскости.

Обозначим

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Мы будем рассматривать решения уравнений Лапласа и Пуассона $u(x, y) \in C^2(D)$ в следующих областях:

- внутри круга $D = \{r < R\}$;
- вне круга $D = \{r > R\}$;
- в кольце $D = \{R_1 < r < R_2\}$.

Задача Дирихле для уравнений Лапласа и Пуассона в круге

Пусть

- $D = \{r < R\}$,
- $\partial D = \{r = R\}$,
- $f(x, y) \in C(D)$,
- $u_0(x, y) \in C(\partial D)$.

Задачей Дирихле для уравнения Пуассона в круге называют задачу

$$\begin{aligned} \Delta u &= f(x, y) \\ u\big|_{r=R} &= u_0(x, y) \end{aligned}$$

где $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$.

В случае $f = 0$ эту задачу называют задачей Дирихле для уравнения Лапласа в круге

Задача Дирихле для уравнений Лапласа и Пуассона во внешности круга

Пусть

- $D = \{r > R\}$,
- $\partial D = \{r = R\}$,
- $f(x, y) \in C(D)$,
- $u_0(x, y) \in C(\partial D)$.

Задачей Дирихле для уравнения Пуассона во внешности круга называют задачу

$$\Delta u = f(x,y)$$
$$u\big|_{r=R} = u_0(x,y)$$

где $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ и ограничена.

В случае $f = 0$ эту задачу называют задачей Дирихле для уравнения Лапласа во внешности круга

Задача Дирихле для уравнений Лапласа и Пуассона в кольце

Пусть

- $D = \{R_1 < r < R_2\}$,
- $\partial D = \Big\{\{r = R_1\} \cup \{r = R_2\}\Big\}$,
- $f(x, y) \in C(D)$,
- $u_0(x, y) \in C(\{r = R_1\})$,
- $u_1(x, y) \in C(\{r = R_2\})$.

Задачей Дирихле для уравнения Пуассона в кольце называют задачу

$$\Delta u = f(x,y)$$
$$u\big|_{r=R_1} = u_0(x,y), \quad u\big|_{r=R_2} = u_1(x,y)$$

где $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$.

В случае $f = 0$ эту задачу называют задачей Дирихле для уравнения Лапласа в кольце

Задача Неймана для уравнений Лапласа и Пуассона в круге

Пусть

- $D = \{r < R\}$,
- $\partial D = \{r = R\}$,
- $f(x, y) \in C(D)$,
- $u_1(x, y) \in C(\partial D)$.

Задачей Неймана для уравнения Пуассона в круге называют задачу

$$\Delta u = f(x,y)$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R} = u_1(x,y)$$

где $u \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$.

В случае $f = 0$ эту задачу называют задачей Неймана для уравнения Лапласа в круге

Необходимое условие разрешимости задачи Неймана для уравнения Пуассона в круге

$$\int\limits_{r=R} u_1(x,y)\,dS = \iint\limits_{r<R} f(x,y)\,dx\,dy$$

Доказательство

$$\int\limits_{r=R} u_1(x,y)\,dS = \int\limits_{r=R} \frac{\partial u}{\partial r}\,dS = \int\limits_{r=R} \frac{\partial u}{\partial n}\,dS =$$

$$= \{\text{1-я формула Грина}\} = \iint\limits_{r<R} \Delta u\,dx\,dy = \iint\limits_{r<R} f(x,y)\,dx\,dy$$

Следствие (необходимое условие разрешимости задачи Неймана для уравнения Лапласа в круге)

$$\int\limits_{r=R} u_1(x,y)\,dS = 0$$

Задача Неймана для уравнений Лапласа и Пуассона во внешности круга

Пусть

- $D = \{r > R\}$,
- $\partial D = \{r = R\}$,
- $f(x, y) \in C(D)$,
- $u_1(x, y) \in C(\partial D)$.

Задачей Неймана для уравнения Пуассона во внешности круга называют задачу

$$
\begin{aligned}
&\Delta u = f(x, y) \\
&\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R} = u_1(x, y)
\end{aligned}
$$

где $u \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ и ограничена.

В случае $f = 0$ эту задачу называют задачей Неймана для уравнения Лапласа во внешности круга

Необходимое условие разрешимости задачи Неймана для уравнения Пуассона во внешности круга

$$\int\limits_{r=R} u_1(x,y)\,dS = -\iint\limits_{r<R} f(x,y)\,dx\,dy$$

Следствие (необходимое условие разрешимости задачи Неймана для уравнения Лапласа во внешности круга)

$$\int\limits_{r=R} u_1(x,y)\,dS = 0$$

Задача Неймана для уравнений Лапласа и Пуассона в кольце

Пусть

- $D = \{R_1 < r < R_2\}$,
- $\partial D = \Big\{\{r = R_1\} \cup \{r = R_2\}\Big\}$,
- $f(x, y) \in C(D)$,
- $u_1(x, y) \in C^1(\{r = R_1\})$,
- $u_2(x, y) \in C^1(\{r = R_2\})$.

Задачей Неймана для уравнения Пуассона в кольце называют задачу

$$\Delta u = f(x,y)$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R_1} = u_1(x,y), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R_2} = u_2(x,y)$$

где $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$.

В случае $f = 0$ эту задачу называют задачей Неймана для уравнения Лапласа в кольце

Необходимое условие разрешимости задачи Неймана для уравнения Пуассона в кольце

$$\int\limits_{r=R_2} u_2(x,y)\,dS - \int\limits_{r=R_1} u_1(x,y)\,dS = \iint\limits_{R_1<r<R_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

Следствие (необходимое условие разрешимости задачи Неймана для уравнения Лапласа в кольце)

$$\int\limits_{r=R_2} u_2(x,y)\,dS = \int\limits_{r=R_1} u_1(x,y)\,dS$$

Замечание.
Для уравнений Лапласа и Пуассона в круговых областях вместо условий Дирихле или Неймана часто рассматриваются краевые условия вида

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \alpha u\right)\bigg|_{\partial D} = u_0(x, y)$$

где α – некоторая константа.

Общий вид гармонических функций в круговых областях

Уравнение Лапласа в полярных координатах имеет вид

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} = 0$$

Поскольку его решение $u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ является 2π – периодической по φ, то разложим его в ряд Фурье по φ

$$u = A_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(A_n(r)\cos n\varphi + B_n(r)\sin n\varphi \Big)$$

Подставляя это разложение в уравнение Лапласа

$$A_0''(r) + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(A_n''(r)\cos n\varphi + B_n''(r)\sin n\varphi\Big) +$$

$$+\frac{1}{r}A_0'(r) + \frac{1}{r}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(A_n'(r)\cos n\varphi + B_n'(r)\sin n\varphi\Big) -$$

$$-\frac{1}{r^2}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(n^2 A_n(r)\cos n\varphi + n^2 B_n(r)\sin n\varphi\Big) = 0$$

для коэффициентов Фурье получаем уравнения

$$A_n''(r) + \frac{1}{r}A_n'(r) - \frac{n^2}{r^2}A_n(r) = 0, \quad n = 0,\, 1, \ldots$$

$$B_n''(r) + \frac{1}{r}B_n'(r) - \frac{n^2}{r^2}B_n(r) = 0, \quad n = 1,\, 2, \ldots$$

Решим сначала уравнение для $A_n(r)$. Умножив его на r^2, мы получим уравнение Эйлера

$$r^2 A_n''(r) + r A_n'(r) - n^2 A_n(r) = 0$$

Выпишем и решим характеристическое уравнение

$$\lambda(\lambda-1)+\lambda-n^2=0$$

$$\lambda^2=n^2$$

$$\lambda_{1,2}=\pm n$$

При $n\neq 0$ решением уравнения Эйлера будет

$$A_n(r)=c_{1,n}r^n+c_{2,n}r^{-n}$$

Если же $n=0$, то $\lambda_{1,2}=0$ и

$$A_0(r)=c_{1,0}+c_{2,0}\ln r$$

Поскольку уравнения для $B_n(r)$ и $A_n(r)$ совершенно одинаковые, то

$$B_n(r) = d_{1,n} r^n + d_{2,n} r^{-n}$$

Таким образом,

$$u = c_{1,0} + c_{2,0} \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\left(c_{1,n} r^n + c_{2,n} r^{-n} \right) \cos n\varphi +$$

$$+ \left(d_{1,n} r^n + d_{2,n} r^{-n} \right) \sin n\varphi \Big)$$

и мы можем выписать общий вид гармонических функций во всех трех круговых областях.

Замечание

- Внутри круга в силу ограниченности гармонической функции $u(r, \varphi)$ при $r \to 0$ коэффициенты $c_{2,n} = 0$ и $d_{2,n} = 0$ при всех $n > 0$.
- Во внешности круга в силу ограниченности гармонической функции $u(r, \varphi)$ при $r \to \infty$ коэффициенты $c_{1,n} = 0$ и $d_{1,n} = 0$ при всех n.
- В кольце никаких ограничений на коэффициенты накладывать не нужно.

Таким образом,

- общий вид гармонических функций внутри круга

$$u = c_{1,0} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(c_{1,n} r^n \cos n\varphi + d_{1,n} r^n \sin n\varphi \Big)$$

- общий вид гармонических функций во внешности круга

$$u = c_{1,0} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(c_{2,n} r^{-n} \cos n\varphi + d_{2,n} r^{-n} \sin n\varphi \Big)$$

- общий вид гармонических функций в кольце

$$u = c_{1,0} + c_{2,0} \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \Big((c_{1,n} r^n + c_{2,n} r^{-n}) \cos n\varphi +$$

$$+ (d_{1,n} r^n + d_{2,n} r^{-n}) \sin n\varphi \Big)$$

Примеры решения задач

Задача 1 [задание Т3(а)]

В круге $r < 2$ исследовать, при каких значениях α задача Неймана

$$\Delta u = y,$$
$$u_r\big|_{r=2} = \sin^3\varphi + \alpha\cos^2\varphi,$$

имеет решение, и найти это решение.

Решение.

1. Найдем, при каких значениях α выполнено необходимое условие разрешимости задачи Неймана в круге:

$$\int\limits_0^{2\pi} (\sin^3\varphi + \alpha\cos^2\varphi)\, 2\, d\varphi = \iint\limits_{r<2} y\, dx\, dy$$

Вычислим интеграл в левой части равенства

$$\int\limits_0^{2\pi} (\sin^3\varphi + \alpha\cos^2\varphi)\, 2\, d\varphi =$$

$$= -2\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos^2\varphi)\,d(\cos\varphi) + \alpha\int\limits_0^{2\pi}(1+\cos 2\varphi)\,d\varphi =$$

$$= -2\left(\cos\varphi - \frac{\cos^3\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi} + \alpha\left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 2\pi\alpha$$

Вычислим интеграл в правой части равенства

$$\iint\limits_{r<2} y\,dx\,dy = \int\limits_0^2 r^2 dr \int\limits_0^{2\pi}\sin\varphi\,d\varphi = 0$$

Таким образом, необходимым условием разрешимости задачи Неймана является условие $\alpha = 0$.

2. Теперь решим задачу Неймана в случае $\alpha = 0$.

$$\Delta u = y,$$
$$u_r\big|_{r=2} = \sin^3\varphi.$$

Найдем какое-нибудь частное решение уравнения Пуассона, чтобы свести его к уравнению Лапласа.

Поскольку в краевом условии уже присутствует $\sin^3\varphi$, частное решение удобно искать в виде

$$u_{\text{ч}} = \beta y^3$$

Подставляя его в уравнение, получаем

$$\Delta u_{\text{ч}} = 6\beta y = y \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad u_{\text{ч}} = \frac{y^3}{6}$$

3. Совершив в уравнении и краевом условии замену

$$u = v + \frac{y^3}{6} = v + \frac{r^3}{6}\sin^3\varphi$$

получаем

$$\Delta v = 0$$

$$v_r\big|_{r=2} = u_r\big|_{r=2} - \frac{r^2}{2}\sin^3\varphi\bigg|_{r=2} = \sin^3\varphi - 2\sin^3\varphi = -\sin^3\varphi$$

4. Поскольку гармонические функции в круге имеют вид

$$v = c_{1,0} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(c_{1,n}r^n\cos n\varphi + d_{1,n}r^n\sin n\varphi\Big)$$

преобразуем краевое условие к синусам кратных углов

$$v_r\big|_{r=2} = -\sin^3\varphi = -\frac{3}{4}\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 3\varphi$$

Так как в данной задаче в краевое условие входят только функции $\sin\varphi$ и $\sin 3\varphi$, то решение будет иметь вид

$$v = c_{1,0} + d_{1,1}\, r \sin\varphi + d_{1,3}\, r^3 \sin 3\varphi$$

5. Найдем v_r

$$v_r = d_{1,1} \sin\varphi + 3\, d_{1,3}\, r^2 \sin 3\varphi$$

и подставим v_r в краевое условие

$$d_{1,1} \sin\varphi + 12\, d_{1,3} \sin 3\varphi = -\frac{3}{4} \sin\varphi + \frac{1}{4} \sin 3\varphi$$

Следовательно,

$$d_{1,1} = -\frac{3}{4}, \quad d_{1,3} = \frac{1}{48}$$

Таким образом,

$$v = c_{1,0} - \frac{3\,r}{4}\sin\varphi + \frac{r^3}{48}\sin 3\varphi$$

Ответ. $\alpha = 0, \quad u = \dfrac{r^3}{6}\sin^3\varphi - \dfrac{3\,r}{4}\sin\varphi + \dfrac{r^3}{48}\sin 3\varphi + c_{1,0},$
где $c_{1,0}$ – любое число.

Задача 2 [задание Т3(б)]

Решить краевую задачу

$$\Delta u = \frac{3\big(x^2-y^2\big)+y}{\big(x^2+y^2\big)^{5/2}}, \quad r > 1,$$
$$u\big|_{r=1} = -2\sin\varphi + 4\sin 2\varphi.$$

Решение.

1. Найдем какое-нибудь частное решение уравнения Пуассона, чтобы свести его к уравнению Лапласа. Для этого перейдем в уравнении к полярным координатам

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = \frac{3r^2\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) + r\sin\varphi}{r^5}$$

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = \frac{3}{r^3}\cos 2\varphi + \frac{1}{r^4}\sin\varphi$$

Частное решение удобно искать в виде суммы

$$u_{\text{ч}} = u_{\text{ч},\,1} + u_{\text{ч},\,2}$$

где $u_{\text{ч},\,1}$ имеет вид

$$u_{\text{ч},\,1} = \frac{A}{r}\cos 2\varphi$$

и является решением уравнения

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = \frac{3}{r^3}\cos 2\varphi$$

а $u_{\text{ч},\,2}$ имеет вид

$$u_{\text{ч},\,2} = \frac{B}{r^2}\sin\varphi$$

и является решением уравнения

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r^4}\sin\varphi$$

Для $u_{\text{ч},\,1}$ находим

$$\frac{2A}{r^3}\cos 2\varphi - \frac{A}{r^3}\cos 2\varphi - \frac{4A}{r^3}\cos 2\varphi = \frac{3}{r^3}\cos 2\varphi$$

$$A = -1 \quad \Rightarrow \quad u_{\text{ч},1} = -\frac{1}{r}\cos 2\varphi$$

Для $u_{\text{ч},\,2}$ находим

$$\frac{6B}{r^4}\sin\varphi - \frac{2B}{r^4}\sin\varphi - \frac{B}{r^4}\sin\varphi = \frac{1}{r^4}\sin\varphi$$

$$B = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad u_{\text{ч},2} = \frac{1}{3r^2}\sin\varphi$$

2. Совершив в уравнении и краевом условии замену

$$u = v - \frac{1}{r}\cos 2\varphi + \frac{1}{3r^2}\sin\varphi$$

получаем

$$\Delta v = 0$$

$$v_r\big|_{r=1} = u_r\big|_{r=1} - \frac{1}{r^2}\cos 2\varphi\Big|_{r=1} + \frac{2}{3r^3}\sin\varphi\Big|_{r=1} =$$

$$= -2\sin\varphi + 4\sin 2\varphi - \cos 2\varphi + \frac{2}{3}\sin\varphi =$$

$$= -\frac{4}{3}\sin\varphi + 4\sin 2\varphi - \cos 2\varphi$$

3. Гармонические функции во внешности круга имеют вид

$$u = c_{1,0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_{2,n} r^{-n} \cos n\varphi + d_{2,n} r^{-n} \sin n\varphi \right)$$

Поскольку в данной задаче в граничные условия входят только функции $\sin\varphi$, $\sin 2\varphi$ и $\cos 2\varphi$, то решение будет иметь вид

$$v = c_{1,0} + \frac{d_{2,1}}{r} \sin\varphi + \frac{d_{2,2}}{r^2} \sin 2\varphi + \frac{c_{2,2}}{r^2} \cos 2\varphi$$

4. Найдем v_r

$$v_r = -\frac{d_{2,1}}{r^2}\sin\varphi - \frac{2d_{2,2}}{r^3}\sin 2\varphi - \frac{2c_{2,2}}{r^3}\cos 2\varphi$$

и подставим v_r в краевое условие

$$-d_{2,1}\sin\varphi - 2d_{2,2}\sin 2\varphi - 2c_{2,2}\cos 2\varphi =$$
$$= -\frac{4}{3}\sin\varphi + 4\sin 2\varphi - \cos 2\varphi$$

Следовательно,

$$d_{2,1} = \frac{4}{3}, \quad d_{2,2} = -2 \quad c_{2,2} = \frac{1}{2}$$

Таким образом,

$$v = c_{1,0} + \frac{4}{3r}\sin\varphi - \frac{2}{r^2}\sin 2\varphi + \frac{1}{2r^2}\cos 2\varphi$$

Ответ.

$$u = -\frac{1}{r}\cos 2\varphi + \frac{1}{3r^2}\sin\varphi + \frac{4}{3r}\sin\varphi - \frac{2}{r^2}\sin 2\varphi$$

$$+\frac{1}{2r^2}\cos 2\varphi + c_{1,0}$$

где $c_{1,0}$ – любое число.

Задача 3 [задание T2(а)]

Решить краевую задачу

$$\Delta u = 12x, \quad 1 < r < 2,$$
$$u\big|_{r=1} = 2\cos^3\varphi + 1 - \sin\varphi\cos\varphi,$$
$$u\big|_{r=2} = 16\cos^3\varphi - 4\sin\varphi\cos\varphi.$$

Решение.

1. Найдем какое-нибудь частное решение уравнения Пуассона, чтобы свести его к уравнению Лапласа.

Поскольку в краевых условиях уже присутствует $\cos^3\varphi$, частное решение удобно искать в виде

$$u_{\text{ч}} = \alpha x^3$$

Подставляя его в уравнение, получаем

$$\Delta u_{\text{ч}} = 6\alpha x = 12x \quad\Rightarrow\quad \alpha = 2 \quad\Rightarrow\quad u_{\text{ч}} = 2x^3$$

2. Совершив в уравнении и краевых условиях замену

$$u = v + 2x^3 = v + 2r^3\cos^3\varphi$$

получаем

$$\Delta v = 0$$

$$v\big|_{r=1} = u\big|_{r=1} - 2x^3\Big|_{r=1} = 2\cos^3\varphi + 1 - \sin\varphi\cos\varphi - 2\cos^3\varphi =$$

$$= 1 - \sin\varphi\cos\varphi = 1 - \frac{1}{2}\sin 2\varphi$$

$$v\big|_{r=2} = u\big|_{r=2} - 2x^3\Big|_{r=2} = 16\cos^3\varphi - 4\sin\varphi\cos\varphi - 16\cos^3\varphi =$$

$$= -4\sin\varphi\cos\varphi = -2\sin 2\varphi$$

3. Гармонические функции в кольце имеют вид

$$v = c_{1,0} + c_{2,0} \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\left(c_{1,n} r^n + c_{2,n} r^{-n} \right) \cos n\varphi +$$

$$+ \left(d_{1,n} r^n + d_{2,n} r^{-n} \right) \sin n\varphi \Big)$$

Поскольку в данной задаче в граничные условия входят только константа и $\sin 2\varphi$, то решение будет иметь вид

$$v = c_{1,0} + c_{2,0} \ln r + \left(d_{1,2} r^2 + d_{2,2} r^{-2} \right) \sin 2\varphi$$

4. Подставляя v в граничные условия, получаем

$$\begin{cases} c_{1,0} + (d_{1,2} + d_{2,2}) \sin 2\varphi = 1 - \dfrac{1}{2} \sin 2\varphi \\ c_{1,0} + c_{2,0} \ln 2 + \left(4 d_{1,2} + \dfrac{1}{4} d_{2,2}\right) \sin 2\varphi = -2 \sin 2\varphi \end{cases}$$

Таким образом,

$$\begin{cases} c_{1,0} = 1 \\ c_{1,0} + c_{2,0} \ln 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_{1,0} = 1 \\ c_{2,0} = -\dfrac{1}{\ln 2} \end{cases}$$

Кроме того,

$$\begin{cases} d_{1,2} + d_{2,2} = -\dfrac{1}{2} \\ 4d_{1,2} + \dfrac{1}{4} d_{2,2} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d_{1,2} + d_{2,2} = -\dfrac{1}{2} \\ 16d_{1,2} + d_{2,2} = -8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d_{1,2} + d_{2,2} = -\dfrac{1}{2} \\ 15d_{1,2} = -\dfrac{15}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d_{1,2} = -\dfrac{1}{2} \\ d_{2,2} = 0 \end{cases}$$

Таким образом,

$$v = 1 - \frac{\ln r}{\ln 2} - \frac{r^2}{2}\sin 2\varphi$$

$$u = 2r^3\cos^3\varphi + 1 - \frac{\ln r}{\ln 2} - \frac{r^2}{2}\sin 2\varphi$$

Ответ. $$u = 2r^3\cos^3\varphi + 1 - \frac{\ln r}{\ln 2} - \frac{r^2}{2}\sin 2\varphi$$

Спасибо за внимание.
Не болейте!