

# СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Самарова С.С.

МФТИ, II курс, теория вероятностей

## СОДЕРЖАНИЕ

ПОНЯТИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ .....	1
БОРЕЛЕВСКИЕ МНОЖЕСТВА.....	2
ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ .....	5
ОСНОВНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН .....	6
ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ .....	7
НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ .....	9
ОСНОВНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН.....	12

## ПОНЯТИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Во многих вероятностных задачах приходится не только вычислять вероятности каких-либо конкретных событий, но и исследовать числовые характеристики случайных экспериментов, точные значения которых заранее неизвестны и зависят от того, какой из элементарных исходов случайного эксперимента будет реализован.

Для решения подобных задач вводится понятие случайной величины.

Случайная величина является числовой функцией, определенной на множестве элементарных исходов, и поэтому предсказать заранее, какое из своих значений она примет, как правило, невозможно. Можно лишь указать вероятность, с которой случайная величина будет принимать то или иное значение, или указать вероятность того, что её значения будут находиться в каком-либо числовом промежутке.

Количество очков, выпадающих при бросании игральной кости, или время, которое требуется автобусу для прохождения маршрута в час пик, могут служить простейшими примерами случайных величин.

Дадим точное определение случайной величины.

Пусть задано вероятностное пространство  $(\Omega, F, P)$ .

**Определение 1.** Числовую функцию  $\xi(\omega)$ , определенную для всех  $\omega \in \Omega$ , называют *случайной величиной* (или *измеримой функцией*), если для любого числа  $c$  выполнено условие

$$\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) \leq c\} \in F. \quad (1)$$

**Определение 2.** *Законом распределения* (или просто *распределением*) *случайной величины*  $\xi(\omega)$  называют правило, позволяющее находить вероятность попадания значений  $\xi(\omega)$  в любой заданный числовой промежуток.

## БОРЕЛЕВСКИЕ МНОЖЕСТВА

По своему смыслу определение случайной величины означает, что множество (1) является событием, и для любого числа  $c$  можно найти вероятность того, что значения случайной величины попадут в полуинтервал  $(-\infty, c]$ .

Поскольку  $F$  является  $\sigma$ -алгеброй, то для случайной величины можно также вычислить и вероятность попадания ее значений в любое множество, полученное из полуинтервалов вида  $(-\infty, c]$  при помощи конечного или счетного числа операций объединения, пересечения или дополнения. Другими словами, можно найти вероятность попадания значений случайной величины в любое множество из минимальной  $\sigma$ -алгебры, содержащей полуинтервалы вида  $(-\infty, c]$ .

**Определение 3.** *Борелевской  $\sigma$ -алгеброй на  $(-\infty, +\infty)$*  называют минимальную  $\sigma$ -алгебру, которая содержит все полуинтервалы вида  $(-\infty, c]$  для  $\forall c \in R$ . Элементы борелевской  $\sigma$ -алгебры называют *борелевскими множествами*.

Борелевскую  $\sigma$ -алгебру на  $(-\infty, +\infty)$  обозначают  $\mathfrak{B}(-\infty, +\infty)$ .

Для того, чтобы лучше понять, какие множества входят в  $\sigma$ -алгебру  $\mathfrak{B}(-\infty, +\infty)$ , решим следующую задачу.

**Задача 1.** Доказать, что борелевская  $\sigma$ -алгебра  $\mathfrak{B}(-\infty, +\infty)$  совпадает с минимальной  $\sigma$ -алгеброй, построенной на всех множествах любого из следующих шести типов:

- 1)  $(a, b]$ ; 2)  $(a, b)$ ; 3)  $[a, b)$ ; 4)  $[a, b]$ ;
- 5) открытые множества; 6) замкнутые множества.

*Решение.*

- 1) Заметим, что для любых действительных чисел  $a, b, c$  выполнены соотношения

$$(a, b] = (a, +\infty) \cap (-\infty, b] = \overline{(-\infty, a]} \cap (-\infty, b],$$

$$(-\infty, c] = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (c - n, c]$$

Поэтому минимальная  $\sigma$ -алгебра, построенная на промежутках  $(a, b]$ , совпадает с  $\mathfrak{B}(-\infty, +\infty)$ .

2) Поскольку верны равенства:

$$(a, b) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left( a, b - \frac{1}{n} \right],$$

$$(-\infty, c] = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left( c - n, c + \frac{1}{n} \right),$$

то справедливость пункта 2) вытекает из пункта 1).

3) Для доказательства пункта 3) воспользуемся следующими соотношениями:

$$[a, b) = (a, b) \cup \{b\} = (a, b) \cup \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left( b - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n} \right),$$

$$(-\infty, c] = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[ c - n, c + \frac{1}{n} \right).$$

Как мы уже выяснили в пункте 2), минимальная  $\sigma$ -алгебра, содержащая все интервалы  $(a, b)$ , совпадает с  $\mathfrak{B}(-\infty, +\infty)$ , поэтому и справедливость пункта 3) доказана.

4) Из равенств

$$[a, b] = [a, b) \cup \{b\} = [a, b) \cup \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left( b - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n} \right),$$

$$(-\infty, c] = \bigcup_{n=1}^{+\infty} [c - n, c]$$

и доказанного выше следует, что и минимальная  $\sigma$ -алгебра, содержащая все отрезки  $[a, b]$ , также совпадает с  $\mathfrak{B}(-\infty, +\infty)$ .

5) Поскольку каждый полуинтервал вида  $(-\infty, c]$  является дополнением до открытого множества  $(c, +\infty)$ , то  $\mathfrak{B}(-\infty, +\infty)$  входит в минимальную  $\sigma$ -алгебру, содержащую все открытые множества.

Покажем теперь, что верно и обратное включение. С этой целью рассмотрим произвольное открытое множество  $A$  и все такие рациональные числа  $q$  и  $r$ , для которых интервалы  $U_r(q) = (q - r, q + r)$  целиком входят в множество  $A$ . Таких интервалов счетное множество и объединение всех этих интервалов

$$A' = \bigcup_{\substack{r, q: \\ U_r(q) \subset A}} U_r(q)$$

содержится в множестве  $A$ .

Теперь докажем, что и множество  $A$  входит в множество  $A'$ . С этой целью заметим, что все рациональные точки  $q \in A$  принадлежат и множеству  $A'$ . Что же касается иррациональных точек, то для любой иррациональной точки  $x \in A$  по определению открытого множества существует интервал  $U_\delta(x) \subset A$ . Выберем рациональные точки  $q_1 \in (x - \delta, x)$  и  $q_2 \in (x, x + \delta)$ . Тогда, полагая

$$q = \frac{q_1 + q_2}{2}, \quad r = \frac{q_2 - q_1}{2},$$

замечаем, что  $x \in U_r(q) \subset A$ . Таким образом, доказано, что все точки множества  $A$  принадлежат множеству  $A'$ . Следовательно,

$$A = \bigcup_{\substack{r, q: \\ U_r(q) \subset A}} U_r(q),$$

что и завершает доказательство пункта 5).

б) Поскольку любое замкнутое множество является дополнением к открытому множеству, а любое открытое множество является дополнением к замкнутому множеству, то из справедливости пункта 5) вытекает, что борелевская  $\sigma$ -алгебра  $\mathfrak{B}(-\infty, +\infty)$  является минимальной  $\sigma$ -алгеброй, содержащей все замкнутые множества.

*Замечание 1 (Борелевская  $\sigma$ -алгебра на отрезке).* Борелевскую  $\sigma$ -алгебру можно ввести и на любом отрезке  $[\alpha, \beta]$  как наименьшую  $\sigma$ -алгебру, содержащую все подмножества данного отрезка  $[\alpha, \beta]$ , относящиеся к одному (любому!) из шести перечисленных в задаче 1 типов. Как и в задаче 1, все шесть построенных таким способом  $\sigma$ -алгебр будут совпадать. Борелевскую  $\sigma$ -алгебру на отрезке  $[\alpha, \beta]$  обозначают  $\mathfrak{B}([\alpha, \beta])$ .

*Замечание 2 (Борелевская  $\sigma$ -алгебра в  $R^n$ ).* Борелевскую  $\sigma$ -алгебру в  $R^n$  определяют как наименьшую  $\sigma$ -алгебру, содержащую все открытые множества в  $R^n$ , и обозначают  $\mathfrak{B}(R^n)$ .

Как и в одномерном случае,  $\mathfrak{B}(R^n)$  можно получить и из других наборов множеств. Например, в качестве множеств, порождающих  $\sigma$ -алгебру  $\mathfrak{B}(R^n)$ , можно взять  $n$ -мерные параллелепипеды  $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ .

С помощью борелевских множеств можно дать другие определения для случайной величины и ее закона распределения, эквивалентные определениям 1 и 2 соответственно. Именно эти определения чаще всего используются в специальной литературе по теории вероятностей.

**Определение 4.** Числовую функцию  $\xi(\omega)$ , определенную для всех  $\omega \in \Omega$ , называют *случайной величиной* (или *измеримой функцией*), если для любого борелевского множества  $B \in \mathfrak{B}(-\infty, +\infty)$  выполнено условие

$$\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) \in B\} \in F. \quad (2)$$

**Определение 5.** *Законом распределения* (или просто *распределением*) случайной величины  $\xi(\omega)$  называют правило, позволяющее находить вероятность попадания значений  $\xi(\omega)$  в любое борелевское множество  $B \in \mathfrak{B}(-\infty, +\infty)$ .

## ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

**Определение 6.** Случайную величину называют *дискретной*, если она принимает конечное или счетное множество значений.

Для того, чтобы задать дискретную случайную величину, достаточно задать ее закон распределения.

**Определение 7.** *Законом распределения дискретной случайной величины*  $\xi$  называют набор ее значений  $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$  и вероятностей  $p_1, p_2, \dots, p_k, \dots$ , с которыми эти значения принимаются:

$$p_k = P\{\xi = x_k\}, \quad k = 1, 2, \dots$$

*Замечание.* Поскольку для каждого  $\omega \in \Omega$  случайная величина принимает какое-нибудь из своих значений, то справедливо равенство:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_k + \dots = 1. \quad (3)$$

Для удобства закон распределения дискретной случайной величины часто записывают в виде таблицы:

$\xi:$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_k$	$\dots$
	$p_1$	$p_2$	$\dots$	$p_k$	$\dots$

**Задача 2.** Распределение случайной величины  $\xi$  задано формулами:

$$P\{\xi = k\} = \frac{C}{k(k+1)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Найти: а) постоянную  $C$ ; б)  $P\{\xi \leq 3\}$ ; в)  $P\{4 \leq \xi \leq 15\}$ .

*Решение.* а) Используя формулу (3), получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{C}{k(k+1)} = C \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = C \left( 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \right) = C = 1$$

б) Воспользовавшись значением константы  $C$ , найденным в пункте а), находим

$$\begin{aligned} P\{\xi \leq 3\} &= P\{\xi = 1\} + P\{\xi = 2\} + P\{\xi = 3\} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \\ &= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0,75. \end{aligned}$$

в) Теперь подсчитаем вероятность попадания случайной величины  $\xi$  в промежуток  $4 \leq \xi \leq 15$ :

$$\begin{aligned} P\{4 \leq \xi \leq 15\} &= P\{\xi = 4\} + \dots + P\{\xi = 15\} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{15} - \frac{1}{16} = \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16} = 0,1875. \end{aligned}$$

*Ответ:* а) 1; б) 0,75; в) 0,1875.

## ОСНОВНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Приведем важные и широко распространенные в приложениях законы распределения дискретных случайных величин.

1. *Геометрическое распределение с параметром  $p$  ( $0 < p < 1$ ):*  
случайная величина  $\xi$  принимает значения  $1, 2, 3, \dots$  с вероятностями

$$p_k = P\{\xi = k\} = p \cdot q^{k-1} \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \text{ где } q = 1 - p.$$

2. *Биномиальное распределение с параметром  $p$  ( $0 < p < 1$ ):*  
случайная величина  $\xi$  принимает значения  $0, 1, 2, 3, \dots, n$  с вероятностями

$$p_k = P\{\xi = k\} = C_n^k p^k q^{n-k} \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots, n), \text{ где } q = 1 - p.$$

3. *Распределение Пуассона с параметром  $\lambda$  ( $\lambda > 0$ ):*

случайная величина  $\xi$  принимает значения  $0, 1, 2, 3, \dots$  с вероятностями

$$p_k = P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots). \quad (4)$$

Таблица вероятностей  $p_k$  для ряда значений параметра  $\lambda$  приведена практически в каждом учебнике и задачнике по теории вероятностей. Конечно же, ее можно найти и в Интернете.

Проверим выполнение соотношения (3) для каждого из этих распределений.

1. Для геометрического распределения с параметром  $p$  ( $0 < p < 1$ ) воспользуемся формулой для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_k + \dots = p + p \cdot q + p \cdot q^2 + \dots = \frac{p}{1 - q} = 1.$$

2. Для биномиального распределения с параметром  $p$  ( $0 < p < 1$ ) требуемое соотношение обеспечивает формула бинома Ньютона:

$$p_0 + p_1 + \dots + p_n = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} = (p + q)^n = 1.$$

3. Для распределения Пуассона воспользуемся разложением экспоненты в ряд Тейлора:

$$p_0 + p_1 + \dots + p_k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1.$$

## ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Как мы уже отмечали, из определения случайной величины вытекает, что множество (1) является событием и для него можно найти вероятность. По этой причине с помощью следующего определения с каждой случайной величиной можно связать функцию, называемую функцией распределения рассматриваемой случайной величины.

**Определение 8.** *Функцией распределения случайной величины  $\xi(\omega)$  называют числовую функцию  $F_{\xi}(x)$ , заданную формулой*

$$F_{\xi}(x) = P\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) \leq x\}. \quad (5)$$

Функция распределения случайной величины обладает следующими *свойствами*:

- 1)  $0 \leq F_{\xi}(x) \leq 1$  для всех значений  $x \in R$ ,
- 2) функция  $F_{\xi}(x)$  не убывает для всех  $x \in R$ ,
- 3) функция  $F_{\xi}(x)$  непрерывна справа для всех  $x \in R$ ,
- 4)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_{\xi}(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_{\xi}(x) = 1$ ,
- 5) для любых чисел  $a \in R$  и  $b \in R$  выполнено

$$P\{a < \xi(\omega) \leq b\} = F_{\xi}(b) - F_{\xi}(a)$$

*Замечание.* Функция распределения дискретной случайной величины является ступенчатой функцией.

**Задача 3.** Случайная величина  $\xi$  задана законом распределения

$\xi$ :	-2	0	3
	0,25	0,5	0,25

Построить график функции распределения случайной величины  $\xi$ .

*Решение.* Заметим, что для  $x < -2$

$$F_{\xi}(x) = P\{\xi \leq x\} = 0.$$

Если  $-2 \leq x < 0$ , то

$$F_{\xi}(x) = P\{\xi = -2\} = 0,25.$$

Если же  $0 \leq x < 3$ , то

$$F_{\xi}(x) = P\{\xi = -2\} + P\{\xi = 0\} = 0,75.$$

Наконец, при  $x \geq 3$

$$F_{\xi}(x) = P\{\xi = -2\} + P\{\xi = 0\} + P\{\xi = 3\} = 1.$$

Таким образом,

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -2, \\ 0,25 & \text{при } -2 \leq x < 0, \\ 0,75 & \text{при } 0 \leq x < 3, \\ 1 & \text{при } x \geq 3. \end{cases}$$



График функции распределения  $F_{\xi}(x)$  изображен на рисунке 1:

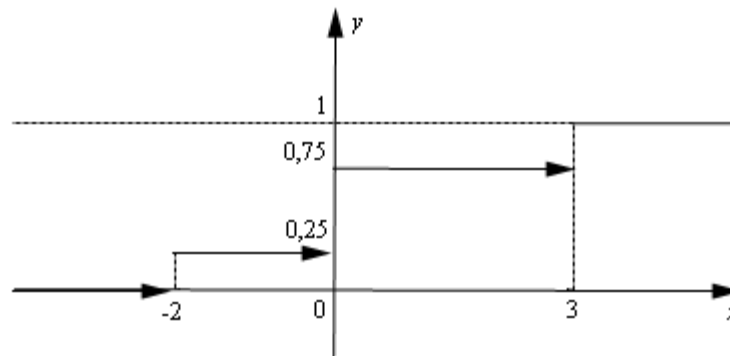


Рис.1

## НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

**Определение 9.** Случайную величину  $\xi$  называют *непрерывной* (или *абсолютно непрерывной*), если существует такая неотрицательная функция  $p_{\xi}(t)$ , что для любого  $x \in R$  выполнено соотношение:

$$F_{\xi}(x) = P\{\xi \leq x\} = \int_{-\infty}^x p_{\xi}(t) dt$$

Функцию  $p_{\xi}(t)$  называют *плотностью распределения случайной величины  $\xi$* .

В терминах борелевских множеств определение непрерывной случайной величины выглядит следующим образом.

**Определение 10.** Случайную величину  $\xi$  называют *непрерывной* (или *абсолютно непрерывной*), если существует такая неотрицательная функция  $p_{\xi}(t)$ , что для любого борелевского множества  $B \in \mathfrak{B}(-\infty, +\infty)$  выполнено соотношение:

$$P(\xi \in B) = \int_B p_{\xi}(t) dt \quad (6)$$

Далее рассматриваются только такие непрерывные случайные величины, плотности распределения которых являются функциями, непрерывными на множестве  $(-\infty, +\infty)$  за исключением, быть может, конечного числа точек.

Кроме того, рассматриваются только такие борелевские множества  $B \in \mathfrak{B}(-\infty, +\infty)$ , для которых интеграл, стоящий в правой части формулы (6), существует и совпадает с

интегралом Римана. Этого достаточно для решения всех задач, рассматриваемых в курсе теории вероятностей МФТИ (ГУ) для студентов 2 курса.

Плотность распределения случайной величины обладает следующими *свойствами*:

1)  $p_{\xi}(x) \geq 0$  для всех значений  $x \in R$ ,

2)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi}(x) dx = 1$$

3)  $F'_{\xi}(x) = p_{\xi}(x)$  для всех  $x \in R$ , в которых плотность  $p_{\xi}(x)$  непрерывна,

4) для любых чисел  $a \in R$  и  $b \in R$  выполнены равенства:

$$\begin{aligned} P\{a \leq \xi(\omega) < b\} &= P\{a < \xi(\omega) < b\} = P\{a \leq \xi(\omega) < b\} = \\ &= P\{a \leq \xi(\omega) \leq b\} = \int_a^b p_{\xi}(x) dx \end{aligned}$$

*Замечание.* Свойство 4) является важным частным случаем определения 10 для плотности распределения непрерывной случайной величины.

Непрерывную случайную величину можно задать, указав её функцию распределения или её плотность распределения.

**Задача 4.** Плотность распределения случайной величины  $\xi$  задана формулой:

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < x \leq 1, \\ a(x-1) & \text{при } 1 < x \leq 3, \\ 0 & \text{при } 3 < x < +\infty. \end{cases}$$

Найти значение параметра  $a$ .

*Решение.* Воспользовавшись свойством 2) для плотности распределения случайной величины, получаем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi}(x) dx = \int_1^3 a(x-1) dx = a \left( \frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_1^3 = 2a = 1$$

Следовательно,  $a = 0,5$ .

*Ответ:* 0,5.

**Задача 5.** Плотность распределения случайной величины  $\xi$  задана формулой:

$$p_{\xi}(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

Найти плотность распределения случайной величины  $\eta = \frac{1}{\xi}$ .

*Решение.* Выясним, как связаны между собой функции распределения случайных величин  $\xi$  и  $\eta$ . С этой целью для каждого значения  $x \in R$  найдем все значения  $t$ , для которых выполнено неравенство

$$\frac{1}{t} \leq x$$

В результате получаем:

1.  $t \in (-\infty, 0) \cup \left[\frac{1}{x}, +\infty\right)$  в случае, когда  $x > 0$ ;
2.  $t \in (-\infty, 0)$  в случае, когда  $x = 0$ ;
3.  $t \in \left[\frac{1}{x}, 0\right)$  в случае, когда  $x < 0$ .

Далее заметим, что

$$F_{\eta}(x) = P\{\eta \leq x\} = P\left\{\frac{1}{\xi} \leq x\right\}. \quad (7)$$

Из формулы (7) с учетом свойств 4) и 5) функции распределения случайной величины находим:

1.  $F_{\eta}(x) = P\left\{\xi \in (-\infty, 0) \cup \left[\frac{1}{x}, +\infty\right)\right\} = F_{\xi}(0) + 1 - F_{\xi}\left(\frac{1}{x}\right)$  для  $x > 0$ ;
2.  $F_{\eta}(x) = P\{\xi \in (-\infty, 0)\} = F_{\xi}(0)$  для  $x = 0$ ;
3.  $F_{\eta}(x) = P\left\{\xi \in \left[\frac{1}{x}, 0\right)\right\} = F_{\xi}(0) - F_{\xi}\left(\frac{1}{x}\right)$  для  $x < 0$ .

Отсюда, используя свойство 3) плотности распределения случайной величины, получаем:

$$p_{\eta}(x) = F_{\eta}'(x) = -\left[F_{\xi}\left(\frac{1}{x}\right)\right]' = -p_{\xi}\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

*Ответ:*  $p_{\eta}(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ .

## ОСНОВНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

В приложениях часто встречаются следующие законы распределения непрерывных случайных величин:

1. *Равномерное распределение на отрезке  $[a, b]$ .*

Плотность распределения

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < x < a, \\ \frac{1}{b-a} & \text{при } a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{при } b < x < +\infty. \end{cases}$$

Функция распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < x < a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{при } a \leq x < b, \\ 1 & \text{при } b \leq x < +\infty. \end{cases}$$

2. *Показательное распределение с параметром  $\lambda$  ( $\lambda > 0$ ).*

Плотность распределения

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } 0 \leq x < +\infty. \end{cases} \quad (8)$$

Функция распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{при } 0 \leq x < +\infty. \end{cases} \quad (9)$$

3. *Нормальное (Гауссовское) распределение с параметрами  $a, \sigma$  ( $\sigma > 0$ ).*

Плотность распределения

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Функция распределения

$$F(x) = 0,5 + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right),$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

– функция Лапласа. Таблица значений функции Лапласа для некоторых значений  $x$  приведена практически в каждом учебнике и задачнике по теории вероятностей. Ее можно найти и в Интернете.

Для случайных величин  $\xi$ , распределенных по нормальному закону, часто используют обозначение:  $\xi \sim N(a, \sigma)$ .

Проверим выполнение свойств 2) для плотностей каждого из перечисленных распределений.

1. Для равномерного распределения на отрезке  $[a, b]$  имеем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(t) dt = \int_a^b \frac{1}{(b-a)} dt = 1$$

2. Для показательного распределения с параметром  $\lambda$  ( $\lambda > 0$ ) интегрирование плотности  $p(t)$  по всей числовой оси дает:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(t) dt = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = \lambda \left. \frac{e^{-\lambda t}}{(-\lambda)} \right|_0^{+\infty} = 1$$

4. Для нормального распределения с параметрами  $a, \sigma$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt \quad (10)$$

При этом замена переменной

$$z = \frac{t-a}{\sigma\sqrt{2}}; \quad dz = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} dt;$$

приводит интеграл, стоящий в правой части формулы (10), к интегралу Пуассона, с помощью которого получаем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(t) dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} = 1$$

**Задача 6.** Известно, что случайная величина  $\xi$  имеет строго возрастающую непрерывную функцию распределения  $F_{\xi}(x)$ . Найти распределение случайной величины  $\eta = F_{\xi}(\xi)$ .

*Решение.* Рассмотрим функцию распределения случайной величины  $\eta$

$$F_{\eta}(x) = P\{\eta \leq x\} = P\{F_{\xi}(\xi) \leq x\}. \quad (11)$$

Поскольку функция  $F_{\xi}(t)$  строго возрастает, непрерывна на  $(-\infty, +\infty)$ , причем

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} F_{\xi}(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} F_{\xi}(t) = 1,$$

то у нее существует обратная функция  $F_{\xi}^{-1}(x)$ , определенная на  $(0,1)$ .

Поэтому из формулы (11) получаем:

$$1. F_{\eta}(x) = 0 \quad \text{для } x \leq 0,$$

$$2. F_{\eta}(x) = 1 \quad \text{для } x \geq 1.$$

В случае, когда  $0 < x < 1$ , выполнены равенства:

$$F_{\eta}(x) = P\{F_{\xi}(\xi) \leq x\} = P\{\xi \leq F_{\xi}^{-1}(x)\} = F_{\xi}(F_{\xi}^{-1}(x)) = x.$$

Таким образом, функция распределения случайной величины  $\eta$  имеет вид

$$F_{\eta}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < x < 0, \\ x & \text{при } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{при } 1 \leq x < +\infty. \end{cases}$$

и является функцией распределения случайной величины, распределенной равномерно на отрезке  $[0,1]$ .

*Ответ:* случайная величина  $\eta$  распределена равномерно на отрезке  $[0,1]$ .