МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Кафедра высшей математики

СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ И ИХ ВЕРОЯТНОСТИ.
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Учебно-методическое пособие

Составитель С. С. Самарова

МОСКВА
МФТИ
2016

УДК 519.21

Рецензент

кандидат физико-математических наук, доцент *А. Ю. Петрович*

Случайные события и их вероятности. Примеры решения задач : учебно-методическое пособие / сост. С. С. Самарова. – М.: МФТИ, 2016. – 40 с.

В учебно-методическом пособии изложены справочные сведения и приведены решения типовых задач по темам: «Комбинаторика», «Вероятностные пространства», «Классическое определение вероятности», «Геометрическое определение вероятности», «Формула полной вероятности. Формула Байеса».

Предназначено для студентов 1 и 2 курсов МФТИ (ГУ), изучающих дисциплину «Теория вероятностей», а также для студентов 4 курса МФТИ (ГУ), изучающих дисциплину «Основы теории вероятностей».

Учебное издание

СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ И ИХ ВЕРОЯТНОСТИ.
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Учебно-методическое пособие

Составитель **Самарова Светлана Сергеевна**

Редактор *Л.В. Себова.* Корректор *В.А. Дружинина*
Подписано в печать 24.03.2016. Формат 60 × 84 $^{1}/_{16}$. Усл. печ. л. 2,5
Уч.-изд. л. 2,3. Тираж 200 экз. Заказ № 118
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-58-22, e-mail: rio@mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408 84 30, e-mail: polygraph@mipt.ru

© Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)», 2016
© Самарова С.С., составление, 2016

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Теория вероятностей – это раздел математики, посвященный изучению математических моделей случайных экспериментов, то есть таких экспериментов, результаты которых заранее неизвестны.

Общий подход к построению математических моделей случайных экспериментов был введен А.Н. Колмогоровым.

Основное внимание в пособии уделяется решению задач. Необходимый теоретический материал приводится в справочной форме. Как показывает опыт, решение задач по теории вероятностей вызывает определенные трудности у студентов. Это связано с тем, что при решении задач по теории вероятностей необходимо сначала построить подходящую математическую модель для ситуации, приведенной в условии задачи. Описание возможных подходов к формализации типовых задач и применение подходящего математического аппарата для их решения – одна из основных целей данного учебно-методического пособия.

Рассматриваемые в пособии темы относятся к материалу, входящему в первое задание по дисциплинам «Теория вероятностей» и «Основы теории вероятностей».

Автор выражает глубокую благодарность доцентам кафедры высшей математики МФТИ (ГУ) А.Ю. Петровичу и А.В. Булинскому за ряд полезных замечаний.

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

При решении ряда задач, возникающих в теории вероятностей, требуется определить число различных способов выбора в соответствии с теми или иными условиями нескольких элементов из заданного конечного множества. Такие расчеты изучаются в комбинаторике.

Важнейшими понятиями комбинаторики являются перестановки, размещения и сочетания.

ПЕРЕСТАНОВКИ

Определение 1. Пусть n – натуральное число. Рассмотрим произвольное множество, содержащее n различных элементов. Говорят, что на этом множестве задано упорядочение (отношение порядка), если все его элементы пронумерованы числами $1, 2, 3, \dots, n$.

Множество с заданным упорядочением называют *упорядоченным множеством*.

Определение 2. Рассмотрим множество, содержащее n различных элементов. *Перестановкой из n элементов* называют любое упорядочение этого множества.

Число перестановок из n элементов обозначают символом P_n и вычисляют по формуле

$$P_n = n!. \tag{1}$$

Проиллюстрируем справедливость этой формулы на примере решения следующей задачи.

Задача 1. 6 карточек пронумерованы числами 1, 2, 3, 4, 5, 6. Карточки наугад выкладываются в ряд. Сколько при этом можно получить различных шестизначных чисел?

Решение. Сначала слева направо пронумеруем места в ряду, куда будем выкладывать карточки: первое место, второе, третье, четвертое, пятое, шестое. Таким образом, раскладывая карточки ряд, мы получаем перестановку множества из 6 карточек. Подсчитаем число различных перестановок множества из 6 элементов.

На первое место можно положить любую из 6 карточек. В каждом из этих 6 случаев на второе место можно положить одну из оставшихся 5 карточек. Таким образом, существует

$$6\cdot 5 = 30$$

различных способов, чтобы положить карточки на первое и второе места. В каждом из этих 30 случаев на третье место можно положить одну из оставшихся 4 карточек. Следовательно, существует

$$6\cdot 5\cdot 4 = 120$$

различных способов, чтобы положить карточки на первое, второе и третье места. В каждом из этих 120 случаев на четвертое место можно положить одну из оставшихся 3 карточек. Отсюда вытекает, что существует

$$6\cdot 5\cdot 4\cdot 3 = 360$$

способов, чтобы положить карточки на первое, второе, третье и четвертое места. В каждом из этих 360 случаев на пятое место можно положить одну из оставшихся 2 карточек. Следовательно, существует

$$6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2 = 720$$

способов, чтобы положить карточки на первое, второе, третье, четвертое и пятое места.

После этого у нас остается одна единственная карточка, которую мы и кладем на оставшееся пустым шестое место. Таким образом, при выкладывании карточек можно получить

$$6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 6! = 720$$

различных шестизначных чисел.

Ответ: 720.

В задаче 1 мы рассмотрели 6 пронумерованных карточек и установили, что количество способов выкладывания этих карточек в ряд равно

$$P_6 = 6! = 720.$$

Если бы у нас было n пронумерованных карточек, то количество способов выкладывания их в ряд равнялось бы $n!$.

Введенные в данном разделе перестановки называют также перестановками без повторений.

РАЗМЕЩЕНИЯ

Определение 3. Рассмотрим множество, содержащее n различных элементов, и все его упорядоченные подмножества, содержащие k элементов (см. определение 1). Каждое из этих подмножеств называют *размещением из n элементов по k элементов*.

Если обозначить символом A_n^k число размещений из n элементов по k элементов, то будет справедлива формула

$$A_n^k = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}. \qquad (2)$$

Замечание. Размещение из n элементов по n элементов является перестановкой из n элементов, таким образом:

$$A_n^n = P_n.$$

Проиллюстрируем формулу (2) на примере решения следующей задачи.

Задача 2. Из 9 карточек, пронумерованных числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, четыре карточки выбираются наугад и выкладываются в ряд. Сколько при этом можно получить различных четырехзначных чисел?

Решение. Пронумеруем слева направо места в ряду, куда будем выкладывать карточки: первое место, второе, третье, четвертое.

В этой задаче множеством из n элементов является исходный набор из 9 пронумерованных карточек, а упорядоченным подмножеством из k элементов – 4 карточки, выложенные в ряд. Подсчитаем, чему равно число размещений из 9 элементов по 4 элемента, т.е. число A_9^4.

На первое место можно положить любую из 9 карточек. В каждом из этих 9 случаев на второе место можно положить одну из оставшихся 8 карточек. Таким образом, существует

$$9\cdot 8 = 72$$

способа, чтобы положить карточки на первое и второе места. В каждом из этих 72 случаев на третье место можно положить одну из оставшихся 7 карточек. Следовательно, существует

$$9\cdot 8\cdot 7 = 504$$

способа, чтобы положить карточки на первое, второе и третье места. В каждом из этих 504 способов на четвертое место можно положить одну из оставшихся 6 карточек. Отсюда вытекает, что существует

$$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$$

различных способа, чтобы выложить в ряд 4 карточки из набора, состоящего из 9 пронумерованных карточек. Таким образом, при выкладывании карточек можно получить

$$A_9^4 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$$

различных четырехзначных числа.

Ответ: 3024.

Введенные в данном разделе размещения также называют размещениями без повторений.

СОЧЕТАНИЯ

Определение 4. Рассмотрим множество, состоящее из n различных элементов. Каждое его подмножество, содержащее k элементов, называют *сочетанием из* n *элементов по* k *элементов*.

Важно отметить, что, в отличие от размещений, рассмотренные в определении сочетания подмножества, содержащие k элементов, не являются упорядоченными.

Для того чтобы более наглядно прояснить разницу между размещениями и сочетаниями, рассмотрим следующие примеры 1 и 2.

Пример 1. Преподаватель входит в аудиторию, где его ждут 25 студентов, и сообщает, что трем студентам, которых он назовет, он ставит «зачет». В этом случае три выбранных студента представляют собой сочетание из 25 студентов по 3. Порядок, в котором преподаватель назовет три фамилии, не имеет значения, важно лишь, какие именно три человека были выбраны.

Пример 2. Преподаватель входит в аудиторию, где его ждут 25 студентов, и сообщает, что первому из трех студентов, которых он назовет, он ставит оценку отлично (10), второму – хорошо (7), а третьему – удовлетворительно (4). В этом случае три выбранных студента представляют собой размещение из 25 студентов по 3. Порядок, в котором преподаватель назовет три фамилии, важен, поскольку от этого зависит оценка, которую получит конкретный студент.

Другими словами, если происходит выбор (без возвращения) k элементов из множества, содержащего n различных элементов, то в случае, когда порядок выбора элементов имеет значение, речь идет о размещениях. Если же порядок выбора элементов не имеет значения, а имеет значение лишь то, какие именно элементы были выбраны, то речь идет о сочетаниях.

Число сочетаний из n элементов по k элементов обозначают символом C_n^k.

Нетрудно заметить, что размещения, которые различаются лишь порядком входящих в них элементов, являются одним и тем же сочетанием. Количество таких размещений для одного и того же сочетания из n элементов по k элементов равно $k!$.

Таким образом, из формул (1) и (2) получаем

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \qquad (3)$$

Задача 3. Доказать следующие свойства чисел сочетаний:

1) $C_n^k = C_n^{n-k}$,

2) $C_n^k = C_{n-1}^{n-k} + C_{n-1}^k$,

3) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$,

4) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$,

5) $\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + \ldots + \left(C_n^n\right)^n = C_{2n}^n$.

Доказательство. Свойство 1 вытекает непосредственно из формулы (3), которая не меняется при замене k на $n-k$.

Докажем свойство 2. Для этого снова воспользуемся формулой (3):

$$C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!}{k!(n-k)!}(k+n-k) = \frac{(n)!}{k!(n-k)!} = C_n^k,$$

что и требовалось доказать.

Свойства 3, 4 и 5 будем доказывать с помощью формулы бинома Ньютона:

$$(x+y)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} y + C_n^2 x^{n-2} y^2 + \ldots + C_n^k x^{n-k} y^k + \ldots + C_n^n y^n, \qquad (4)$$

где биномиальные коэффициенты C_n^k и являются числами сочетаний из n элементов по k элементов.

Для доказательства свойства 3 подставим в формулу бинома Ньютона (4):

$$x = 1, \quad y = 1.$$

Если же в формуле (4) взять

$$x = 1, \quad y = -1,$$

то мы получим свойство 4.

Перейдем теперь к доказательству свойства 5. Для этого положим в формуле бинома Ньютона (4) $y = 1$:

$$(x+1)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} + \ldots C_n^k x^{n-k} + \ldots + C_n^n. \qquad (5)$$

Воспользовавшись уже доказанным свойством чисел сочетаний

$$C_n^k = C_n^{n-k},$$

перепишем формулу (5) в виде

$$(x+1)^n = C_n^n x^n + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^{n-2} x^{n-2} + \ldots + C_n^{n-k} x^{n-k} + \ldots + C_n^0. \qquad (6)$$

Если теперь перемножить формулы (5) и (6), то мы получим формулу

$$\begin{aligned}(x+1)^{2n} &= \left(C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + \ldots + C_n^k x^{n-k} + \ldots + C_n^n\right)\times \\ &\times\left(C_n^n x^n + C_n^{n-1} x^{n-1} + \ldots + C_n^{n-k} x^{n-k} + \ldots + C_n^0\right).\end{aligned} \qquad (7)$$

Применим к левой части формулы (7) формулу бинома Ньютона, а в правой части формулы (7) раскроем скобки и приведем подобные члены. Приравнивая после этого коэффициенты при x^n в левой и в правой частях, мы получим следующее равенство:

$$\begin{aligned}C_{2n}^n &= C_n^0 C_n^n + C_n^1 C_n^{n-1} + \ldots + C_n^k C_n^{n-k} + \ldots C_n^n C_n^0 = \\ &= \left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \ldots + \left(C_n^k\right)^2 + \ldots + \left(C_n^n\right)^2,\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Рассмотрим задачу на разбиение множества, состоящего из различных элементов, на несколько разных частей.

Задача 4. Для изучения иностранных языков группу из 25 студентов необходимо разделить на 3 подгруппы. Подгруппа, изучающая английский язык, должна состоять из 10 человек. Подгруппа, изучающая немецкий язык, должна состоять из 8 человек. Остальные студенты должны будут изучать французский язык. Сколько существует различных способов разделить группу студентов на подгруппы?

Решение. Выберем сначала студентов, которые будут изучать английский язык. Это можно сделать C_{25}^{10} различными способами. В каждом из этих случаев выберем из оставшихся 15 студентов 8 студентов для изучения немецкого языка. Таким образом, подгруппы по английскому и немецкому языкам можно сформировать

$$C_{25}^{10} \cdot C_{15}^{8}$$

различными способами.

В каждом из этих случаев после того, как подгруппы по английскому и немецкому языкам сформированы, оставшиеся 7 студентов будут составлять подгруппу по французскому языку.

Воспользовавшись формулой для числа сочетаний, получаем

$$C_{25}^{10} \cdot C_{15}^{8} = \frac{25!}{10! \cdot 8! \cdot 7!}.$$

Ответ: $\dfrac{25!}{10! \cdot 8! \cdot 7!}$.

Рассмотрим теперь задачу на разбиение множества, состоящего из различных элементов, на несколько равных частей.

Задача 5. Для изучения английского языка группу из 24 студентов необходимо разделить на 3 подгруппы по 8 человек. Сколько существует различных способов разделить группу студентов на подгруппы?

Решение. Как и в предыдущей задаче, выберем сначала студентов, которые будут входить в подгруппу №1 из 8 человек. Это можно сделать C_{24}^{8} способами. В каждом из этих случаев выберем из оставшихся 16 студентов 8 студентов, которые войдут в подгруппу №2. Таким образом, подгруппы №1 и №2 можно сформировать

$$C_{24}^{8} \cdot C_{16}^{8}$$

способами.

В каждом из этих случаев оставшиеся 8 студентов будут составлять подгруппу №3.

Однако необходимо отметить, что, в отличие от предыдущей задачи, здесь подгруппы состоят из одного и того же количества студентов, и, если поменять местами номера подгрупп, то разбиение всей группы на 3 части от этого не изменится. Поскольку одни и те же 3 подгруппы можно пронумеровать 3! способами, то общее число различных способов разбить группу из 24 студентов на 3 равных части равно

$$\frac{C_{24}^{8} \cdot C_{16}^{8}}{3!} = \frac{24!}{8! \cdot 8! \cdot 8! \cdot 3!} = \frac{24!}{(8!)^{3} \cdot 3!}.$$

Ответ: $\dfrac{24!}{(8!)^{3} \cdot 3!}$.

Рассмотрим теперь задачу на разбиение множества, состоящего из одинаковых элементов, на несколько частей.

Задача 6. Для украшения концертного зала купили 30 одинаковых воздушных шаров. Сколько существует способов распределить эти шары по стенам концертного зала так, чтобы на стене со сценой не было ни одного шара, а на каждой из трех остальных стен висело не менее 6 шаров?

Решение. Поскольку на стене со сценой шаров быть не должно, то нам нужно распределить 30 шаров только на трех стенах.

Так как на каждой из этих стен должно быть не менее 6 шаров, то сразу повесим по 6 шаров на 3 стены и займемся распределением оставшихся 12 шаров.

С этой целью выложим 12 шаров в ряд и разделим их на 3 части двумя перегородками. Шары, лежащие слева от первой перегородки, будут повешены на левую стену, шары между первой и второй перегородками – на стену, расположенную напротив сцены, а шары, лежащие справа от второй перегородки, – на правую стену. Например, распределение шаров по стенам может быть таким:

О О О | О О | О О О О О О О

Некоторые из частей, на которые перегородки делят 12 шаров, могут быть и пустыми, т.е. не содержать ни одного шара. Например,

О О О О О О О О | | О О О О

Таким образом, у нас имеется 14 мест (12 + 2), и нам нужно выбрать из них 2 места, на которые будут поставлены перегородки. В соответствии с определением числа сочетаний эти перегородки можно поставить

$$C_{14}^2 = \frac{14 \cdot 13}{2} = 91$$

способом.

Ответ: 91 способ.

ПОНЯТИЕ ВЕРОЯТНОСТНОГО ПРОСТРАНСТВА

Общий подход к построению математических моделей случайных экспериментов был введен А.Н. Колмогоровым. В качестве математической модели случайного эксперимента А.Н. Колмогоров предложил использовать вероятностное пространство, представляющее собой набор из трех объектов

$$(\Omega, F, P),$$

к описанию которых мы сейчас и переходим.

МНОЖЕСТВО ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ИСХОДОВ Ω

Буквой Ω в вероятностном пространстве (Ω, *F*, *P*) обозначено множество всех возможных результатов случайного эксперимента. Это множество называют множеством элементарных исходов, а его элементы $\omega \in \Omega$ называют элементарными исходами.

АЛГЕБРА (σ-АЛГЕБРА) СОБЫТИЙ *F*

Вторым объектом *F* вероятностного пространства (Ω, *F*, *P*) является набор подмножеств множества элементарных исходов Ω, обладающий рядом свойств. Подмножества, входящие в *F*, называют событиями. Для каждого из событий (и только для них!) вводится понятие вероятности *P*. Точное определение *F* будет приведено чуть позже.

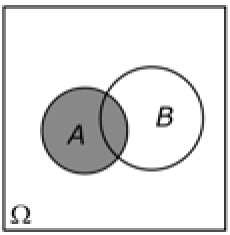
Набор событий *F* выбирается таким образом, чтобы в результате приведенных ниже операций над событиями из *F* также получались события (т.е. подмножества Ω, входящие в *F*). Другими словами, *F* должно быть замкнуто относительно этих операций. Кроме того, само множество Ω должно также входить в *F*.

Опишем сначала операции, которые можно совершать над событиями. Рисунки, наглядно иллюстрирующие операции над событиями, называют диаграммами Эйлера–Венна.

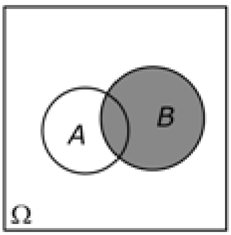
1. Произведение (пересечение) двух событий

Определение 5. *Произведением* (*пересечением*) *двух событий A и B* называют такое событие, которое состоит из всех элементарных исходов, входящих как в событие *A*, так и в событие *B* (рис. 1).

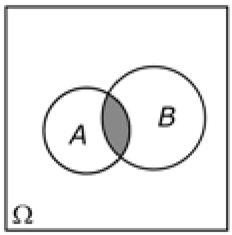
Операцию произведения (пересечения) двух событий *A* и *B* обозначают *AB*, или $A \cdot B$, или $A \cap B$.



Событие *A*



Событие *B*



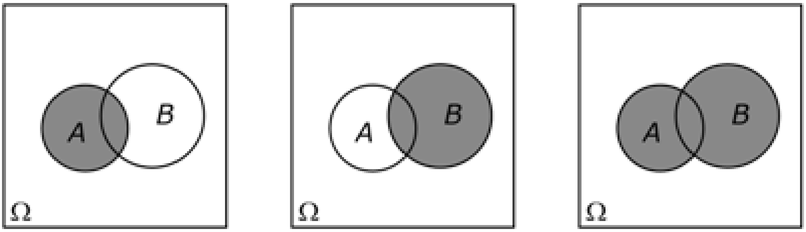
Событие *AB*

Рис. 1

2. Сумма (объединение) двух событий

Определение 6. *Суммой* (*объединением*) *двух событий A и B* называют такое событие, которое состоит из элементарных исходов, входящих в событие A, и элементарных исходов, входящих в событие B (рис. 2).

Операцию суммы (объединения) двух событий A и B обозначают $A \cup B$.



Событие A Событие B Событие $A \cup B$

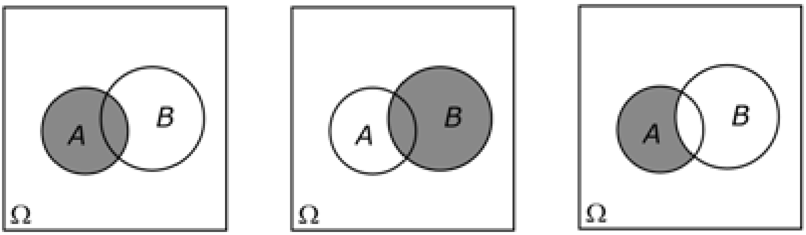
Рис. 2

В случае, когда $AB = \varnothing$, то $A \cup B$ обозначают также $A + B$.

3. Разность двух событий

Определение 7. *Разностью событий A и B* называют событие, состоящее из тех элементарных исходов события A, которые не входят в событие B (рис. 3).

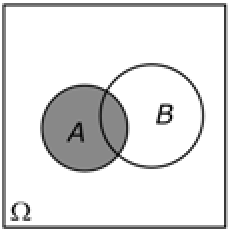
Операцию разности двух событий A и B обозначают $A \setminus B$.



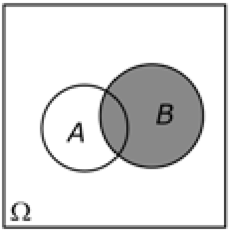
Событие A Событие B Событие $A \setminus B$

Рис. 3

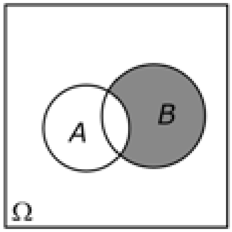
Замечание. Результат выполнения операции пересечения событий AB и результат выполнения операции объединения событий $A \cup B$ не изменятся, если поменять местами события A и B.



Событие A



Событие B



Событие $B \setminus A$

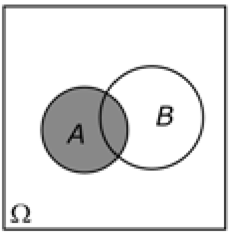
Рис. 4

Операция взятия разности событий $A \setminus B$ зависит от того, какое из событий записано слева, а какое – справа. В отличие от разности событий $A \setminus B$, результат которой изображен на рис. 3, разностью событий B и A является событие $B \setminus A$, изображенное на рис. 4.

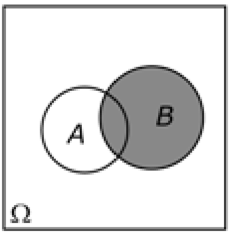
4. Симметрическая разность двух событий

Определение 8. *Симметрической разностью событий A и B* называют событие, состоящее из тех элементарных исходов события A, которые не входят в событие B, а также из тех элементарных исходов события B, которые не входят в событие A (рис. 5).

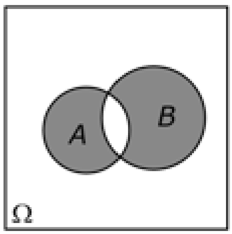
Операцию симметрической разности двух событий A и B обозначают $A \vartriangle B$.



Событие A



Событие B



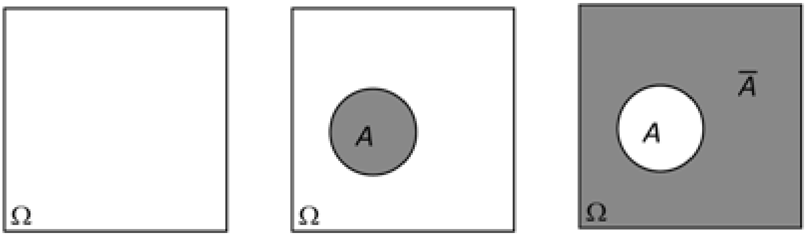
Событие $A \vartriangle B$

Рис. 5

5. Переход к противоположному событию

Определение 9. *Противоположным событием* (*дополнением*) *к событию* A называют событие, состоящее из тех элементарных исходов множества всех элементарных исходов Ω, которые не входят в событие A (рис. 6).

Событие, противоположное к событию A, обозначают $\overline{A}$ или A^C.



Событие Ω Событие A Событие $\overline{A}$

Рис. 6

Справедлива формула $\overline{A} = \Omega \setminus A$.

Определение 10. Набор подмножеств множества элементарных исходов Ω называют *алгеброй событий F*, если выполнены следующие свойства:

1) $\Omega \in F$;
2) если $A \in F$ и $B \in F$, то $AB \in F$;
3) если $A \in F$ и $B \in F$, то $A \cup B \in F$;
4) если $A \in F$, то $\overline{A} \in F$.

Приведенные в определении 10 четыре свойства, описывающие алгебру событий, являются наиболее наглядными. На самом деле для того, чтобы набор F был алгеброй событий, достаточно потребовать выполнения только одного из свойств: 2 или 3, поскольку, как показано в приведенном ниже решении задачи 8, справедливы формулы:

$$A \cup B = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}} \quad \text{и} \qquad A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}.$$

Из свойства 4 вытекает, что $\varnothing = \overline{\Omega} \in F$.

В случае, когда множество элементарных исходов Ω является конечным, при определении вероятностного пространства (Ω, F, P) требуют, чтобы набор F являлся алгеброй событий. При этом довольно часто в качестве алгебры событий F берут множество всех подмножеств Ω. Однако в более сложных случаях, например, когда Ω является несчетным множеством, на алгебру событий F накладываются более жесткие требования: алгебра событий F должна быть σ-алгеброй.

Определение 11. Набор подмножеств множества элементарных исходов Ω называют σ-*алгеброй событий F*, если выполнены следующие свойства:

1) F является алгеброй событий;
2) если $A_1 \in F$, $A_2 \in F$, ..., $A_n \in F$, ..., то $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in F$;

3) если $A_1 \in F$, $A_2 \in F$, ..., $A_n \in F$, ..., то $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in F$.

Для того чтобы набор F был σ-алгеброй событий, достаточно потребовать выполнения только одного из свойств: 2 или 3.

ВЕРОЯТНОСТЬ *P*

Вероятность P – это числовая функция, определенная на σ-алгебре событий F, для которой выполнены следующие свойства:

1) для любого события $A \in F$ справедливо неравенство $0 \le P(A) \le 1$;
2) $P(\Omega) = 1$;
3) для любых событий $A_1 \in F$, $A_2 \in F$, ..., $A_n \in F$, ..., таких, что $A_i A_j = \varnothing$ при всех $i \ne j$, справедливо равенство

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_i + \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_i) + \ldots$$

Свойство 3 называют свойством σ-аддитивности вероятности P.

Следствие. Для вероятности противоположного события $\overline{A}$ справедлива формула

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Следует отметить, что вероятность не должна быть определена для каждого элементарного исхода $\omega \in \Omega$ и даже не должна быть определена для каждого подмножества Ω. Вероятность можно вычислить только для тех подмножеств Ω, которые входят в σ-алгебру событий F.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 7. Пусть A, B и C – произвольные события. Записать при помощи операций над событиями A, B, C следующие события.

1. Произошли все три события A, B, C.
2. Не произошло ни одного из событий A, B, C.
3. Произошло по крайней мере одно из событий A, B, C.
4. Произошло только одно из событий A, B, C.

Решение

1. Событие, описанное в пункте 1, состоит из всех элементарных исходов, которые входят в каждое из событий A, B и C. Поэтому ответом в пункте 1 будет событие ABC.
2. Поскольку для любого события D событие $\overline{D}$ состоит в том, что событие D не произошло, то ответом в пункте 2 будет событие $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$.

3. В соответствии с определением операции объединения событий ответом в пункте 3 будет событие $A \cup B \cup C$.
4. Событие, описанное в пункте 4, состоит из трех непересекающихся событий:
   - событие $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$, означающее, что событие A произошло, а события B и C не произошли;
   - событие $\overline{A} \cap B \cap \overline{C}$, означающее, что событие B произошло, а события A и C не произошли;
   - событие $\overline{A} \cap \overline{B} \cap C$, означающее, что событие C произошло, а события A и B не произошли.

Поэтому ответом в пункте 4 будет событие

$$A \cap \overline{B} \cap \overline{C} + \overline{A} \cap B \cap \overline{C} + \overline{A} \cap \overline{B} \cap C.$$

Задача 8. Для произвольных событий A, B и C доказать справедливость равенств:

1. $\overline{\overline{A}} = A$;
2. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
3. $A \cup B = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$;
4. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;
5. $A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$;
6. $(A \cup B) \cap C = AC \cup BC$;
7. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Решение

1. Поскольку $\Omega = A + \overline{A}$, где $A \cap \overline{A} = \varnothing$, то дополнением к событию $\overline{A}$ будет событие A.

2. Докажем сначала, что $\left(\overline{A \cap B}\right) \subset \left(\overline{A} \cup \overline{B}\right)$. Действительно, если $\omega \in \overline{A \cap B}$, то $\omega \notin A \cap B$. Возможны два случая:

- $\omega \in A$, но тогда $\omega \notin B$, поскольку $\omega \notin A \cap B$. Значит, $\omega \in \overline{B} \quad \Rightarrow \quad \omega \in \overline{A} \cup \overline{B}$.
- $\omega \notin A$, но тогда $\omega \in \overline{A} \quad \Rightarrow \quad \omega \in \overline{A} \cup \overline{B}$.

Таким образом, $\left(\overline{A \cap B}\right) \subset \left(\overline{A} \cup \overline{B}\right)$.

Теперь докажем, что $\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)\subset\left(\overline{A\cap B}\right)$. Действительно, пусть $\omega\in\overline{A}\cup\overline{B}$. Тогда возможны два случая:

- $\omega\in\overline{A}$, но тогда $\omega\notin A\cap B$. Значит, $\omega\in\overline{A\cap B}$;
- $\omega\notin\overline{A} \quad\Rightarrow\quad \omega\in\overline{B}$, но тогда $\omega\notin A\cap B$. Значит, $\omega\in\overline{A\cap B}$.

Равенство 2 доказано.

3. Для доказательства равенства 3 воспользуемся уже доказанным соотношением 2, в которое вместо событий A и B подставим события $\overline{A}$ и $\overline{B}$ соответственно:

$$\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}=\overline{\overline{A}}\cup\overline{\overline{B}}.$$

Отсюда с помощью равенства 1 получаем

$$\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}=A\cup B,$$

что и требовалось доказать.

4. Равенство 4 получается из равенства 3 с помощью перехода к противоположным событиям в обеих частях равенства.

5. Равенство 5 получается из равенства 2 с помощью перехода к противоположным событиям в обеих частях равенства.

6. Докажем сначала, что $\left(\left(A\cup B\right)\cap C\right)\subset\left(AC\cup BC\right)$. Действительно, пусть $\omega\in\left(A\cup B\right)\cap C$. Тогда $\omega\in A\cup B$ и $\omega\in C$ одновременно. Рассмотрим два случая:

- $\omega\in A$, но тогда $\omega\in AC \quad\Rightarrow\quad \omega\in AC\cup BC$;
- $\omega\notin A$, но тогда $\omega\in B \quad\Rightarrow\quad \omega\in BC \quad\Rightarrow\quad \omega\in AC\cup BC$.

Таким образом, $\left(\left(A\cup B\right)\cap C\right)\subset\left(AC\cup BC\right)$.

Теперь докажем, что $\left(AC\cup BC\right)\subset\left(\left(A\cup B\right)\cap C\right)$. Действительно, пусть $\omega\in AC\cup BC$. Тогда возможны два случая:

- $\omega\in AC$, но тогда $\omega\in A \quad\Rightarrow\quad \omega\in A\cup B$. Кроме того, $\omega\in C$. Значит, $\omega\in\left(A\cup B\right)\cap C$.
- $\omega\notin AC \quad\Rightarrow\quad \omega\in BC$, но тогда $\omega\in B \quad\Rightarrow\quad \omega\in A\cup B$. Кроме того, $\omega\in C$. Значит, $\omega\in\left(A\cup B\right)\cap C$.

Равенство 6 доказано.

7. Для доказательства равенства 7 подставим в соотношение 2 вместо событий A, B и C подставим события $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ соответственно:

$$\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)\cap\overline{C}=\left(\overline{A}\cap\overline{C}\right)\cup\left(\overline{B}\cap\overline{C}\right).$$

Теперь перейдем к противоположным событиям в обеих частях равенства:

$$\overline{\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)\cap\overline{C}}=\overline{\left(\overline{A}\cap\overline{C}\right)\cup\left(\overline{B}\cap\overline{C}\right)}.$$

Применяя уже доказанные соотношения 1, 2 и 4, получаем

$$\overline{\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)}\cup\overline{\overline{C}}=\overline{\left(\overline{A}\cap\overline{C}\right)}\cap\overline{\left(\overline{B}\cap\overline{C}\right)},$$

$$\left(\overline{\overline{A}}\cap\overline{\overline{B}}\right)\cup C=\left(\overline{\overline{A}}\cup\overline{\overline{C}}\right)\cap\left(\overline{\overline{B}}\cup\overline{\overline{C}}\right),$$

$$\left(A\cap B\right)\cup C=\left(A\cup C\right)\cap\left(B\cup C\right),$$

что и требовалось доказать.

Задача 9. Пусть F_1 и F_2 – две алгебры (σ-алгебры) подмножеств множества элементарных исходов Ω. Доказать, что $F_1\cap F_2$ является алгеброй (σ-алгеброй). Верно ли, что $F_1\cup F_2$ также является алгеброй (σ-алгеброй)?

Решение. Проверим выполнение свойств, необходимых для того, чтобы набор множеств $F_1\cap F_2$ был алгеброй.

Поскольку F_1 и F_2 – две алгебры, то $\Omega\in F_1$ и $\Omega\in F_2$, значит, $\Omega\in F_1\cap F_2$.

Выберем произвольные события $A\in F_1\cap F_2$ и $B\in F_1\cap F_2$. Поскольку события *A* и *B* входят в алгебру F_1, то

$$AB\in F_1,\quad A\cup B\in F_1,\quad \overline{A}\in F_1.$$

Но события *A* и *B* также входят и в алгебру F_2, поэтому

$$AB\in F_2,\quad A\cup B\in F_2,\quad \overline{A}\in F_2.$$

Значит,

$$AB\in F_1\cap F_2,\quad A\cup B\in F_1\cap F_2,\quad \overline{A}\in F_1\cap F_2,$$

и, следовательно, $F_1\cap F_2$ является алгеброй.

Если же F_1 и F_2 были σ-алгебрами, то дополнительно проверим еще одно свойство. Для этого выберем произвольную последовательность событий

$$A_1\in F_1\cap F_2,\ A_2\in F_1\cap F_2,\ \ldots,\ A_n\in F_1\cap F_2,\ \ldots$$

и убедимся, что $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in F_1 \cap F_2$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in F_1 \cap F_2$. Действительно, события $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ входят в σ-алгебру F_1, и поэтому $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in F_1$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in F_1$. В то же время события $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ входят в σ-алгебру F_2, и поэтому $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in F_2$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in F_2$. Значит, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in F_1 \cap F_2$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in F_1 \cap F_2$. Таким образом, $F_1 \cap F_2$ является σ-алгеброй.

Покажем, что объединение двух алгебр $F_1 \cup F_2$ не обязано быть алгеброй. Для этого приведем следующий пример. Рассмотрим множество элементарных исходов Ω, состоящее из трех элементарных исходов $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. В качестве алгебры F_1 возьмем минимальную алгебру, содержащую элемент ω_1. Эта алгебра состоит из множеств

$$\varnothing, \quad \Omega, \quad \{\omega_1\}, \quad \{\omega_2, \omega_3\}.$$

В качестве алгебры F_2 возьмем минимальную алгебру, содержащую элемент ω_2. Эта алгебра состоит из множеств

$$\varnothing, \quad \Omega, \quad \{\omega_2\}, \quad \{\omega_1, \omega_3\}.$$

Тогда объединение $F_1 \cup F_2$ будет состоять из множеств

$$\varnothing, \quad \Omega, \quad \{\omega_1\}, \quad \{\omega_2\}, \quad \{\omega_2, \omega_3\}, \quad \{\omega_1, \omega_3\}.$$

Этот набор множеств не является алгеброй, поскольку в него не входит, например, множество

$$\{\omega_1\} \cup \{\omega_2\} = \{\omega_1, \omega_2\}.$$

Задача 10. Последовательность событий A_n такова, что $A_n \supseteq A_{n+1}$ для каждого $n = 1, 2, \ldots$ Доказать, что существует $\lim_{n \to \infty} P(A_n)$.

Решение. Поскольку $A_n \supseteq A_{n+1}$, то представим событие A_n в виде суммы двух непересекающихся событий:

$$A_n = A_{n+1} + (A_n \setminus A_{n+1}).$$

Следовательно,

$$P(A_n) = P(A_{n+1}) + P(A_n \setminus A_{n+1}) \geq P(A_{n+1}).$$

Таким образом, числовая последовательность

$$P(A_1), P(A_2), \ldots, P(A_n), \ldots$$

монотонно убывает и ограничена снизу числом 0. По теореме Вейерштрасса о пределе ограниченной монотонной последовательности эта последовательность имеет предел, что и требовалось доказать.

КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Если в результате случайного эксперимента может реализоваться один из нескольких равновозможных вариантов, то используют классическое определение вероятности.

Классическое определение вероятности является краеугольным камнем теории вероятностей и вводится в соответствии со следующей схемой.

В качестве множества элементарных исходов Ω используют произвольное конечное множество

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\},$$

где N – число элементов множества Ω.

Алгебра событий F состоит из всех подмножеств множества элементарных исходов Ω.

Для того чтобы задать вероятность P, вероятность каждого элементарного исхода полагают равной

$$\frac{1}{N}.$$

Таким образом,

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \ldots = P(\omega_N) = \frac{1}{N}.$$

Вероятность каждого события A полагают равной числу

$$P(A) = \frac{m}{N}, \tag{8}$$

где через m обозначено число элементарных исходов, входящих в событие A.

Замечание. При вычислении вероятности события A элементарные исходы, входящие в событие A, часто называют благоприятными исходами и формулу (8) записывают в виде

$$P(A)=\frac{\text{число благоприятных исходов}}{\text{число всех исходов}}.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 11. Шесть карточек с буквами «А», «А», «А», «Н», «Н», «С» хорошо перемешивают и выкладывают в ряд случайным образом. Найти вероятность того, что получится слово «АНАНАС».

Решение. Воспользуемся классическим определением вероятности. Для этого сначала подсчитаем число N всех возможных исходов. Поскольку число всех исходов является числом перестановок из 6 элементов, то

$$N = P_6 = 6! = 720.$$

Теперь подсчитаем число m благоприятных исходов. При составлении слова «АНАНАС» на трех местах (первое, третье и пятое) нужно разместить 3 карточки с буквами «А». Это можно сделать $P_3 = 3! = 6$ способами. В каждом из этих случаев на второе и четвертое места нужно разместить 2 карточки с буквами «Н». Это можно сделать 2 способами. Таким образом, при благоприятном исходе для букв «А», «А», «А», «Н», «Н» существует $6 \cdot 2 = 12$ способов их размещения. После этого для буквы «С» выбора уже не остается. Поэтому число благоприятных исходов

$$m = 12.$$

Следовательно, вероятность того, что получится слово «АНАНАС», равна

$$\frac{m}{N} = \frac{12}{720} = \frac{1}{60}.$$

Ответ: $\frac{1}{60}$.

Задача 12. Автомобильный номер состоит из трех цифр и не может быть равным «000». Найти вероятность того, что в случайно выбранном автомобильном номере будет ровно одна цифра 2.

Решение. Воспользуемся классическим определением вероятности. Для этого сначала подсчитаем число N всех возможных исходов. В качестве первой цифры номера может стоять любая из 10 цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. В каждом из этих случаев для выбора второй цифры номера также существует 10 возможностей: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Таким образом, первые две цифры номера можно выбрать $10 \cdot 10 = 100$ способами. В каждом из этих случаев для выбора третьей цифры номера также существует 10 возможностей: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Следует лишь из общего числа вариантов исключить один номер «000». Поэтому

$$N = 10 \cdot 10 \cdot 10 - 1 = 999.$$

Теперь подсчитаем число m благоприятных исходов. Сначала выберем место, на котором будет записана цифра 2. Для этого существует 3 возможности. В каждом из этих случаев на оставшиеся два места может быть записана любая из 9 цифр: 0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Таким образом, число благоприятных исходов равно

$$m = 3 \cdot 9 \cdot 9 = 243.$$

Следовательно, вероятность того, что в случайно выбранном автомобильном номере будет ровно одна цифра 2, равна

$$\frac{m}{N} = \frac{3 \cdot 9 \cdot 9}{999} = \frac{9}{37}.$$

Ответ: $\frac{9}{37}$.

Задача 13. Семь человек, среди которых только трое знакомы между собой, случайным образом рассаживаются на 11 стульев, расставленных в ряд. Какова вероятность того, что все знакомые окажутся сидящими рядом?

Решение. Воспользуемся классическим определением вероятности. Сначала подсчитаем число всех возможных исходов. Для этого нужно найти число способов выбрать 7 стульев из 11 стульев для 7 разных людей, причем порядок выбора имеет значение. В соответствии с определением числа размещений, число всех исходов является числом размещений из 11 элементов по 7:

$$N = A_{11}^{7} = \frac{11!}{4!}.$$

Теперь подсчитаем число благоприятных исходов. С этой целью разместим сначала троих знакомых. Для их размещения существует 9 троек стульев, стоящих рядом. В этом легко убедиться, рассмотрев различные варианты для числа стульев, стоящих слева от тройки выбранных стульев. Таких вариантов девять: 0, 1, 2, ..., 8 стульев. При этом в каждом из указанных 9 случаев на выбранных трех стульях знакомых можно рассаживать в различном порядке (3! возможностей). Значит, разместить троих знакомых на трех стульях, стоящих рядом, можно

$$9 \cdot 3!$$

различными способами.

Кроме этого, при каждом способе размещения троих знакомых на трех стульях необходимо на свободные 8 стульев посадить оставшихся 4 людей. Это можно сделать A_8^4 способами. Следовательно,

$$m = 9 \cdot 3! \cdot A_8^4.$$

Таким образом, вероятность того, что все знакомые окажутся сидящими рядом, равна

$$\frac{m}{N} = \frac{9 \cdot 3! \cdot A_8^4}{A_{11}^7} = \frac{9 \cdot 3! \cdot 8! \cdot 4!}{4! \cdot 11!} = \frac{3}{55}.$$

Ответ: $\frac{3}{55}$.

Задача 14. Восемь человек, среди которых только Владимир и Дмитрий знакомы между собой, случайным образом рассаживаются на 8 одинаковых стульев, стоящих по кругу. Какова вероятность того, что Владимир и Дмитрий окажутся сидящими рядом?

Решение. Воспользуемся классическим определением вероятности. Рассмотрим расположение Дмитрия по отношению к тому стулу, на котором сидит Владимир. Различных вариантов размещения Дмитрия на одном из оставшихся 7 стульев будет 7. Это число и является числом всех исходов:

$$N = 7.$$

А благоприятных исходов будет только 2: слева и справа от Владимира. Поэтому

$$m = 2.$$

Таким образом, вероятность того, что Владимир и Дмитрий окажутся сидящими рядом, равна

$$\frac{m}{N} = \frac{2}{7}.$$

Ответ: $\frac{2}{7}$.

Задача 15. Хорошо перемешанную колоду из 36 карт выкладывают в ряд. Какова вероятность того, что четыре туза лежат слева направо (не обязательно рядом) в следующем порядке: червовый туз, бубновый туз, трефовый туз, пиковый туз?

Решение. Будем использовать классическое определение вероятности. Число всех исходов – это число способов разложить колоду из 36 карт в ряд. Таким образом,

$$N = 36!.$$

Подсчитаем число благоприятных исходов. Сначала рассмотрим 4 места, на которых лежат тузы. Из 36 мест можно выбрать 4 места для тузов C_{36}^4 способами. В каждом из этих способов тузы можно расположить на выбранных местах в нужном порядке только единственным образом. Остальные же 32 карты могут лежать на оставшихся 32 местах в любом порядке. Поэтому всего благоприятных исходов будет

$$m = C_{36}^4 \cdot 32!.$$

Таким образом, искомая вероятность равна

$$\frac{m}{N} = \frac{C_{36}^4 \cdot 32!}{36!} = \frac{36! \cdot 32!}{4! \cdot 32! \cdot 36!} = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}.$$

Ответ: $\frac{1}{24}$.

Задача 16. На экзамен пришли три группы студентов по 15 человек. Преподаватель наугад выбирает 5 зачеток. Какова вероятность того, что среди выбранных им студентов будут студенты из всех трех групп?

Решение. Будем использовать классическое определение вероятности. Число всех исходов – это число способов выбрать 5 человек из 45 (порядок выбора зачеток значения не имеет). Таким образом, число всех исходов

$$N = C_{45}^5.$$

Теперь найдем число благоприятных исходов. Проанализируем, как могут быть распределены выбранные зачетки по группам в случае благоприятного исхода. Из каждой группы должно быть взято как минимум по 1 зачетке, а для оставшихся 2 зачеток возможны два варианта.

1. Оставшиеся 2 зачетки принадлежат студентам из одной группы. Тогда распределение всех 5 выбранных зачеток по группам будет следующим: из одной из групп выбрано 3 зачетки, а из двух других групп – по одной зачетке. Поскольку группа с тремя зачетками может быть выбрана любой, то число способов распределить зачетки по группам по этой схеме

$$C_3^1 \cdot C_{15}^3 \cdot C_{15}^1 \cdot C_{15}^1.$$

2. Оставшиеся 2 зачетки из разных групп. Тогда распределение всех 5 выбранных зачеток по группам следующее: из двух групп выбрано по 2 зачетки, а из одной группы – одна зачетка. Поскольку группа с одной зачеткой может быть любой, то число способов распределить зачетки по группам по этой схеме

$$C_3^1 \cdot C_{15}^2 \cdot C_{15}^2 \cdot C_{15}^1.$$

Поэтому всего благоприятных исходов будет

$$m = C_3^1 \cdot C_{15}^3 \cdot C_{15}^1 \cdot C_{15}^1 + C_3^1 \cdot C_{15}^2 \cdot C_{15}^2 \cdot C_{15}^1 = C_3^1 \cdot C_{15}^1 \cdot \left(C_{15}^3 \cdot C_{15}^1 + C_{15}^2 \cdot C_{15}^2 \right).$$

Следовательно, искомая вероятность равна

$$\frac{m}{N} = \frac{C_3^1 \cdot C_{15}^1 \cdot \left(C_{15}^1 \cdot C_{15}^3 + C_{15}^2 \cdot C_{15}^2 \right)}{C_{45}^5}.$$

Ответ: $\dfrac{C_3^1 \cdot C_{15}^1 \cdot \left(C_{15}^1 \cdot C_{15}^3 + C_{15}^2 \cdot C_{15}^2 \right)}{C_{45}^5}.$

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Для введения вероятности событий в случайных экспериментах, в которых элементарные исходы являются равновозможными и целиком заполняют отрезок прямой линии, фигуру на плоскости или область в пространстве, применяется геометрическое определение вероятности. В таких экспериментах число элементарных исходов не является конечным, и поэтому классическое определение вероятности к ним применять нельзя.

Опишем схему введения геометрического определения вероятности.

Множеством элементарных исходов в этой схеме служит произвольное множество $\Omega \subset R^n$, имеющее конечный объем.

В качестве событий рассматриваются всевозможные подмножества множества Ω, также имеющие объем.

Вероятность произвольного события A вычисляется по формуле

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}, \qquad (9)$$

где символами $\mu(A)$ и $\mu(\Omega)$ обозначены объемы множеств A и Ω соответственно.

В случае, когда $\Omega \subset R^1$, объемом множества является его длина. В случае, когда $\Omega \subset R^2$, объемом множества является его площадь.

Замечание. Формально для корректного введения геометрического определения вероятности требуется знакомство с мерой Лебега. Множество Ω должно иметь конечную меру Лебега, а σ-алгеброй событий будут все подмножества Ω, измеримые по Лебегу. Буква μ в определении (9) обозначает меру Лебега. Однако в ряде задач понятие меры Лебега можно не использовать, поскольку для событий, рассматриваемых в этих задачах, их меры Лебега совпадают с обычными мерами длины, площади или объема.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 17. В квадрат со стороной 1 наугад брошена точка. Какова вероятность того, что расстояние от этой точки до ближайшей вершины квадрата будет меньше $\frac{1}{3}$?

Решение. Множеством элементарных исходов Ω случайного эксперимента по бросанию точки в квадрат служит множество всех точек квадрата со стороной 1.

Рассмотрим событие *A*, состоящее в том, что наугад брошенная в квадрат точка оказывается на расстоянии, меньшем $\frac{1}{3}$ от ближайшей до нее вершины квадрата. Все точки, расположенные внутри квадрата и находящиеся на расстоянии, меньшем $\frac{1}{3}$, от какой-либо из вершин квадрата, изображены на рис. 7.

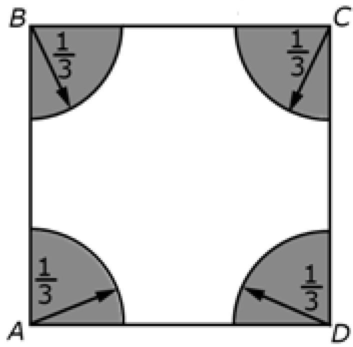


Рис. 7

Как видно из рис. 7, множество *A* представляет собой объединение четырех непересекающихся четвертей кругов радиуса $\frac{1}{3}$ с центрами в каждой из вершин квадрата. Таким образом, площадь множества A равна $\frac{\pi}{9}$.

Поскольку площадь всего квадрата $\mu(\Omega) = 1$, то, воспользовавшись геометрическим определением вероятности, получаем

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{\pi}{9}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{9}$.

Задача 18. На отрезок длины 6 наугад брошены две точки. Какова вероятность того, что расстояние между ними будет меньше, чем расстояния от этих точек до концов отрезка?

Решение. Обозначим через x расстояние от левой точки до левого конца отрезка, а через y – расстояние от правой точки до левого конца отрезка (рис. 8).

Рис. 8

Расстояние между данными точками будет меньше, чем расстояния от этих точек до концов отрезка, тогда и только тогда, когда будут выполнены неравенства:

$$\begin{cases} 0 \le x \le y \le 6, \\ y - x < x, \\ y - x < 6 - y, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le y \le 6, \\ y < 2x, \\ y < \dfrac{x}{2} + 3. \end{cases} \tag{10}$$

Заметим, что случайный эксперимент по бросанию двух точек на отрезок длины 6 в рассматриваемой задаче удобнее представлять как случайный эксперимент по бросанию одной точки на половину квадрата со стороной 6, выделяемую условием $x \le y$ (рис. 9).

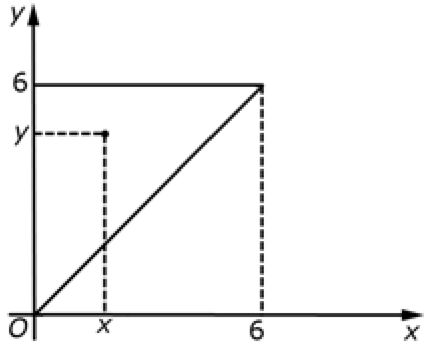


Рис. 9

В этом случае множеством элементарных исходов Ω будет половина квадрата, расположенная на рисунке 10 выше прямой $y = x$.

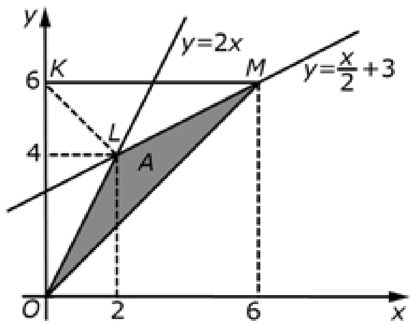


Рис. 10

Другими словами, множеством Ω является равнобедренный прямоугольный треугольник *OKM*, площадь которого равна 18.

Событие *A* заключается в том, что наугад брошенная в треугольник *OKM* точка попадет в фигуру, заданную неравенствами (10), а именно в треугольник *OLM*. Площадь треугольника *OLM* равна

$$S_{\Delta\, OLM} = S_{\Delta\, OKM} - S_{\Delta\, OKL} - S_{\Delta\, KLM} = 18 - 6 - 6 = 6.$$

В соответствии с геометрическим определением вероятности находим

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $\frac{1}{3}$.

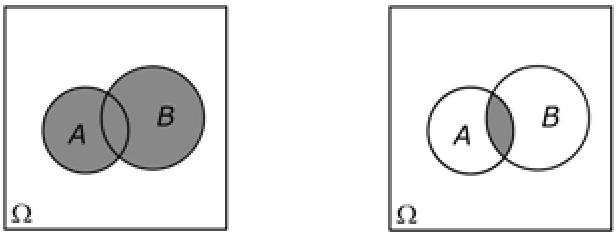
ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

При решении задач часто требуется найти вероятность объединения нескольких событий.

Рассмотрим сначала два произвольных события A и B. Вероятность объединения двух событий A и B можно найти по формуле

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Справедливость этой формулы наглядно демонстрируют диаграммы Эйлера–Венна для объединения и пересечения двух событий (рис. 11), на которых видно, что при сложении вероятностей событий A и B элементарные исходы, входящие в пересечение AB, учитываются дважды.



Событие $A \cup B$ Событие AB

Рис. 11

Нарисуем теперь диаграмму Эйлера–Венна для объединения трех событий A, B и C (рис. 12).

В случае трех событий при сложении вероятностей событий A, B и C элементарные исходы, входящие в их попарные пересечения AB, BC, AC, но не входящие в пересечение всех трех событий ABC, будут учтены дважды, а элементарные исходы из пересечения ABC – трижды.

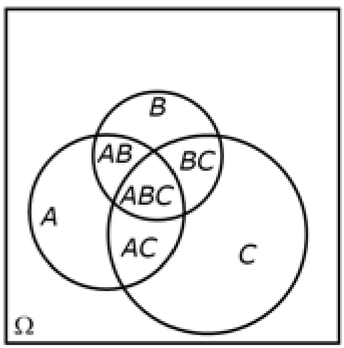


Рис. 12

Поэтому формула для вероятности объединения трех событий имеет следующий вид:

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+$$
$$+P(ABC).$$

Приведем теперь общую формулу для вероятности объединения *n* событий.

Теорема сложения вероятностей. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – произвольные события. Тогда для вероятности объединения событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ выполнено равенство

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n} P(A_iA_j)+\sum_{1\le i<j<k\le n} P(A_iA_jA_k)-$$
$$-\ldots+(-1)^{n+1}P(A_1A_2\ldots A_n). \tag{11}$$

Приведем типичный пример использования формулы (11).

Задача 19. В гостинице *n* номеров с различными ключами. Портье наугад раздаёт ключи от номеров постояльцам. Найти вероятность p_n того, что хотя бы один постоялец сможет открыть свой номер. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$.

Решение. Если обозначить через A_i событие, состоящее в том, что *i*-й номер был открыт, то в соответствии с формулой (11) вероятность p_n можно найти по формуле

$$p_n=P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n} P(A_iA_j)+$$
$$+\sum_{1\le i<j<k\le n} P(A_iA_jA_k)-\ldots+(-1)^{n+1}P(A_1A_2\ldots A_n). \tag{12}$$

Получим формулу для каждого из слагаемых, входящих в правую часть формулы (12). С этой целью сначала подсчитаем вероятность $P(A_i)$ для каждого $i=1,2,\ldots,n$. Для этого заметим, что число всех исходов N равно числу способов распределить n ключей между *n* постояльцами. Таким образом,

$$N=n!.$$

В случае благоприятного исхода *i*-й постоялец получает ключ от своего номера, а оставшиеся (*n* – 1) ключей могут быть произвольным образом распределены между остальными (n – 1) постояльцами. Поэтому число благоприятных исходов равно (n – 1)!.

В соответствии с классическим определением вероятности получаем

$$P\left(A_i\right) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} P\left(A_i\right) = n \cdot \frac{1}{n} = 1.$$

Теперь вычислим сумму

$$\sum_{1 \le i < j \le n} P\left(A_i A_j\right). \tag{13}$$

Для события $A_i A_j$ благоприятным исходом будет ситуация, когда i-й постоялец и j-й постоялец получают ключи от своих номеров, а оставшиеся (n – 2) ключа произвольным образом распределены между остальными (n – 2) постояльцами. Поэтому число благоприятных исходов для события $A_i A_j$ равно (n – 2)!, и в соответствии с классическим определением вероятности получаем

$$P\left(A_i A_j\right) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}, \quad 1 \le i < j \le n.$$

Число слагаемых в сумме (13) равно числу способов выбрать два разных номера i и j из n номеров и тем самым равно C_n^2. Следовательно,

$$\sum_{1 \le i < j \le n} P\left(A_i A_j\right) = C_n^2 \cdot \frac{1}{n(n-1)} = \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{2!}.$$

Рассуждая аналогичным образом, получаем формулу

$$\sum_{1 \le i < j < k \le n} P\left(A_i A_j A_k\right) = C_n^3 \cdot \frac{1}{n(n-1)(n-2)} = \frac{1}{3!},$$

а также формулы и для всех остальных слагаемых в формуле (12).

В результате для вероятности p_n получаем

$$p_n = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n!}.$$

Далее находим

$$\lim_{n\to\infty} p_n = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n!} + \ldots$$

Поскольку разложение в ряд для экспоненты e^x имеет вид

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots,$$

то, подставляя в это равенство $x = -1$, получаем

$$e^{-1} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!} + \ldots = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!} + \ldots$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} p_n = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n!} + \ldots = 1 - e^{-1}.$$

Ответ: $p_n = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$; $\lim_{n\to\infty} p_n = 1 - e^{-1}$.

ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ФОРМУЛЫ БАЙЕСА

УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ

Рассмотрим вероятностное пространство (Ω, F, P) и некоторое событие A, у которого $P(A) > 0$.

Определение 12. *Условной вероятностью* $P(B\mid A)$ *события B при условии, что событие A произошло,* называют величину

$$P(B\mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)}. \tag{14}$$

Проиллюстрируем формулу (14) на следующем простом примере.

Пусть событие B состоит в том, что при бросании игральной кости выпало более трех очков, а событие A состоит в том, что при бросании игральной кости выпало нечетное число очков. Если мы знаем, что событие A произошло, то число всех возможных исходов сокращается до трех исходов: выпало 1 очко, выпало 3 очка, выпало 5 очков. Поскольку в этом случае событие B происходит лишь при одном исходе (выпало 5 очков), то

$$P(B\mid A) = \frac{1}{3}.$$

С другой стороны,

$$P(AB) = \frac{1}{6}, \quad P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

и, вычисляя условную вероятность события *B* при условии, что событие *A* произошло, по формуле (14) мы получаем тот же результат:

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}.$$

Используя определение условной вероятности, можно получить следующую формулу, позволяющую вычислять вероятность произведения *n* событий:

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n \mid A_1 A_2 \ldots A_{n-1}).$$

Эту формулу часто называют теоремой умножения для *n* событий.

НЕЗАВИСИМОСТЬ СОБЫТИЙ

Определение 13. *События A и B называют независимыми*, если справедливо равенство

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Если события *A* и *B* независимы и $P(A) > 0$, то, вычисляя условную вероятность $P(B \mid A)$, мы получаем

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(A)} = P(B).$$

Таким образом, условная вероятность события *B* при условии, что событие *A* произошло, оказалась равной вероятности события *B* и никак не зависит от события *A*.

Приведем определение независимости для нескольких событий.

Определение 14. *События* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *называются независимыми* (или *независимыми в совокупности*), если для любого набора $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$ справедливо равенство

$$P\left(A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_k}\right) = P\left(A_{i_1}\right) \cdot P\left(A_{i_2}\right) \cdot \ldots \cdot P\left(A_{i_k}\right).$$

Важно отметить, что определение 14 включает в себя несколько равенств. Например, если речь идет о независимости трех событий A_1, A_2, A_3, то должны быть выполнены четыре равенства:

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3),$$
$$P(A_1A_2) = P(A_1)\cdot P(A_2),$$
$$P(A_1A_3) = P(A_1)\cdot P(A_3),$$
$$P(A_2A_3) = P(A_2)\cdot P(A_3).$$

ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ФОРМУЛЫ БАЙЕСА

События $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образуют полную группу событий, если выполнены следующие условия:

1) $P(H_i) > 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$;
2) $H_iH_j = \varnothing$ при любых $i \neq j$;
3) $H_1 + H_2 + \ldots + H_n = \Omega$.

События $H_1, H_2, \ldots, H_n$, составляющие полную группу событий, называют гипотезами.

Формула полной вероятности. Если во множестве элементарных исходов Ω имеется полная группа событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, то вероятность любого события *A* можно вычислить по формуле полной вероятности:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P(A \mid H_i).$$

Для того чтобы найти условную вероятность того, что осуществилась гипотеза H_k, если известно, что произошло событие *A,* используют следующие формулы.

Формулы Байеса. Если во множестве элементарных исходов Ω имеется полная группа событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, то условные вероятности гипотез H_k при условии, что произошло событие *A,* можно вычислить по формулам Байеса

$$P(H_k \mid A) = \frac{P(H_k)\cdot P(A \mid H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P(A \mid H_i)}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Заметим, что в знаменателе правой части формулы Байеса записана вероятность события *A,* вычисленная по формуле полной вероятности.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 20. В первой урне находится 3 белых и 2 черных шара, а во второй – 1 белый и 3 черных шара. Из первой урны наугад выбирают 2 шара и перекладывают их во вторую урну. После этого из второй урны наугад извлекают 1 шар.

1. Какова вероятность того, что извлеченный из второй урны шар окажется белым?

2. Какова вероятность того, что из первой урны во вторую были переложены 2 белых шара, если после перекладывания извлеченный наугад из второй урны шар оказался белым?

Решение. Введем следующие гипотезы:

- H_1 – «из первой урны во вторую были переложены 2 белых шара»;
- H_2 – «из первой урны во вторую были переложены 1 белый и 1 черный шар»;
- H_3 – «из первой урны во вторую были переложены 2 черных шара».

Найдем вероятности гипотез. Для этого заметим, что число всех различных способов переложить из первой урны во вторую 2 шара равно C_5^2.

В случае гипотезы H_1 число благоприятных исходов равно C_3^2, поэтому

$$P(H_1) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = 0,3.$$

Для гипотезы H_2 число благоприятных исходов равно $C_3^1 \cdot C_2^1$, поэтому

$$P(H_2) = \frac{C_3^1 \cdot C_2^1}{C_5^2} = 0,6.$$

Для гипотезы H_3 имеется только 1 благоприятный исход, поэтому

$$P(H_3) = \frac{1}{C_5^2} = 0,1.$$

Обозначим буквой A событие, состоящее в том, что после перекладывания извлеченный из второй урны шар оказался белым, и найдем условные вероятности события A при условии реализации каждой из гипотез.

Если из первой урны во вторую были переложены 2 белых шара (гипотеза H_1), то после перекладывания во второй урне стало 3 белых и 3 черных шара. Поэтому

$$P(A \mid H_1) = \frac{3}{6} = 0,5.$$

Если из первой урны во вторую были переложены 1 белый и 1 черный шар (гипотеза H_2), то после перекладывания во второй урне стало 2 белых и 4 черных шара. Поэтому

$$P(A \mid H_2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Если из первой урны во вторую были переложены 2 черных шара (гипотеза H_3), то после перекладывания во второй урне стало 1 белый и 5 черных шаров. Поэтому

$$P(A \mid H_3) = \frac{1}{6}.$$

Теперь можно найти вероятность события *A* по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A \mid H_1) + P(H_2) \cdot P(A \mid H_2) + P(H_3) \cdot P(A \mid H_3) =$$

$$= 0,3 \cdot 0,5 + 0,6 \cdot \frac{1}{3} + 0,1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{11}{30}.$$

Для ответа на второй вопрос задачи воспользуемся формулой Байеса:

$$P(H_1 \mid A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A \mid H_1)}{P(H_1) \cdot P(A \mid H_1) + P(H_2) \cdot P(A \mid H_2) + P(H_3) \cdot P(A \mid H_3)} =$$

$$= \frac{0,3 \cdot 0,5}{11/30} = \frac{9}{22}.$$

Ответ: $\frac{11}{30}$; $\frac{9}{22}$

Задача 21. Из ящика, где находятся 2 одинаковые пары ботинок черного цвета и 3 одинаковые пары ботинок коричневого цвета, наудачу извлекают два ботинка.

1. Какова вероятность того, что извлеченные ботинки образуют пару?

2. Если известно, что извлеченные ботинки образуют пару, то какова вероятность того, что эта пара ботинок коричневого цвета?

Решение. Будем считать, что мы достаем ботинки из ящика по очереди, и рассмотрим следующие гипотезы:

- H_1 – «первым был извлечен ботинок черного цвета»;
- H_2 – «первым был извлечен ботинок коричневого цвета».

Поскольку всего в ящике было 10 ботинок, из которых 4 ботинка черного цвета, а 6 ботинок коричневого цвета, то вероятности гипотез равны

$$P(H_1) = \frac{4}{10} = 0,4; \quad P(H_2) = \frac{6}{10} = 0,6.$$

Обозначим буквой A событие, состоящее в том, что два наудачу извлеченных из ящика ботинка образуют пару, и найдем условные вероятности события A при условии реализации каждой из гипотез.

Если первый извлеченный ботинок был черного цвета (гипотеза H_1), то к нему в пару подойдут только 2 ботинка из оставшихся 9 ботинок. Поэтому

$$P(A \mid H_1) = \frac{2}{9}.$$

Если же первый извлеченный ботинок был коричневого цвета (гипотеза H_2), то к нему в пару подойдут 3 ботинка из оставшихся 9 ботинок. Поэтому

$$P(A \mid H_2) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

Воспользовавшись формулой полной вероятности, находим вероятность события A:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A \mid H_1) + P(H_2) \cdot P(A \mid H_2) = 0,4 \cdot \frac{2}{9} + 0,6 \cdot \frac{1}{3} = \frac{13}{45}.$$

Теперь перейдем ко второму вопросу задачи. С этой целью обозначим буквой B событие, состоящее в том, что из ящика извлечены два ботинка коричневого цвета. Для ответа на второй вопрос задачи необходимо вычислить условную вероятность того, что из ящика были извлечены два ботинка коричневого цвета, если известно, что они образуют пару, то есть найти условную вероятность $P(B \mid A)$.

По определению условной вероятности

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

Нетрудно заметить, что

$$P(AB) = P(AH_2),$$

поэтому

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(AH_2)}{P(A)} = P(H_2 \mid A).$$

Теперь воспользуемся формулой Байеса:

$$P(H_2 \mid A) = \frac{P(H_2)\cdot P(A \mid H_2)}{P(H_1)\cdot P(A \mid H_1) + P(H_2)\cdot P(A \mid H_2)} = \frac{0,6 \cdot 1/3}{13/45} = \frac{9}{13}.$$

Ответ: $\frac{13}{45}$; $\frac{9}{13}$.

Задача 22. Из урны, содержащей *M* белых и *N* черных шаров, удалили *r* случайно выбранных шаров. После этого из урны наудачу извлекается один шар. Какова вероятность того, что извлеченный шар окажется белым?

Решение. Обозначим через $A(M, N, r)$ событие, состоящее в том, что после удаления *r* шаров из урны с *M* белыми и *N* черными шарами из урны был извлечен белый шар.

Докажем, что вероятность события $A(M, N, r)$ не зависит от количества *r* удаленных шаров и равна

$$P\left[A(M, N, r)\right] = \frac{M}{M+N}. \tag{15}$$

Для этого воспользуемся методом математической индукции по *r*.

При $r = 0$, то есть в случае, когда мы вообще не удалили ни одного шара, вероятность извлечь белый шар из урны с *M* белыми и *N* черными шарами в соответствии с классическим определением вероятности равна

$$P\left[A(M, N, 0)\right] = \frac{M}{M+N}.$$

Теперь предположим, что

$$P\left[A(M, N, r-1)\right] = \frac{M}{M+N},$$

и докажем, что при удалении *r* шаров будет справедлива формула (15).

С этой целью представим, что удаление *r* шаров происходит в два этапа: сначала случайным образом удаляется один шар, а затем еще $(r-1)$ шар. Тогда возможны следующие две гипотезы:

- H_1 – «первым из урны был удален белый шар»;

- H_2 – «первым из урны был удален черный шар».

Вероятности этих гипотез равны

$$P(H_1) = \frac{M}{M+N}, \quad P(H_2) = \frac{N}{M+N}. \tag{16}$$

Воспользовавшись формулой полной вероятности, получаем

$$\begin{aligned} &P[A(M,N,r)] = \\ &= P(H_1)P[A(M,N,r)/H_1] + P(H_2)P[A(M,N,r)/H_2] = \\ &= P(H_1)P[A(M-1,N,r-1)] + P(H_2)P[A(M,N-1,r-1)]. \end{aligned} \tag{17}$$

В силу предположения индукции справедливы равенства

$$\begin{aligned} &P[A(M-1,N,r-1)] = \frac{M-1}{M+N-1}, \\ &P[A(M,N-1,r-1)] = \frac{M}{M+N-1}. \end{aligned} \tag{18}$$

Подставляя равенства (16) и (18) в формулу (17), получаем

$$\begin{aligned} &P[A(M,N,r)] = \\ &= P(H_1)P[A(M-1,N,r-1)] + P(H_2)P[A(M,N-1,r-1)] = \\ &= \frac{M}{(M+N)} \cdot \frac{(M-1)}{(M+N-1)} + \frac{N}{(M+N)} \cdot \frac{M}{(M+N-1)} = \frac{M}{M+N}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Ответ: $\dfrac{M}{M+N}$.

Замечание. Полученный в задаче 22 результат хорошо согласуется с наглядным представлением о перемешивании: если имеется хорошо перемешанный стакан кофе с молоком, то концентрация молока в растворе не зависит от того, сколько кофе с молоком уже успели выпить.

Заключение

В данном учебно-методическом пособии приведены примеры решения типовых задач, относящихся к материалу, включенному в первое задание по дисциплинам «Теория вероятностей» и «Основы теории вероятностей».

Разобранные в пособии по каждой теоретической теме задачи расположены в порядке увеличения сложности: от простых задач, призванных наглядно проиллюстрировать теоретический материал, до сложных, выбор которых продиктован желанием представить наиболее широкий спектр методов решения.

Студенты, освоившие методы решения сложных задач, приведенных в пособии, смогут решать и другие сложные задачи по этой тематике, в частности, входящие в их домашние задания.

Литература

1. Ширяев А.Н. Вероятность – 1. – 5-е изд. – М.: МЦНМО, 2011. – 552 с.
2. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. – 8-е изд. – М.: Ленанд, 2015. – 304 с.
3. Захаров В.К., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1983. – 160 с.
4. Зубков А.М., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П. Сборник задач по теории вероятностей. – 2-е изд. – М.: Наука, 1989. – 320 с.