Принцип аргумента. Теорема Руше

Самарова С.С.

ФОПФ, 3 курс, ТФКП

Учебное пособие для дистанционных занятий

В данном пособии рассматриваются методы решения задач, использующих теорему Руше. Эти методы базируются на следующих теоремах, доказательство которых является лекционным материалом.

Теорема 1 (Принцип аргумента). Пусть выполнены следующие условия:

- D – область, ограниченная циклом γ,
- функция $f(z)$ голоморфна в некоторой области, содержащей $\overline{D} = D \cup \gamma$ за исключением, быть может, конечного числа полюсов,
- функция $f(z)$ имеет конечное число нулей в области D,
- на γ нет ни нулей, ни полюсов функции $f(z)$.

Тогда
$$N - P = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi} \Delta_\gamma \arg f(z),$$
где N – число нулей в области D с учетом их кратностей, а P – число полюсов в области D с учетом их порядков.

Задач на непосредственное применение принципа аргумента в задании нет. В курсе ТФКП его, как правило, используют для доказательства следующей теоремы.

Теорема 2 (Теорема Руше). Пусть выполнены условия:

- D – область, ограниченная циклом γ,
- функции $f(z)$ и $g(z)$ голоморфны в некоторой области, содержащей $\overline{D} = D \cup \gamma$,
- $|f(z)| > |g(z)|$ для любого $z \in \gamma$.

Тогда функции

$$F(z) = f(z) + g(z) \quad \text{и} \quad f(z)$$

имеют в области D одно и то же число нулей с учетом их кратностей.

Замечание. Из условий теоремы Руше следует, что функция

$$F(z) = f(z) + g(z)$$

не имеет нулей на границе области D.

Докажем замечание методом «от противного». Предположим, что существует точка $z_0 \in \gamma$ такая, что

$$F(z_0) = f(z_0) + g(z_0) = 0$$

Тогда в этой точке

$$f(z_0) = -g(z_0) \quad \Rightarrow \quad |f(z_0)| = |g(z_0)|,$$

что противоречит условию теоремы Руше.

Замечание доказано.

С помощью теоремы Руше можно доказать знаменитую теорему, которая носит название «Основная теорема алгебры».

Теорема 3 (Основная теорема алгебры). Каждый многочлен степени n

$$P(z) = z^n + c_{n-1}z^{n-1} + ... + c_1 z + c_0$$

имеет в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ ровно n нулей с учетом их кратности.

Покажем, как применяются эти теоремы при решении задач.

Задача 1 (2017/2018 уч. год, семестровая контрольная по ТФКП)

Найти число корней уравнения

$$z^4 + 4z^3 - 8z - 2 = 0 \tag{1}$$

а) *в области* $\{z: \ 1 < |z| < 3\}$,

б) *в области* $\{z: \ |z| > 3\}$.

Решение.

а) Найдем число корней уравнения (1) в области $\{z: \ 1 < |z| < 3\}$.

Рассмотрим сначала область $|z| < 1$ и выясним, сколько корней уравнение (1) имеет в этой области.

Для этого рассмотрим функции

$$f(z) = -8z\,,$$
$$g(z) = z^4 + 4z^3 - 2$$

и сравним их значения на границе области.

При $|z| = 1$

$$|f(z)| = |-8z| = 8\,,$$

$$|g(z)| = |z^4 + 4z^3 - 2| \le |z|^4 + 4|z|^3 + 2 = 7 < 8\,.$$

Поскольку при $|z| = 1$

$$|f(z)| > |g(z)|\,,$$

то по теореме Руше функция

$$F(z) = f(z) + g(z) = z^4 + 4z^3 - 8z - 2$$

имеет в области $|z| < 1$ то же число нулей с учетом их кратностей, что и функция

$$f(z) = -8z\,,$$

а именно, 1 нуль.

Кроме того, используя замечание к теореме Руше, видим, что функция

$$F(z) = f(z) + g(z) = z^4 + 4z^3 - 8z - 2$$

не обращается в нуль при $|z| = 1$, поэтому $F(z)$ имеет 1 нуль в круге $|z| \le 1$.

Теперь рассмотрим область $|z| < 3$ и выясненим, сколько нулей имеет в этой области функция

$$F(z) = z^4 + 4z^3 - 8z - 2$$

С этой целью определим функции $f(z)$ и $g(z)$ по-другому

$$\begin{aligned} f(z) &= z^4 + 4z^3\,, \\ g(z) &= -8z - 2\,. \end{aligned}$$

При $|z| = 3$ получаем

$$|f(z)| = |z^4 + 4z^3| = |z|^3|z+4| = 27|z+4| \geq 27\,\big||z| - 4\big| = 27(4-3) = 27\,,$$

$$|g(z)| = |-8z - 2| \leq |8z| + 2 = 24 + 2 = 26\,.$$

Поскольку при $|z| = 3$ выполнено неравенство

$$|f(z)| > |g(z)|\,,$$

то по теореме Руше функция

$$F(z) = f(z) + g(z) = z^4 + 4z^3 - 8z - 2$$

имеет в области $|z| < 3$ такое же число нулей с учетом их кратностей, как и функция

$$f(z) = z^4 + 4z^3 = z^3(z+4)\,.$$

У функции $f(z)$ есть нуль $z = 0$ кратности 3, лежащий в области $|z| < 3$, и нуль $z = -4$, который находится вне этой области.

Поэтому у функции

$$F(z) = z^4 + 4z^3 - 8z - 2$$

внутри области $|z| < 3$ имеется три нуля. Поскольку один из этих нулей лежит в круге $|z| \leq 1$, то в области $1 < |z| < 3$ функция $F(x)$ имеет два нуля.

Значит, уравнение (1) имеет в области $1 < |z| < 3$ два корня.

б) Найдем число корней уравнения (1) в области $\{z: \ |z| > 3\}$.

Поскольку

$$F(z) = z^4 + 4z^3 - 8z - 2$$

– многочлен 4-ой степени, то по основной теореме алгебры во всей комплексной плоскости у него имеется 4 нуля.

Как мы только что доказали, используя теорему Руше, в области $|z| < 3$ многочлен $F(x)$ имеет 3 нуля.

По замечанию к теореме Руше на границе области при $|z| = 3$ нулей многочлена $F(x)$ нет.

Значит, в области $|z| > 3$ у многочлена $F(x)$ есть ровно 1 нуль. Таким образом, уравнение (1) имеет в области $|z| > 3$ один корень.

Ответ. а) 2 корня; б) 1 корень.

Разберем еще одну задачу, в которой оценки при применении теоремы Руше оказываются более сложными.

Задача 2 (2019/2020 уч. год, семестровая контрольная по ТФКП)

Применяя теорию вычетов и теорему Руше, вычислить интеграл по положительно ориентированному контуру

$$\oint\limits_{|z|=1} z^{-2} \exp\left(\frac{81}{4z^5 + 4z^3 - 4z + 9}\right) dz$$

Решение.

Выясним, где расположены особые точки функции

$$h(z) = \frac{1}{z^2} \exp\left(\frac{81}{4z^5 + 4z^3 - 4z + 9}\right)$$

Для этого найдем число корней уравнения

$$4z^5 + 4z^3 - 4z + 9 = 0 \tag{2}$$

в области $|z| < 1$.

В данном случае попытка задать функции $f(z)$ и $g(z)$ для применения теоремы Руше, сгруппировав слагаемые в левой части уравнения, а затем сравнить их модули при $|z| = 1$, используя только неравенства для модуля суммы и модуля разности чисел, не приводит к желаемому результату.

Решение этой и подобных задач основано на специальном виде многочлена из левой части уравнения (2). Этот многочлен содержит три слагаемых, у которых степени z образуют убывающую арифметическую прогрессию (в нашем случае это слагаемые $4z^5$, $4z^3$ и $-4z$), причем коэффициенты при старшей и младшей степенях действительны и равны по модулю.

Воспользовавшись специальным видом многочлена,определим функции

$$\begin{aligned} &f(z) = 9\,, \\ &g(z) = 4z^5 + 4z^3 - 4z \end{aligned}$$

и сравним их значения при $|z| = 1$. Тогда

$$|f(z)| = 9\,,$$

$$|g(z)| = |4z^5 + 4z^3 - 4z| = 4|z|^3 \left| z^2 + 1 - z^{-2} \right| = 4 \left| z^2 + 1 - z^{-2} \right|.$$

Представив число z на окружности $|z| = 1$ в виде

$$z = e^{i\varphi}, \qquad 0 \le \varphi < 2\pi,$$

получим

$$|g(z)| = 4\left|e^{2i\varphi}+1-e^{-2i\varphi}\right| = 4\left|2i\sin 2\varphi+1\right| = 4\sqrt{4\sin^2 2\varphi + 1} \le 4\sqrt{5} = \sqrt{80} < 9\,.$$

Поскольку при $|z| = 1$

$$|f(z)| > |g(z)|\,,$$

то по теореме Руше функция

$$F(z) = f(z) + g(z) = 4z^5 + 4z^3 - 4z + 9$$

имеет в области $|z| < 1$ то же число нулей с учетом их кратностей, что и функция

$$f(z) = 9\,,$$

а именно, ни одного нуля.

Таким образом, у функции

$$h(z) = \frac{1}{z^2} \exp\left(\frac{81}{4z^5 + 4z^3 - 4z + 9} \right)$$

внутри круга $|z|<1$ имеется только одна особая точка $z=0$, которая является полюсом второго порядка.

Воспользовавшись теоремой Коши о вычетах, получаем

$$\oint\limits_{|z|=1} z^{-2}\exp\left(\frac{81}{4z^5+4z^3-4z+9}\right)dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=0} h(z) =$$

$$= 2\pi i\left[\exp\left(\frac{81}{4z^5+4z^3-4z+9}\right)\right]'\Bigg|_{z=0} =$$

$$= 2\pi i\left[\exp\left(\frac{81}{4z^5+4z^3-4z+9}\right)\cdot\frac{(-81)}{(4z^5+4z^3-4z+9)^2}\cdot(20z^4+12z^2-4)\right]\Bigg|_{z=0} =$$

$$= 2\pi i e^9(-1)(-4) = 8\pi i e^9$$

Ответ. $8\pi i e^9$.

Следующая задача из семестровой контрольной работы 2020/2021 года предлагается Вам для самостоятельного решения.

Задача 3 *Используя теорему Руше и теорию вычетов, вычислите интеграл по положительно ориентированному контуру*

$$\oint\limits_{|z|=1} \sin\left(\frac{iz^3}{4z^3-2iz^2+1}\right)dz$$

Ответ.

$$I = -\frac{\pi i}{4}\operatorname{ch}\frac{1}{4}$$

Спасибо за внимание.

Не болейте!