Применение методов ТФКП при решении задачи Дирихле для уравнения Лапласа на плоскости

Самарова С.С.

ФОПФ, 3 курс, ТФКП

Учебное пособие для дистанционных занятий

В данном пособии рассматриваются применения функций комплексного переменного при решении задачи Дирихле для уравнения Лапласа на плоскости.

Гармонические функции комплексного переменного

Определение 1 *Гармонической в области* D *функцией комплексного переменнного называют вещественнозначную дважды непрерывно дифференцируемую функцию*

$$u(z) = u(x, y), \quad z = x + iy,$$

удовлетворяющую уравнению Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Утверждение 1 *Для любой гармонической в односвязной области* D *функции* $u(z)$ *существует такая голоморфная в области* D *функция* $f(z)$ *, что*

$$u(z) = \mathrm{Re} f(z)$$

для всех $z \in D$ *.*

Инвариантность уравнения Лапласа относительно конформных отображений

Утверждение 2 *Пусть голоморфная функция $w = f(z)$ конформно отображает односвязную область D на область G и функция $g(w)$ является гармонической в области G. Тогда функция $g\big(f(z)\big)$ также будет гармонической в в области D.*

Доказательство. Заметим, что область G является односвязной в силу односвязности области D и конформности отображения $w = f(z)$. Поэтому из утверждения 1 следует, что существует голоморфная в G функция $F(z)$ такая, что

$$g(w) = \mathrm{Re}F(w), \quad \forall w \in G$$

Рассмотрим сложную функцию $F\big(f(z)\big)$. Эта функция будет голоморфной в области D как суперпозиция двух голоморфных функций, поэтому ее реальная часть

$$g\big(f(z)\big) = \mathrm{Re}F\big(f(z)\big)$$

будет гармонической в области D функцией.

Утверждение 2 доказано.

Постановка задачи Дирихле для уравнения Лапласа на плоскости

Постановка задачи Дирихле. Пусть D – односвязная область в $\overline{\mathbb{C}}$ с кусочно-гладкой границей γ.

Пусть функция u_0 определена и непрерывна на γ за исключением, быть может, конечного числа точек $z_1, z_2, \dots z_m$, в которых u_0 имеет разрывы первого рода.

Требуется найти ограниченную гармоническую в области D функцию $u(z)$, которая непрерывно продолжается на $D \setminus \{z_1, z_2, \dots z_m\}$ и совпадает с u_0 на $\gamma \setminus \{z_1, z_2, \dots z_m\}$.

Замечание 1. По теореме Римана для любой односвязной области, граница которой состоит более, чем из одной точки, существует конформное отображение, переводящее эту область в единичный круг. По утверждению 2 в результате этого отображения уравнение Лапласа переходит в уравнение Лапласа. Тем самым решение задачи Дирихле для односвязной области D сводится к решению задачи Дирихле для единичного круга.

Формула Пуассона для решения задачи Дирихле в круге

Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге радиуса R

$$\begin{aligned} &\Delta u = 0, \\ &u\big|_{|z|=R} = u_0(z) \end{aligned}$$

где функция u_0 определена и непрерывна на окружности $|z| = R$ за исключением, быть может, конечного числа точек $z_1, z_2, ...z_m$, в которых u_0 имеет разрывы первого рода, дает формула (интеграл) Пуассона

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_0\Big(Re^{i\theta}\Big)\,\frac{R^2 - |z|^2}{\left|Re^{i\theta} - z\right|^2}\,d\theta \tag{1}$$

Преобразуем формулу (1) к более удобному при решении задач виду.

Для этого рассмотрим произвольную точку $\zeta = Re^{i\theta}$ на окружности радиуса R. Тогда

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\right) = \mathrm{Re}\frac{(\zeta + z)(\overline{\zeta} - \overline{z})}{|\zeta - z|^2} = \mathrm{Re}\frac{|\zeta|^2 + z\overline{\zeta} - \overline{z}\zeta - |z|^2}{|\zeta - z|^2}$$

Поскольку

$$z\overline{\zeta} - \overline{z}\zeta = z\overline{\zeta} - \overline{(z\overline{\zeta})} = 2i\,\mathrm{Im}(z\overline{\zeta})$$

то

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\right) = \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} = \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{i\theta} - z|^2}$$

Кроме того,

$$d\zeta = d\Big(Re^{i\theta}\Big) = Re^{i\theta}\,i\,d\theta = i\zeta d\theta$$

Подставляя полученные выражения в формулу (1), получаем

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\mathrm{Re}\int_0^{2\pi} u_0\Big(Re^{i\theta}\Big)\,\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\,d\theta = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\zeta|=R} u_0(\zeta)\,\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\cdot\frac{d\zeta}{\zeta}\right]$$

Таким образом,

$$u(z) = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\zeta|=R} u_0(\zeta)\,\frac{(\zeta + z)d\zeta}{(\zeta - z)\zeta}\right] \tag{2}$$

и мы можем перейти к решению задачи из домашнего задания.

Задача 1 *Решить в единичном круге задачу Дирихле*

$$\Delta u = 0,$$
$$u(e^{i\theta}) = \frac{4 + 5\cos\theta}{(5 + 4\cos\theta)^2}$$

Решение. Преобразуем краевое условие, введя обозначение $\zeta = e^{i\theta}$

$$u_0(\zeta) = \frac{4 + 5\cos\theta}{(5 + 4\cos\theta)^2} = \frac{4 + \frac{5}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)}{\left(5 + 2\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)\right)^2} = \frac{4 + \frac{5}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)}{\left(5 + 2\zeta + \frac{2}{\zeta}\right)^2} =$$

$$= \frac{\zeta(5\zeta^2 + 8\zeta + 5)}{2(2\zeta^2 + 5\zeta + 2)^2}$$

Разложим знаменатель дроби на множители. Для этого решим квадратное уравнение

$$2\zeta^2 + 5\zeta + 2 = 0$$

$$(\zeta)_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{-5 \pm 3}{4} = -2; -\frac{1}{2}$$

Таким образом,

$$2\zeta^2 + 5\zeta + 2 = 2(\zeta + 2)\left(\zeta + \frac{1}{2}\right)$$

Подставляя это разложение в формулу для $u_0(\zeta)$, окончательно получаем

$$u_0(\zeta) = \frac{\zeta(5\zeta^2 + 8\zeta + 5)}{8(\zeta + 2)^2\left(\zeta + \frac{1}{2}\right)^2}$$

По формуле Пуассона (2) вычислим решение задачи Дирихле

$$u(z) = \operatorname{Re}\left[\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta|=1} u_0(\zeta)\, \frac{(\zeta + z)d\zeta}{(\zeta - z)\zeta}\right] =$$

$$= \operatorname{Re}\left[\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta|=1} \frac{\zeta(5\zeta^2 + 8\zeta + 5)}{8(\zeta + 2)^2\left(\zeta + \frac{1}{2}\right)^2}\, \frac{(\zeta + z)d\zeta}{(\zeta - z)\zeta}\right] =$$

$$= \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\zeta|=1}\frac{(5\zeta^2+8\zeta+5)(\zeta+z)d\zeta}{2(\zeta+2)^2(2\zeta+1)^2(\zeta-z)}\right] \tag{3}$$

Введем обозначение для подынтегральной функции

$$f(\zeta)=\frac{(5\zeta^2+8\zeta+5)(\zeta+z)}{2(\zeta+2)^2(2\zeta+1)^2(\zeta-z)}$$

Для вычисления контурного интеграла по окружности $|\zeta| = 1$ будем применять теорему Коши о вычетах. С этой целью исследуем особые точки функции $f(\zeta)$:

- $\zeta = -2$ – полюс 2-го порядка, лежит **вне** круга $|\zeta| \le 1$;
- $\zeta = -\dfrac{1}{2}$ – полюс 2-го порядка, лежит **внутри** круга $|\zeta| \le 1$;
- $\zeta = z$ – полюс 1-го порядка, лежит **внутри** круга $|\zeta| \le 1$;
- $\zeta = \infty$ – устранимая особая точка, лежит **вне** круга $|\zeta| \le 1$.

Поскольку при $\zeta \to \infty$ подынтегральная функция

$$f(\zeta) \sim \frac{5}{8\zeta^2}$$

то вычет в точке $\zeta = \infty$ найти очень легко. Он равен нулю.

В связи с этим, будем вычислять контурный интеграл (3), считая, что окружность $|\zeta| = 1$ ограничивает внешность единичного круга. Тогда

$$u(z)=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\zeta|=1} f(\zeta)d\zeta\right]=-\mathrm{Re}\left[\operatorname*{res}_{\zeta=-2} f(\zeta)+\operatorname*{res}_{\zeta=\infty} f(\zeta)\right]=-\mathrm{Re}\operatorname*{res}_{\zeta=-2} f(\zeta)$$

Найдем вычет $f(\zeta)$ в точке $\zeta = -2$. Поскольку $\zeta = -2$ является полюсом 2 порядка, то

$$\operatorname*{res}_{\zeta=-2} f(\zeta)=\lim_{\zeta\to-2}\left[(\zeta+2)^2 f(\zeta)\right]'=\left[\frac{(5\zeta^2+8\zeta+5)(\zeta+z)}{2(2\zeta+1)^2(\zeta-z)}\right]'\Bigg|_{\zeta=-2}=$$

$$=\left[\frac{(10\zeta+8)(\zeta+z)+(5\zeta^2+8\zeta+5)}{2(2\zeta+1)^2(\zeta-z)}-\frac{2(5\zeta^2+8\zeta+5)(\zeta+z)}{(2\zeta+1)^3(\zeta-z)}-\right.$$

$$
- \frac{(5\zeta^2 + 8\zeta + 5)(\zeta + z)}{2(2\zeta + 1)^2(\zeta - z)^2} \Bigg] \Bigg|_{\zeta = -2} =
$$

$$
= \frac{(-12)(-2+z) + 9}{2(-3)^2(-2-z)} - \frac{2 \cdot 9(-2+z)}{(-3)^3(-2-z)} - \frac{9(-2+z)}{2(-3)^2(-2-z)^2} =
$$

$$
= -\frac{33 - 12z}{18(z+2)} - \frac{2(z-2)}{3(z+2)} - \frac{z-2}{2(z+2)^2} = \frac{4z - 11}{6(z+2)} - \frac{4z-8}{6(z+2)} - \frac{3z-6}{6(z+2)^2} =
$$

$$
= \frac{-3(z+2) - 3z + 6}{6(z+2)^2} = \frac{-z}{(z+2)^2}
$$

Таким образом,

$$
u(z) = -\mathrm{Re} \operatorname*{res}_{\zeta=-2} f(\zeta) = \mathrm{Re}\frac{z}{(z+2)^2} = \mathrm{Re}\frac{z(\overline{z}+2)^2}{|z+2|^4} = \mathrm{Re}\frac{z\overline{z}^2 + 4|z|^2 + 4z}{|z+2|^4} =
$$

$$
= \frac{|z|^2}{|z+2|^4}\,\mathrm{Re}\overline{z} + \frac{4|z|^2}{|z+2|^4} + \frac{4}{|z+2|^4}\,\mathrm{Re}z = \frac{|z|^2 + 4}{|z+2|^4}\,\mathrm{Re}z + \frac{4|z|^2}{|z+2|^4}
$$

Записывая z в виде $z = x + iy$, получаем ответ в виде функции двух действительных переменных

$$
u(x,y) = \frac{(x^2 + y^2 + 4)x + 4x^2 + 4y^2}{\left((x+2)^2 + y^2\right)^2}
$$

Ответ. $u(x,y) = \dfrac{(x^2 + y^2 + 4)x + 4x^2 + 4y^2}{\left((x+2)^2 + y^2\right)^2}$

Спасибо за внимание.
Не болейте!