Конформные отображения (часть 3)

Самарова С.С.

ФОПФ, 3 курс, ТФКП

Учебное пособие для дистанционных занятий

В данном пособии мы продолжаем изучать методы решения задач, в которых требуется построить конформное отображение заданной области расширенной комплексной плоскости на другую заданную область.

Принцип симметрии

Рассмотрим области D и G расширенной комплексной плоскости и отображение $f(z) : D \to G$, удовлетворяющие следующим условиям:

- граница области D содержит участок γ, лежащий на прямой l, причем вся область D расположена по одну сторону от прямой l;
- граница области G содержит участок γ_1, лежащий на прямой l_1, причем вся область G расположена по одну сторону от прямой l_1;
- функция $f(z)$ конформно отображает область D на область G, непрерывна на $D \cup \gamma$ и $f(\gamma) = \gamma_1$ (рис.1).

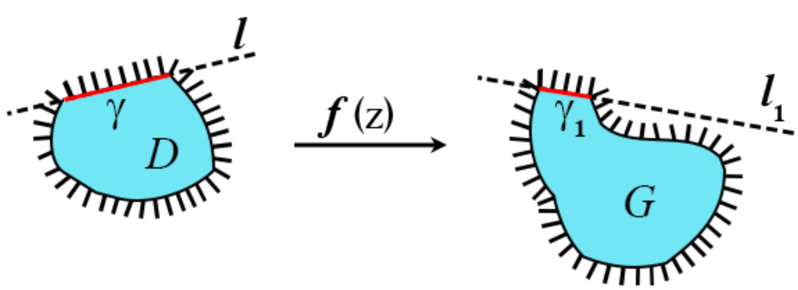

Рис.1

Обозначим через D^* область, симметричную области D относительно прямой l, а через G^* область, симметричную области G относительно прямой l_1 (рис.2).

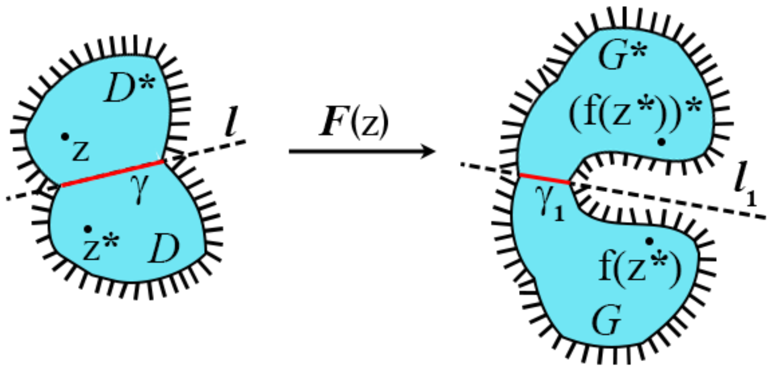

Рис.2

Тогда функция

$$F(z) = \begin{cases} f(z), & z \in D, \\ \big(f(z^*)\big)^*, & z \in D^*, \end{cases}$$

конформно отображает область $D \cup \gamma \cup D^*$ на область $G \cup \gamma_1 \cup G^*$ (рис.2).

Покажем, как применяется принцип симметрии на следующем примере.

Задача 1 («Крест») *Отобразить конформно на верхнюю полуплоскость область, изображенную на рис.3*

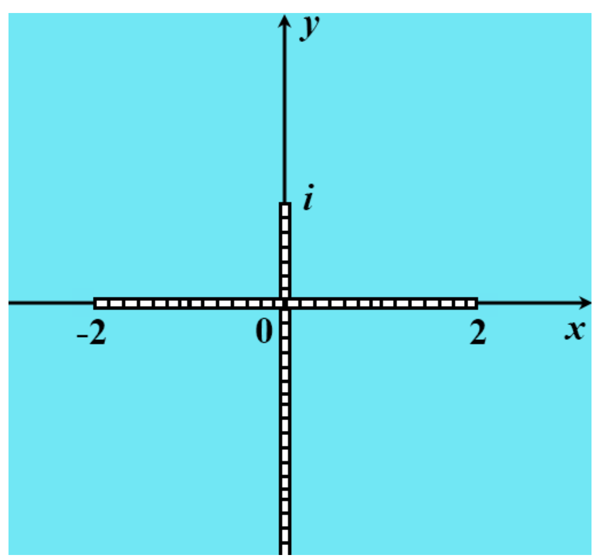

Рис.3

Решение.

Область, изображенная на рис.3, является симметричной относительно мнимой оси, поэтому искомое конформное отображение можно построить с помощью принципа симметрии.

Следует отметить, что применение к области, изображенной на рис.3, функции $f(z) = z^2$ является грубой ошибкой, поскольку при этом нарушается однолистность. Причина заключается в том, что область слишком велика. Принцип симметрии дает возможность сначала построить конформное отображение правой половины области на верхнюю полуплоскость, а затем продолжить его конформно на всю область.

Для применения принципа симметрии рассмотрим в качестве области D часть исходной области, выделяемую условием $\mathrm{Re}z > 0$, а в качестве γ – луч $[i, +i\infty)$ на мнимой оси (рис.4).

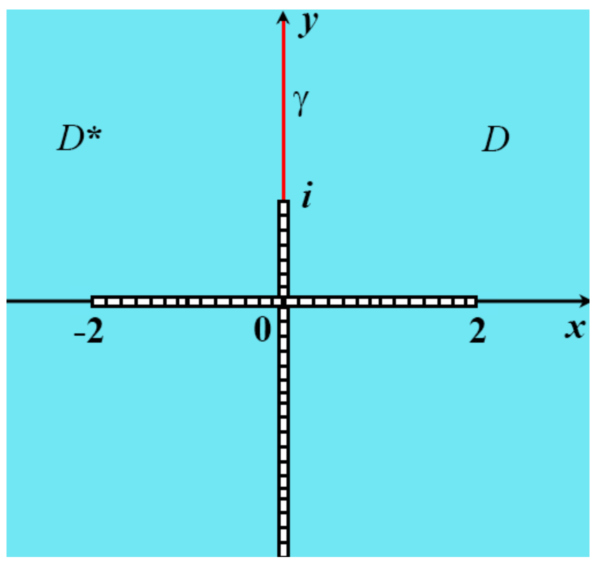

Рис.4

Итак, построим отображение области D на верхнюю полуплоскость.

Специально отметим, что при построении необходимо следить за тем, куда переходит кривая γ, поскольку ее образ γ_1 используется при применении принципа симметрии.

Сначала повернем область D на 90° против часовой стрелки вокруг точки $z = 0$ и получим хорошо знакомый «столбик»

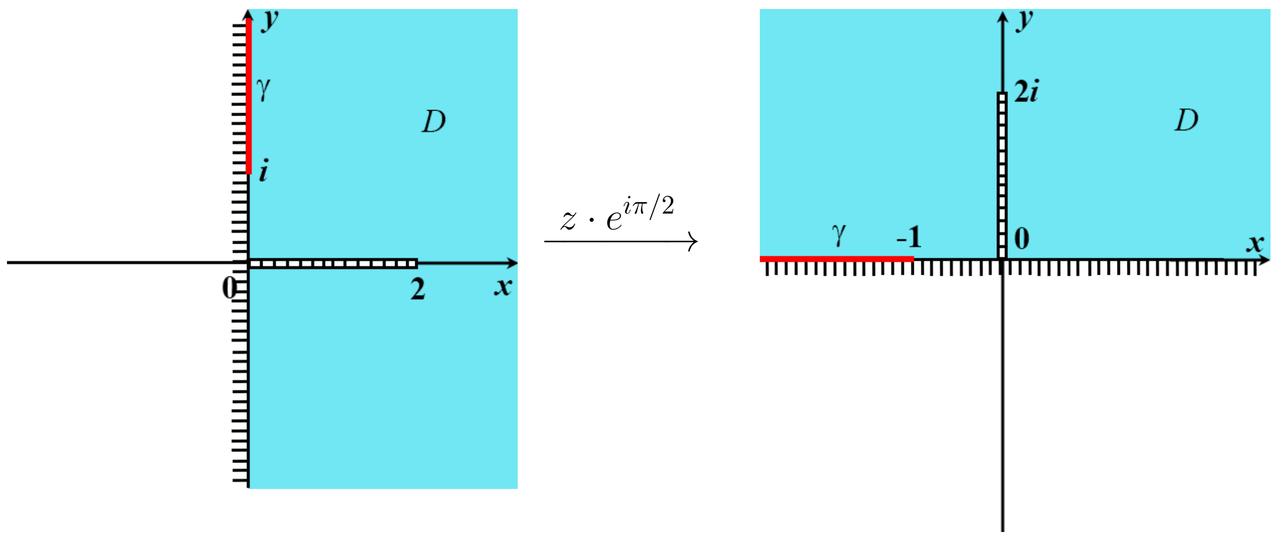

Рис.5

Применим функцию z^2 . Будем считать, что в области D аргумент точек z изменяется от 0 до π . Тогда аргумент z^2 будет изменяться от 0 до 2π , причем точки луча γ перейдут в точки с аргументом 2π , следовательно, окажутся на нижнем берегу разреза (рис.6)

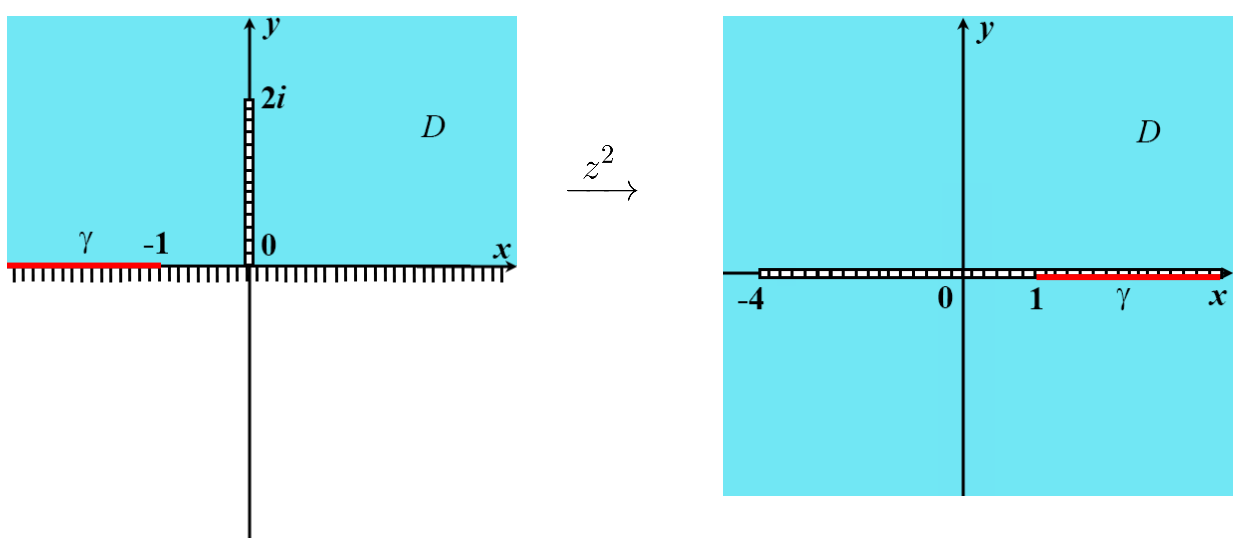

Рис.6

Подвинем разрез так, чтобы он совпал с положительным направлением действительной оси (рис.7).

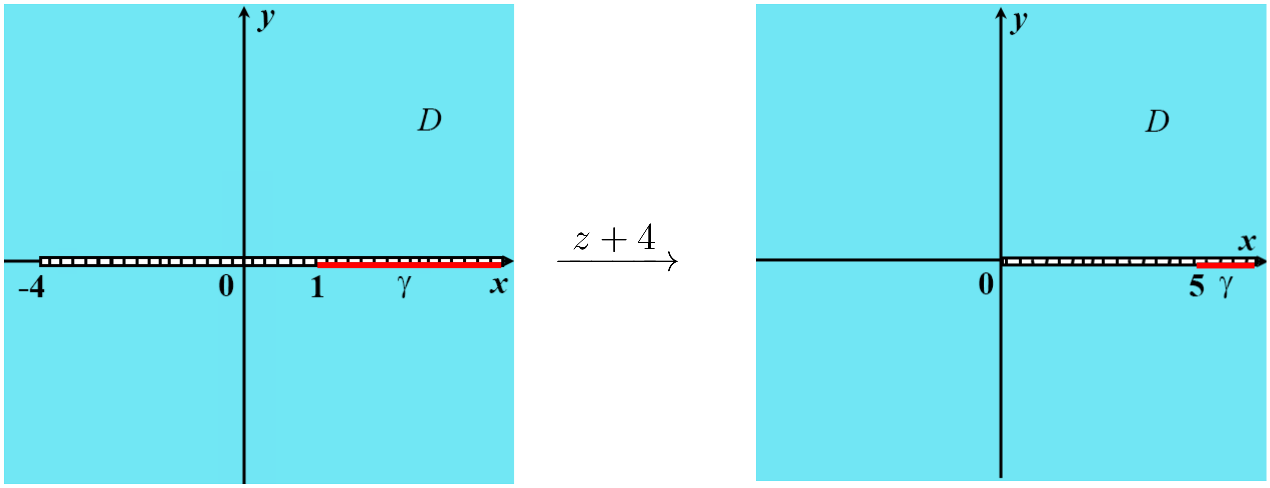

Рис.7

Наконец, применим функцию $f(z)$, которая является регулярной ветвью $\sqrt{z}$. Для этого выберем такую регулярную ветвь $f(z)$, на которой $f(1+i\cdot 0)=1$. Заметим, что при этом точки луча γ , которые находились на нижнем берегу разреза и имели аргумент 2π передут в точки с аргументом π (рис.8).

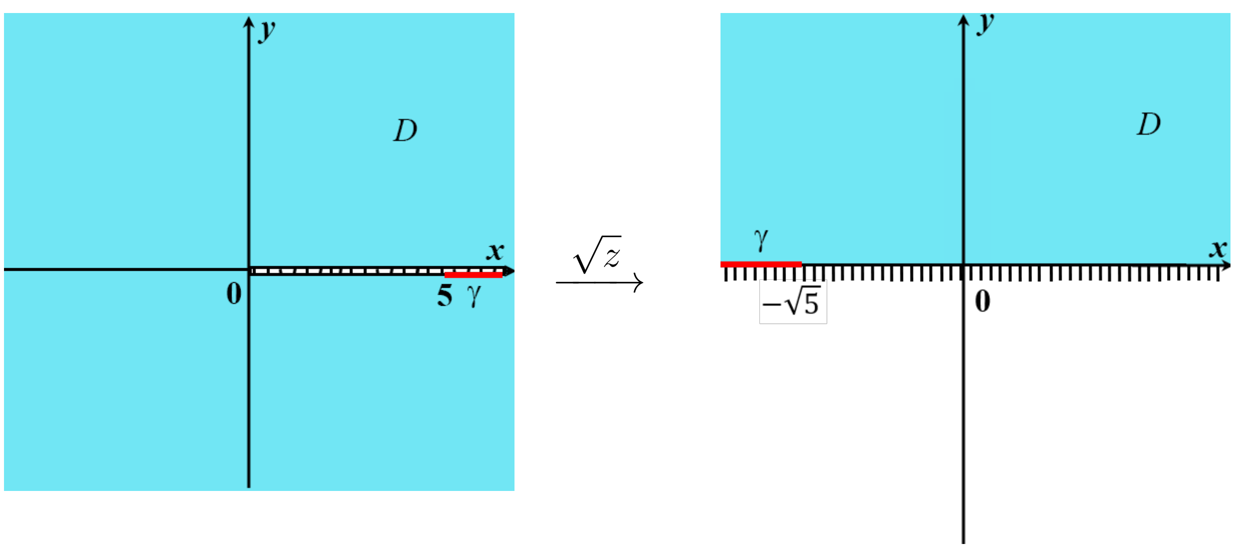

Рис.8

Теперь воспользуемся принципом симметрии и продолжим конформно построенное выше отображение на вторую половину исходной области D^* (рис.9).

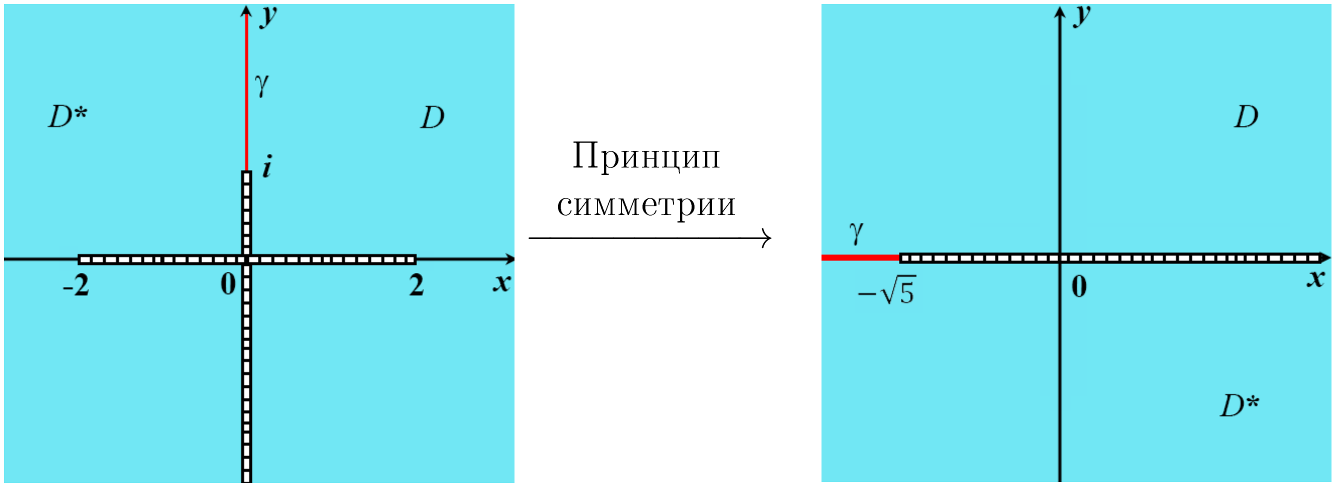

Рис.9

В результате этого

- мнимая ось перейдет в действительную;

- половина исходной области (область D) перейдет в верхнюю полуплоскость;

- симметричная области D относительно мнимой оси область D^* (вторая половина исходной области) перейдет в нижнюю полуплоскость;

- луч γ в исходной области перейдет в луч $(-\infty, -\sqrt{5})$ действительной оси (входит в образ);

- луч $(-i\infty, i]$ в исходной области перейдет в разрез $[-\sqrt{5}, +\infty)$ действительной оси (не входит в образ);

Таким образом, получилась вся плоскость с разрезом $[-\sqrt{5}, +\infty)$ по действительной оси.

Теперь еще раз подвинем разрез так, чтобы он совместился с положительным направлением действительной оси (рис.10).

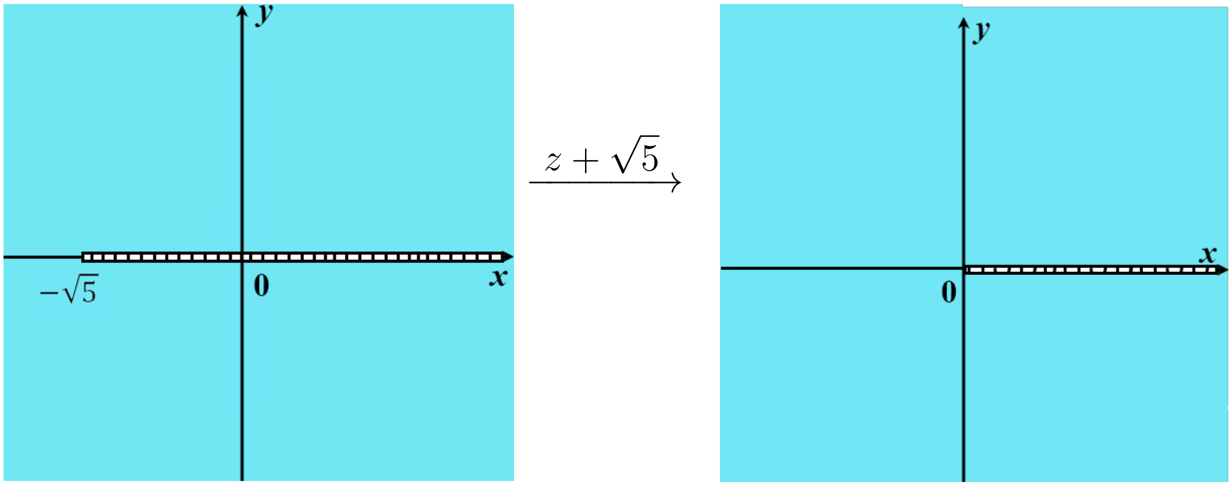

Рис.10

Снова применим функцию, которая является регулярной ветвью $\sqrt{z}$. Для этого выберем такую регулярную ветвь $f(z)$, на которой $f(1+i\cdot 0) = 1$.

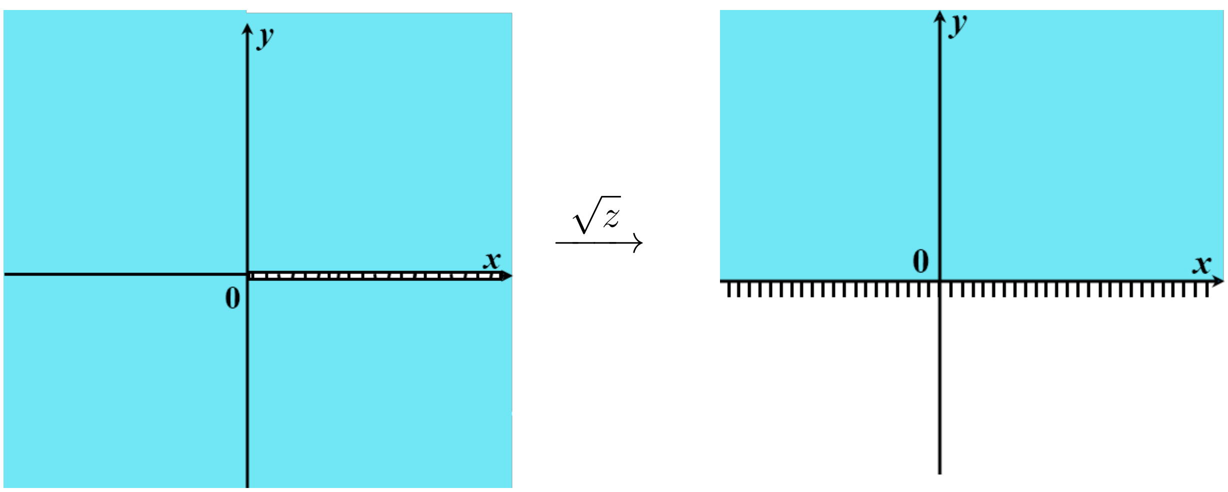

Рис.11

Решение задачи 1 закончено.

Теорема Римана

Теорема Римана. Пусть D - односвязная область расширенной комплексной плоскости, граница которой состоит более, чем из одной точки. Тогда существует конформное отображение $w = f(z)$ области D на единичный круг $|w| < 1$. Такое отображение будет единственным, если выполнены условия нормировки:

$$f(z_0) = w_0, \quad \arg f'(z_0) = \alpha,$$

где z_0 и w_0 – заданные точки $(z_0 \in D, \quad |w_0| < 1)$, а α – заданное действительное число.

Замечание. Теорема Римана не применима, если область D является комплексной плоскостью $\mathbb{C}$ или расширенной комплексной плоскостью $\overline{\mathbb{C}}$.

Задача 2 *Доказать, что не существует конформных отображений, переводящих комплексную плоскость* $\mathbb{C}$ *и расширенную комплексную плоскость* $\overline{\mathbb{C}}$ *на единичный круг.*

Решение. Предположим, что такие конформные отображения существуют. Тогда эти отображения осуществляются голоморфными функциями, ограниченными во всей комплексной плоскости. В силу теоремы Лиувилля такие функции являются константами, а, значит, не могут задавать однолистные отображения.

Задача 3 *Пусть* z_0 *– заданная точка единичного круга* $(|z_0| < 1)$ *, а* α *– заданное действительное число.*

Построить дробно-линейное отображение $w = f(z)$ *единичного круга* $|z| < 1$ *на единичный круг* $|w| < 1$ *, при котором*

$$f(z_0) = 0, \quad arg f'(z_0) = \alpha.$$

Решение.

Поскольку при дробно-линейном отображении $w = f(z)$ точка z_0 должна перейти в центр круга $|w| < 1$, то по свойству дробно-линейных отображений точка z_0^* , симметричная точке z_0 относительно окружности $|z| = 1$, должна будет перейти в точку, симметричную центру окружности $|w| = 1$, то есть в ∞.

Таким образом, искомое дробно-линейное отображение имеет вид

$$f(z) = A\,\frac{z - z_0}{z - z_0^*}$$

где A – любое комплексное число.

Докажем, что

$$z_0^* = \frac{1}{\overline{z_0}}$$

Для этого заметим, что точки z_0^* и z_0 лежат на одном луче, выходящем из $z = 0$, причем
$$|z_0| \cdot |z_0^*| = 1$$
Тогда, записывая z_0 в виде
$$z_0 = |z_0| \cdot e^{i\varphi},$$
получаем
$$z_0^* = |z_0^*| \cdot e^{i\varphi} = \frac{1}{|z_0| \cdot e^{-i\varphi}} = \frac{1}{\overline{z_0}}$$
Таким образом, искомое дробно-линейное отображение можно переписать в виде
$$f(z) = A\,\frac{z - z_0}{z - z_0^*} = \tilde{A}\,\frac{z - z_0}{1 - z \cdot \overline{z_0}}$$
Поскольку точки 0 и ∞ симметричны относительно любой окружности с центром в нуле, то нужно еще потребовать, чтобы точки единичной окружности $|z| = 1$ перешли в точки единичной окружности $|w| = 1$.

Поскольку единичная окружность $|z| = 1$ переходит в окружность, то найдем её радиус
$$|w| = |f(z)| = \left|\tilde{A}\,\frac{z - z_0}{1 - z \cdot \overline{z_0}}\right| = |\tilde{A}|\,\frac{|z - z_0|}{|1 - z \cdot \overline{z_0}|} = |\tilde{A}|\,\frac{|z| \cdot |1 - z_0\overline{z}|}{|1 - z \cdot \overline{z_0}|} =$$
$$= |\tilde{A}|\,\frac{|1 - z_0\overline{z}|}{|1 - z \cdot \overline{z_0}|} = |\tilde{A}|\,\frac{|\overline{1 - z \cdot \overline{z_0}}|}{|1 - z \cdot \overline{z_0}|} = |\tilde{A}|$$
Значит,
$$|\tilde{A}| = 1, \quad \Rightarrow \quad \tilde{A} = e^{i\beta}$$
Найдем теперь число β из условия $\arg f'(z_0) = \alpha$. Поскольку
$$f'(z) = e^{i\beta}\,\frac{(1 - z \cdot \overline{z_0}) + \overline{z_0}(z - z_0)}{(1 - z \cdot \overline{z_0})^2}$$
то
$$f'(z_0) = e^{i\beta}\,\frac{(1 - z_0 \cdot \overline{z_0}) + \overline{z_0}(z_0 - z_0)}{(1 - z_0 \cdot \overline{z_0})^2} = e^{i\beta}\,\frac{1 - |z_0|^2}{(1 - |z_0|^2)^2} = e^{i\beta}\,\frac{1}{1 - |z_0|^2}$$
Поскольку
$$\frac{1}{1 - |z_0|^2}$$

является действительным числом, то

$$\arg f'(z_0) = \beta$$

Таким образом, $\beta = \alpha$ и требуемое дробно-линейное отображение имеет вид

$$f(z) = e^{i\alpha} \frac{z - z_0}{1 - z \cdot \overline{z_0}}$$

Решение задачи 3 закончено.

Задача 4 *Найти общий вид конформных отображений единичного круга* $|z| < 1$ *на единичный круг* $|w| < 1$.

Решение.

Пусть функция $f(z)$ задает конформное отображение единичного круга $|z| < 1$ на единичный круг $|w| < 1$. В таком случае в единичном круге $|z| < 1$ найдется точка z_0 такая, что $f(z_0) = 0$. Обозначим

$$\alpha = \arg f'(z_0)$$

Как мы только что выяснили при решении задачи 3, дробно-линейное отображение

$$g(z) = e^{i\alpha} \frac{z - z_0}{1 - z \cdot \overline{z_0}}$$

также является конформным отображением единичного круга $|z| < 1$ на единичный круг $|w| < 1$, для которого

$$f(z_0) = 0, \quad \arg f'(z_0) = \alpha \tag{1}$$

По теореме Римана существует только одно конформное отображение единичного круга $|z| < 1$ на единичный круг $|w| < 1$, удовлетворяющее условиям (1). Значит, $f(z) = g(z)$.

Таким образом, $f(z)$ – это дробно-линейное отображение, имеющее вид

$$f(z) = e^{i\alpha} \frac{z - z_0}{1 - z \cdot \overline{z_0}}$$

Решение задачи 4 закончено.

На этом мы завершаем изучение темы «Конформные отображения».

Спасибо за внимание.
Не болейте!