Конформные отображения (часть 2)

Самарова С.С.

ФОПФ, 3 курс, ТФКП

Учебное пособие для дистанционных занятий

В данном пособии мы продолжаем изучать методы решения задач, в которых требуется построить конформное отображение заданной области расширенной комплексной плоскости на другую заданную область.

Функция Жуковского

Определение 1. Функцией Жуковского называют функцию

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \tag{1}$$

Утверждение 1. Функция Жуковского конформна в любой области расширенной комплексной плоскости, которая не содержит точек z_1, z_2 $(z_1 \neq z_2)$ таких, что $z_1 \cdot z_2 = 1$.

Замечание 1. В отличие от дробно-линейных отображений функция Жуковского не является однолистной во всей расширенной комплексной плоскости. Поэтому необходимо следить за тем, чтобы область, к которой применяется функция Жуковского в качестве конформного отображения, была областью, где эта функция однолистна.

Такими областями являются, в частности, верхняя полуплоскость, нижняя полуплоскость, внутренность единичного круга с центром в $z = 0$, внешность единичного круга с центром в $z = 0$.

Рассмотрим, куда функция Жуковского переводит линии и области в $\overline{C}$. Для этого, подставив в формулу (1) число z, выраженное в экспоненциальной форме

$$z = re^{i\varphi},$$

получаем

$$f(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2}\left(re^{i\varphi} + \frac{1}{r}e^{-i\varphi}\right) = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi + i\,\frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi = u + iv,$$

где

$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi, \quad v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi. \tag{2}$$

- Найдем, куда переходит окружность радиуса r с центром в точке $z = 0$. При $r = 1$ из формулы (2) получаем

$$u = \cos\varphi, \quad v = 0.$$

Таким образом, точки единичной полуокружности, расположенной в верней полуплоскости ($\varphi \in [0, \pi]$), проектируются на отрезок $[-1, 1]$ действительной оси (рис.1).

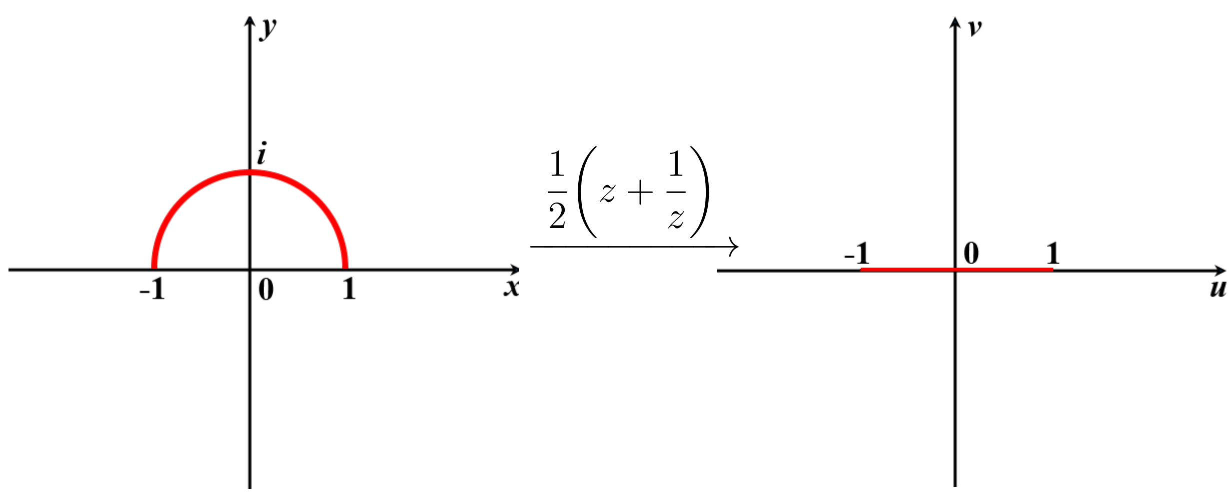


Рис.1

Точки единичной полуокружности, расположенной в нижней полуплоскости ($\varphi \in [-\pi, 0]$), также проектируются на отрезок $[-1, 1]$ действительной оси (рис.2).

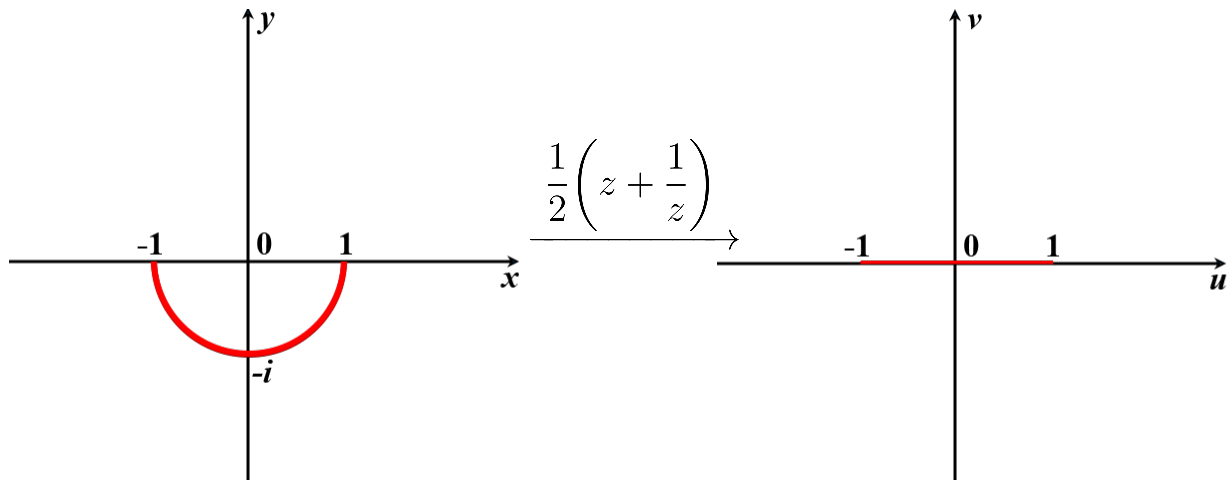


Рис.2

- При $r \neq 1$ из формулы (2) находим

$$\cos\varphi = \frac{u}{\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)}\,; \qquad \sin\varphi = \frac{v}{\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)}\,.$$

Используя основное тригонометрическое тождество, получаем

$$\frac{u^2}{\left[\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\right]^2} + \frac{v^2}{\left[\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\right]^2} = 1 \tag{3}$$

На плоскости u, v уравнение (3) задает эллипс, полуось которого на оси $0u$ больше 1.

Анализируя знаки v в формуле (2) в зависимости от φ при различных, но фиксированных, значениях r, получаем следующие результаты.

- Верхняя полуокружность при $r > 1$ переходит в верхнюю половину эллипса (3)

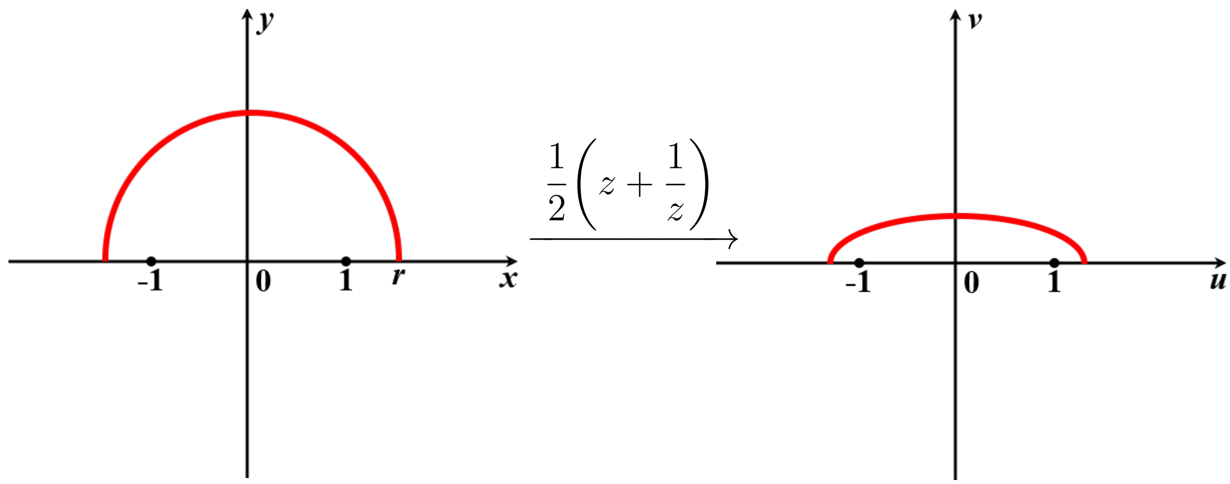


Рис.3

Рассмотрим внешность полукруга радиуса 1, расположенную в верхней полуплоскости (левая часть рис.4). Это множество является объединением всех полуокружностей с центром в нуле радиуса $r > 1$, лежащих в верхней полуплоскости.

Поскольку при применении функции Жуковского полуокружность радиуса r перейдет в верхнюю половину эллипса с полуосью по оси $0v$, равной

$$\frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right),$$

то при изменении r от 1 до $+\infty$ эта полуось эллипса будет изменяться от 0 до $+\infty$. Таким образом, внешность единичного круга в верхней полуплоскости переходит в верхнюю полуплоскость (рис.4)

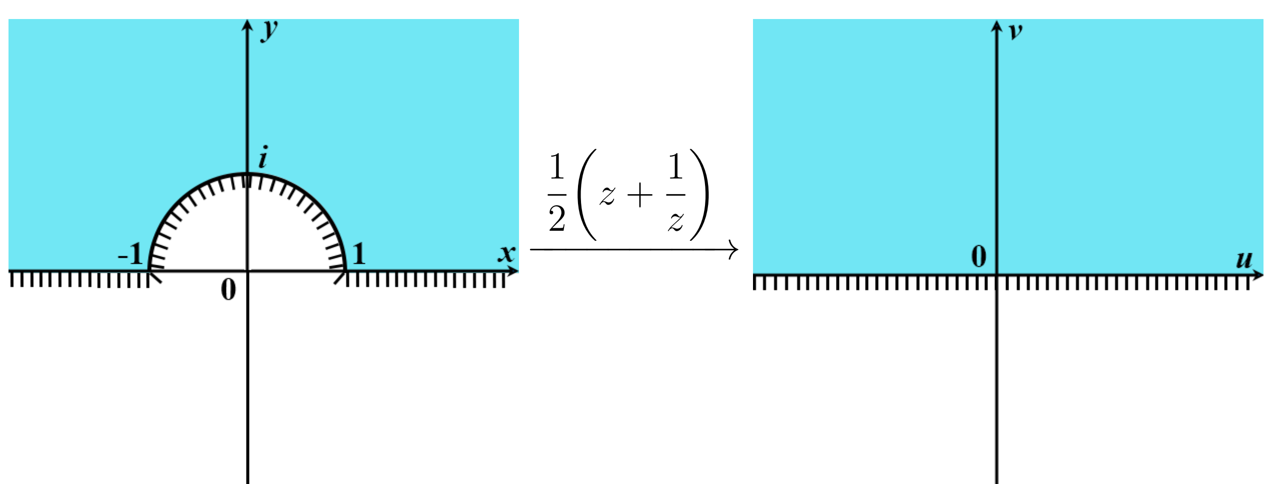


Рис.4

- Верхняя полуокружность при $r < 1$ переходит в нижнюю половину эллипса (3)

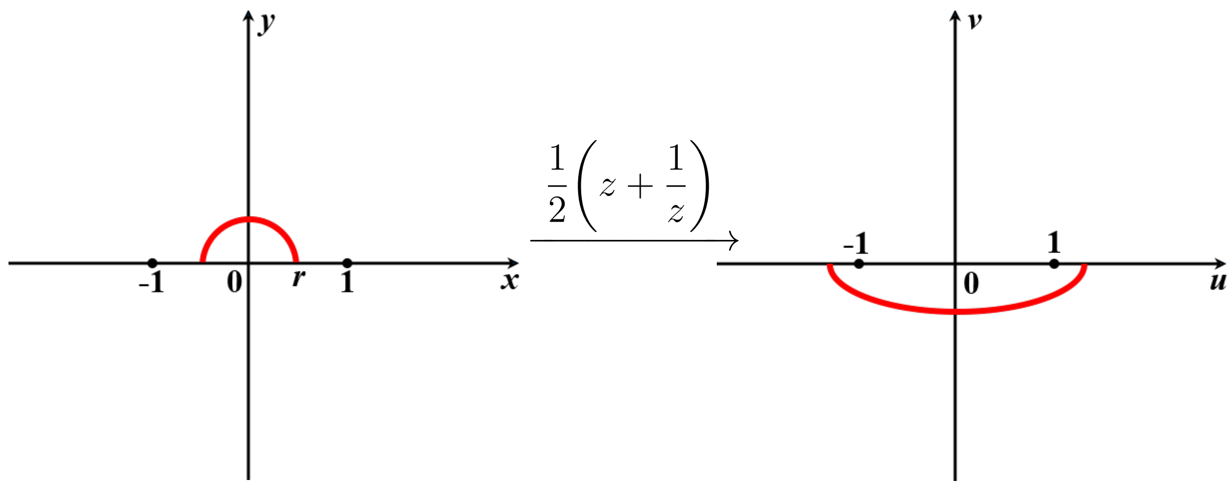


Рис.5

Внутренность единичного круга в верхней полуплоскости переходит в нижнюю полуплоскость (рис.6)

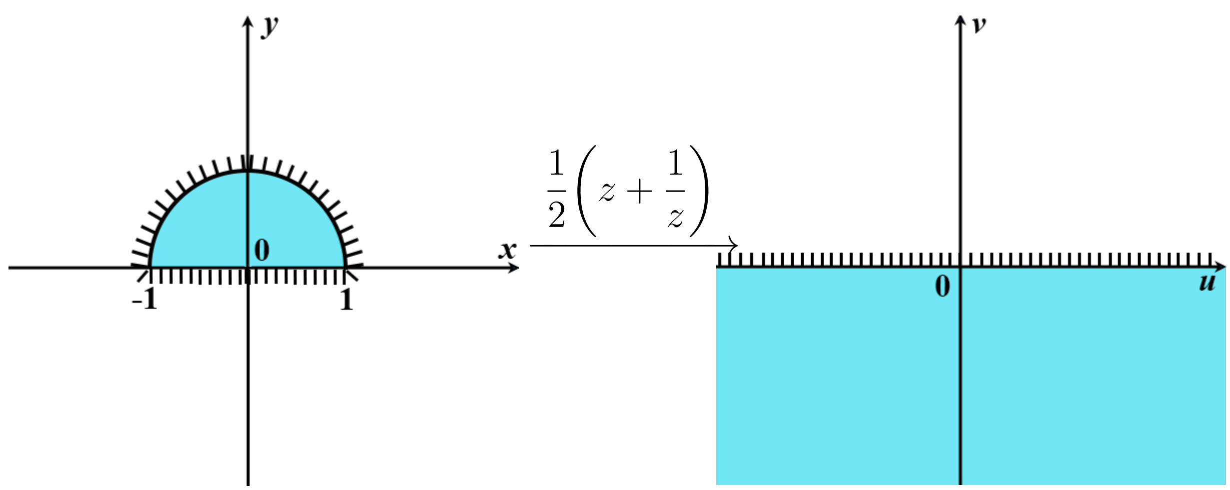


Рис.6

- Рассуждая аналогичным образом, получаем, что нижняя полуокружность при $r > 1$ переходит в нижнюю половину эллипса (3)

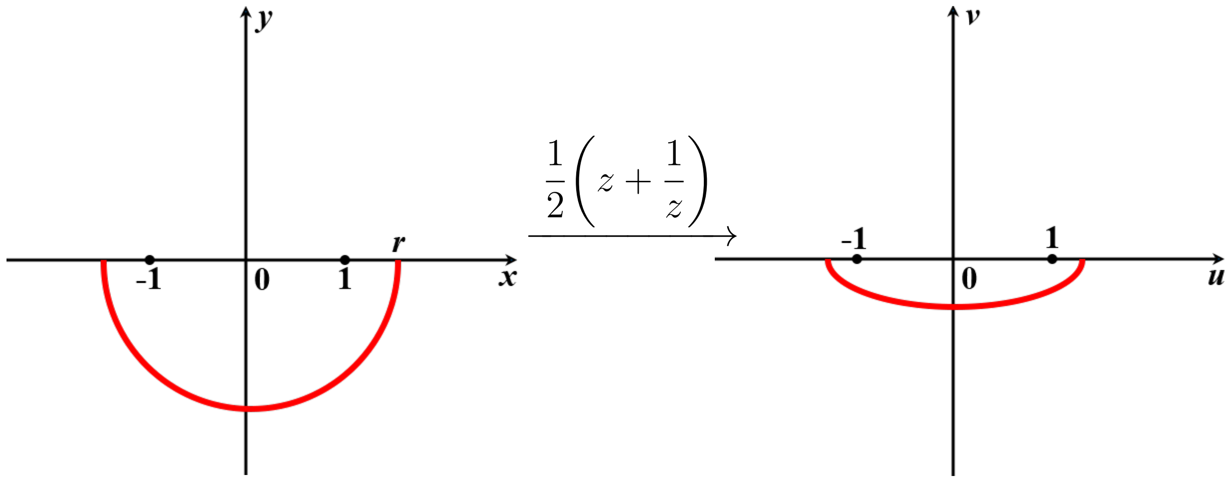


Рис.7

Внешность единичного круга в нижней полуплоскости переходит в нижнюю полуплоскость (рис.8)

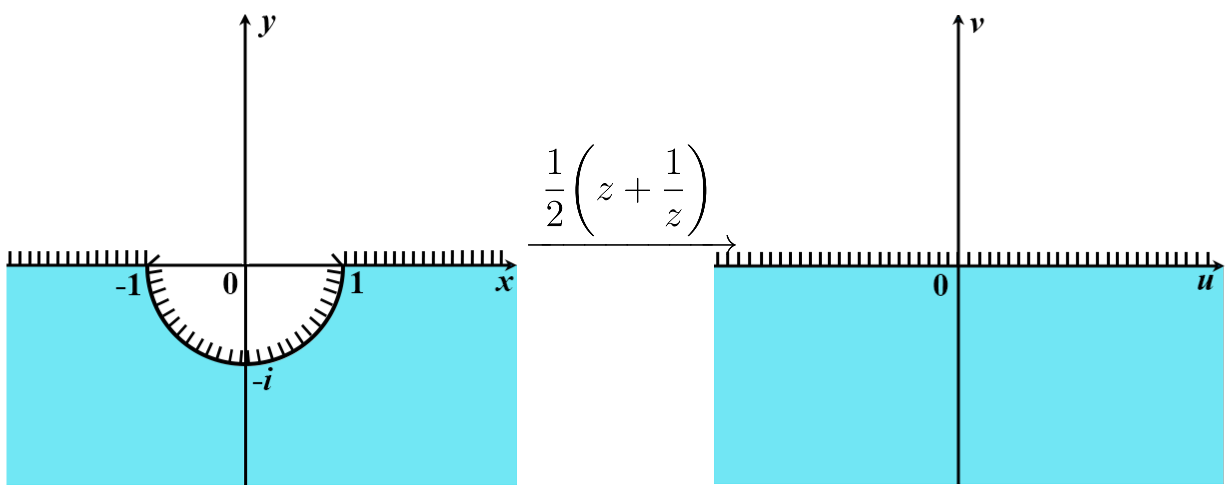


Рис.8

- Нижняя полуокружность при $r < 1$ переходит в верхнюю половину эллипса (3)

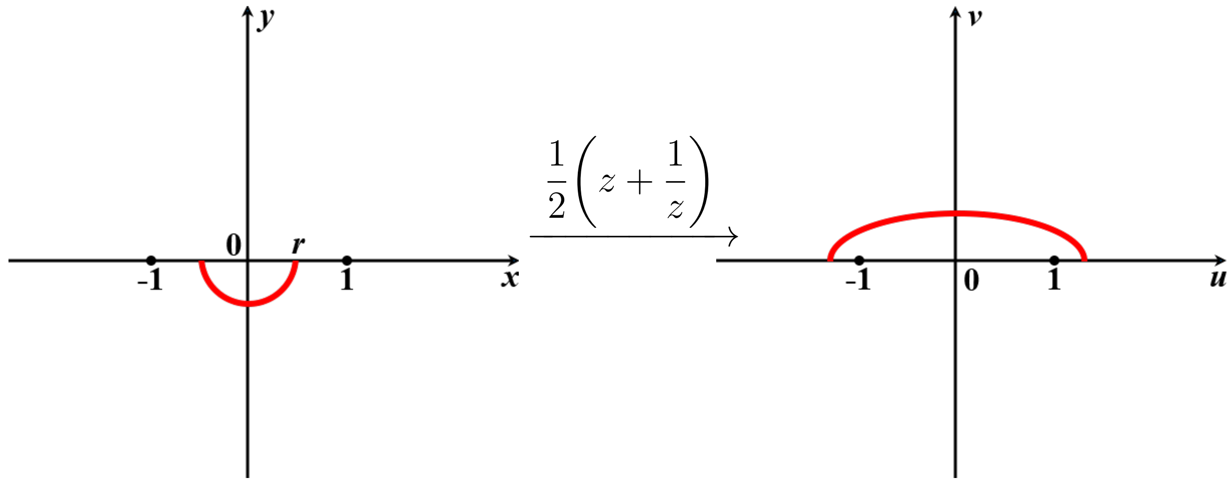


Рис.9

Внутренность единичного круга в нижней полуплоскости переходит в верхнюю полуплоскость (рис.6)

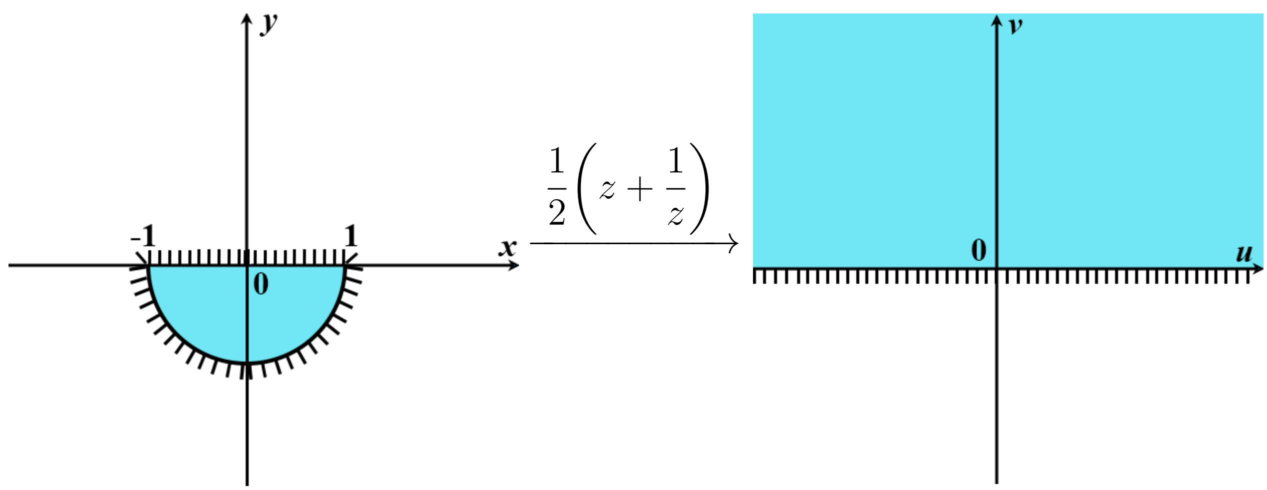


Рис.10

- Найдем теперь, куда переходят лучи, выходящие из точки $z = 0$.

  Такие лучи имеют вид

$$z = re^{i\varphi}, \qquad \varphi = \text{const}, \qquad r \in [\,0\,, +\,\infty)$$

При $\varphi = 0\,, r \neq 0$ из формул (2) находим

$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right), \qquad v = 0, \qquad r \in (\,0\,, +\,\infty)$$

С учетом неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом получаем, что луч $[0, +\infty)$ на действительной оси при применении функции Жуковского перейдет в луч $[1, +\infty)$ на действительной оси (рис.11)

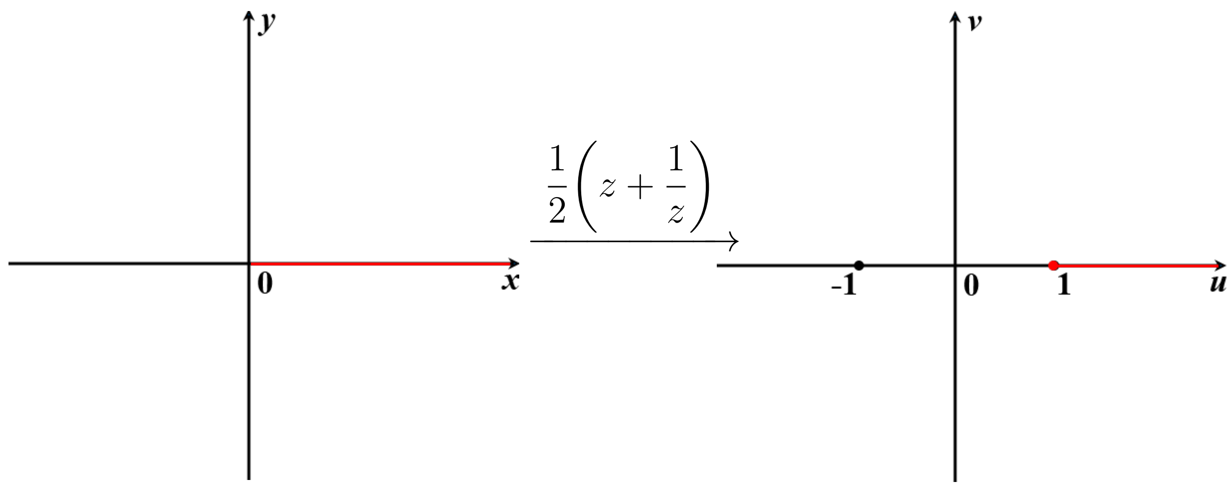


Рис.11

Точно так же, луч с $\varphi = \pi$ при применении функции Жуковского перейдет в луч $(-\infty, -1]$ на действительной оси (рис.12)

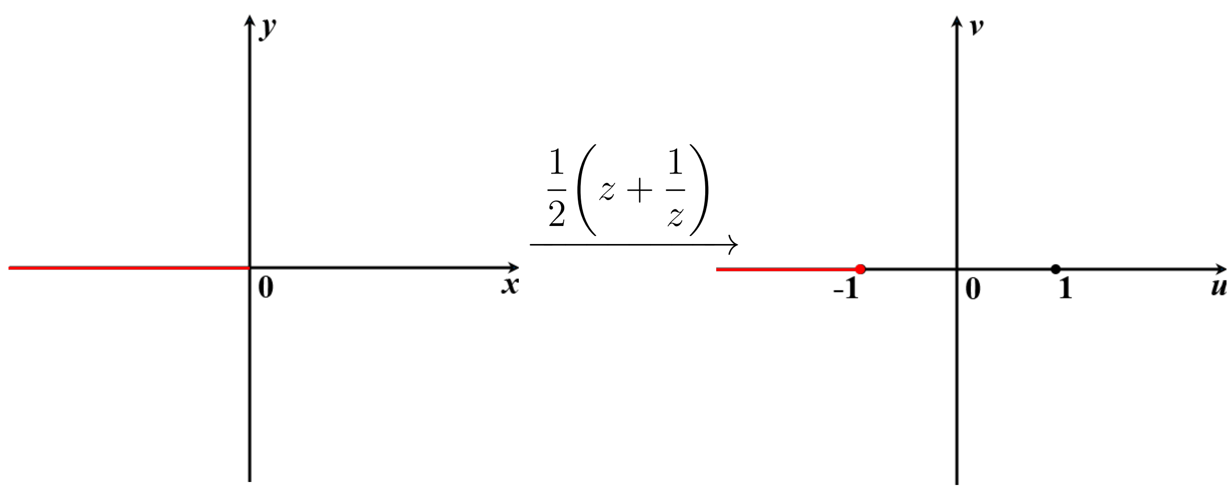


Рис.12

- При $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, $r \neq 0$ из формул (2) находим

$$u = 0, \qquad v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right), \qquad r \in (\,0\,, +\,\infty)$$

Таким образом, луч $[0, +i\infty)$ на мнимой оси при применении функции Жуковского перейдет во всю мнимую ось (рис.13)

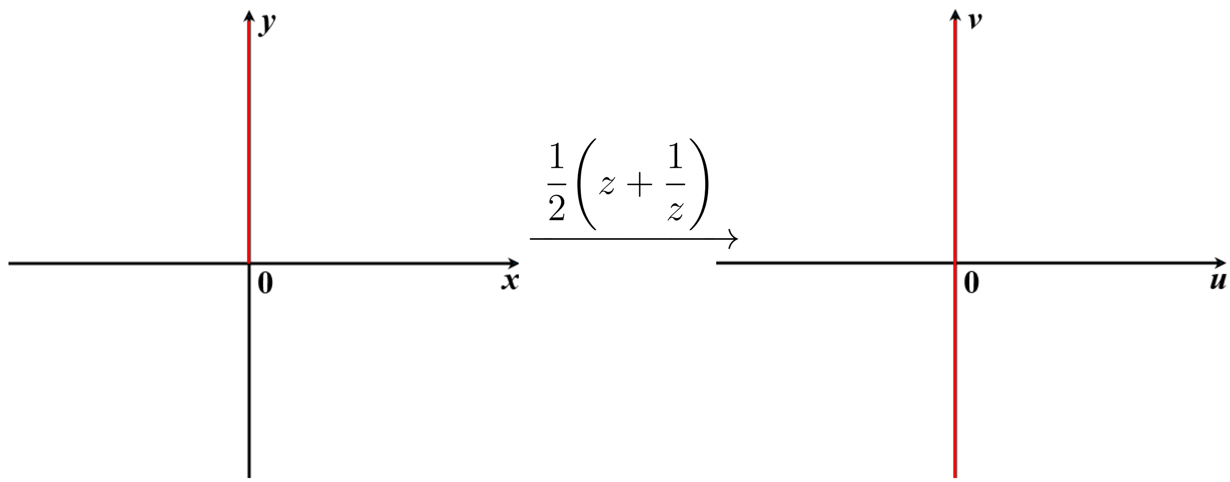


Рис.13

Точно так же, луч $[0, -i\infty)$ на мнимой оси при применении функции Жуковского перейдет во всю мнимую ось (рис.14)

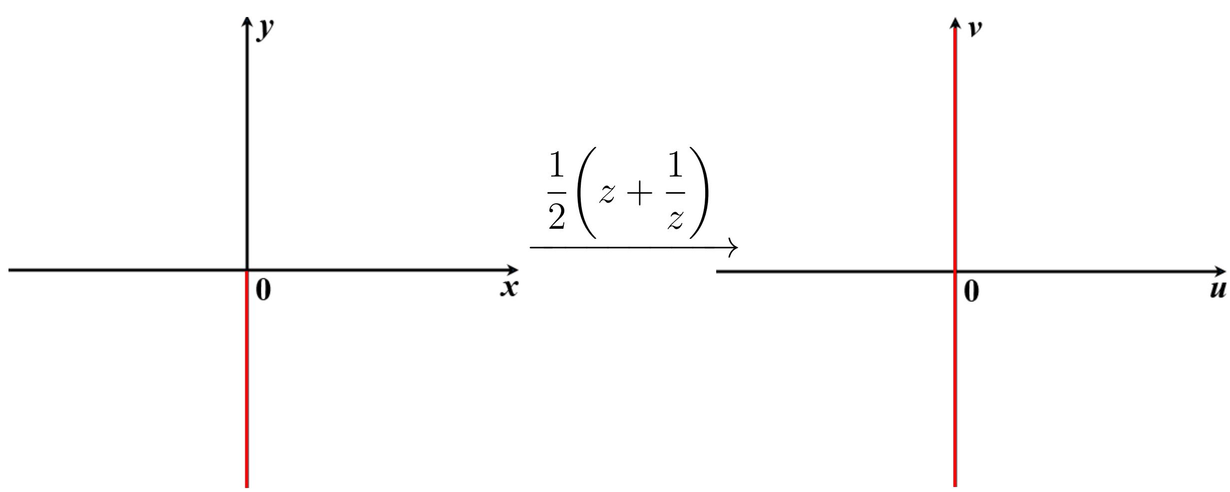


Рис.14

- При $\varphi \neq \left\{0\,;\pm\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right\}$ из формул (2) находим

$$\frac{u}{\cos\varphi}=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\,,\qquad \frac{v}{\sin\varphi}=\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right),$$

$$\frac{u^2}{\cos^2\varphi}-\frac{v^2}{\sin^2\varphi}=\frac{1}{4}\left(r+\frac{1}{r}\right)^2-\frac{1}{4}\left(r-\frac{1}{r}\right)^2=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{r}\cdot 2r=1,$$

Таким образом, при $\varphi=\mathrm{const}$ получаем на плоскости u,v уравнение гиперболы

$$\frac{u^2}{\cos^2\varphi}-\frac{v^2}{\sin^2\varphi}=1, \tag{4}$$

Поскольку при изменении r от 0 до $+\infty$ знак u сохраняется, а v изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, то при $\varphi\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ луч $\varphi=\mathrm{const}$ переходит в правую ветвь гиперболы (4), а при $\varphi\in\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$ - в её левую ветвь.

Например,

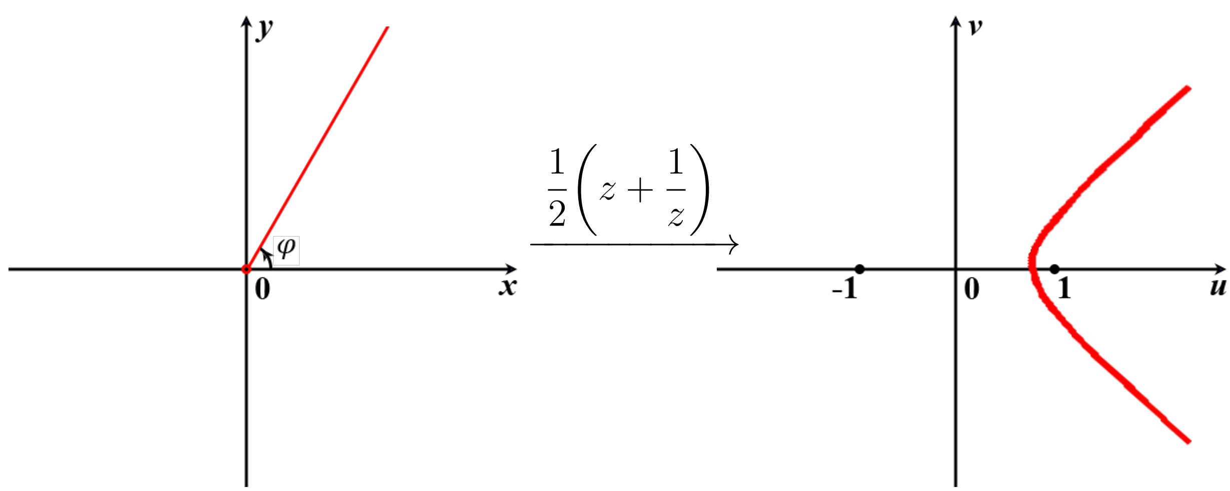


Рис.15

Покажем, как используются эти свойства при решении задач.

Задача 1 *Отобразить конформно на верхнюю полуплоскость область, изображенную на рис.16*

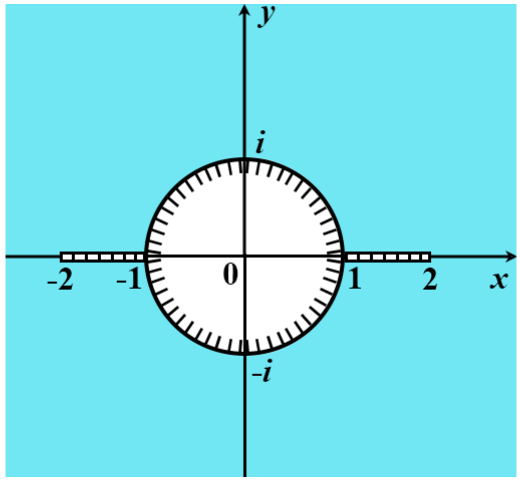


Рис.16

Решение.

Область, которую необходимо перевести в верхнюю полуплоскость, является внешностью круга радиуса 1 с центром в $z = 0$ с разрезами по действительной оси, поэтому удобно сразу же применить функцию Жуковского. В такой области функция Жуковского будет однолистной.

При выбранном конформном отображении

- внешность единичного круга в верхней полуплоскости перейдет во всю верхнюю полуплоскость;
- внешность единичного круга в нижней полуплоскости перейдет во всю нижнюю полуплоскость;
- окружность радиуса 1 в центром в нуле спроектируется в отрезок $[-1, 1]$ (не входит в образ);
- разрез по отрезку $[1, 2]$ действительной оси перейдет в отрезок $[1; 1,25]$ действительной оси (не входит в образ);
- разрез по отрезку $[-1, -2]$ действительной оси перейдет в отрезок $[-1,25; -1]$ действительной оси (не входит в образ).

Таким образом, при применении функции Жуковского получаем

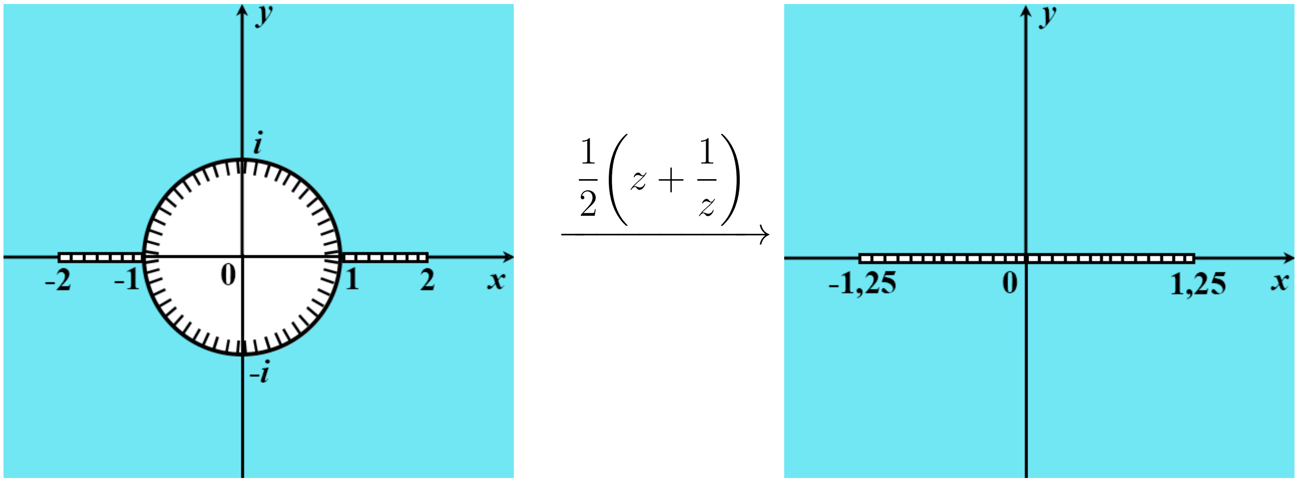


Рис.17

Теперь воспользуемся дробно-линейным отображением, чтобы перевести плоскость с разрезом по отрезку $[-1,25;1,25]$ действительной оси в плоскость с разрезом по положительному направлению действительной оси.

Напишем формулу для какого-нибудь дробно-линейного отображения, переводящего точку $z=1,25$ в ∞, а точку $z=-1,25$ в нуль.Таким отображением является, например, отображение

$$f(z)=\frac{z+1,25}{z-1,25}$$

Это отображение переводит действительную ось в действительную ось, при этом разрез, изображенный в правой части рис.17, переходит в луч действительной оси с вершиной в нуле. Однако существует два таких луча, и чтобы понять, в какой из них переходит разрез, нужно подставить в дробно-линейное отображение какую-нибудь точку на разрезе. Например, точка $z=0$ при этом дробно-линейном отображении перейдет в -1 . Таким образом, выбранное дробно-линейное отображение переведет разрез в луч $(-\infty,0]$ на действительной оси. Для того, чтобы все-таки получился луч $[0,+\infty)$, нужно просто поставить минус перед дробью:

$$f(z)=-\frac{z+1,25}{z-1,25}$$

Применяя это дробно-линейное отображение, получаем

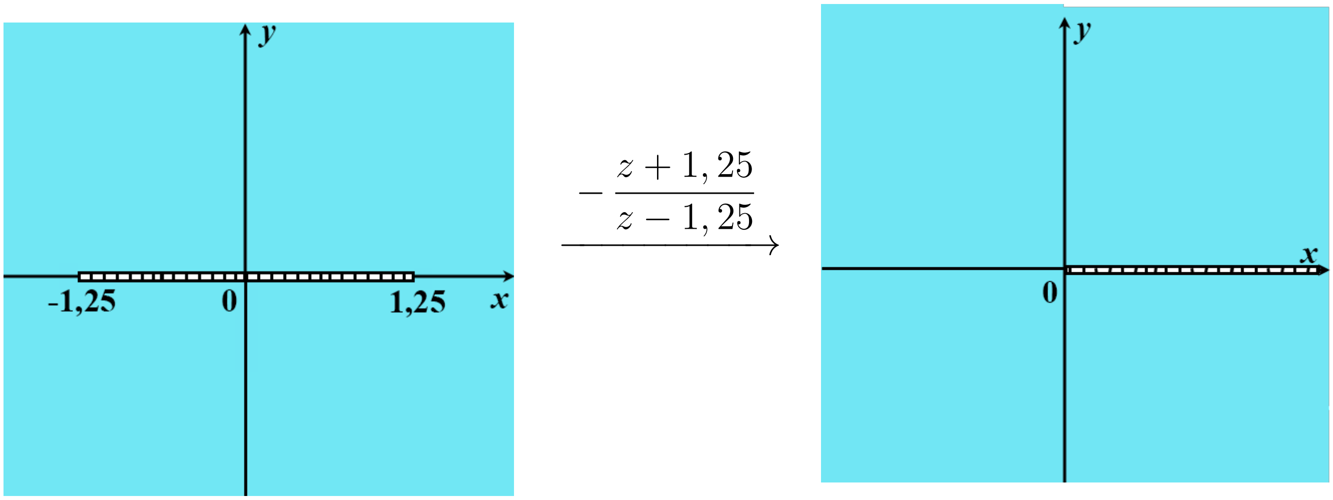


Рис.18

Наконец, применим функцию, которая является регулярной ветвью $\sqrt{z}$. Для этого выберем такую регулярную ветвь $f(z)$, на которой $f(1+i\cdot 0)=1$.

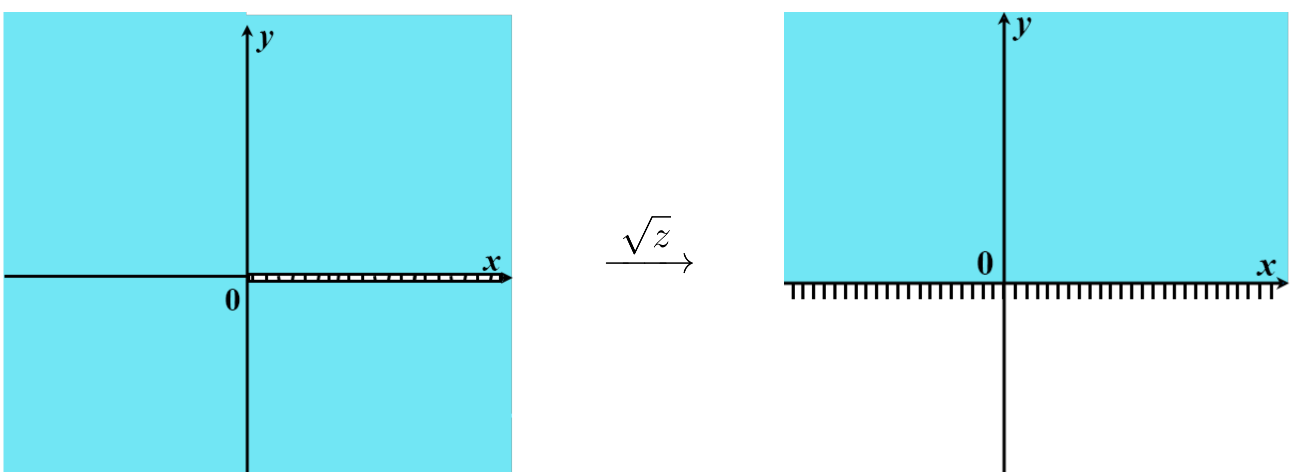


Рис.19

Решение задачи 1 закончено.

Следующая задача предлагается Вам для самостоятельного решения.

Задача 2 *Отобразить конформно на верхнюю полуплоскость область, изображенную на рис.20*

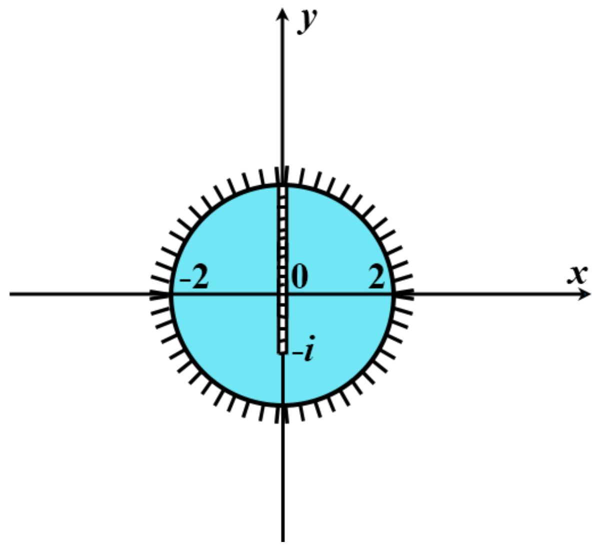


Рис.20

Задача 3 *Отобразить конформно на верхнюю полуплоскость область, изображенную на рис.21*

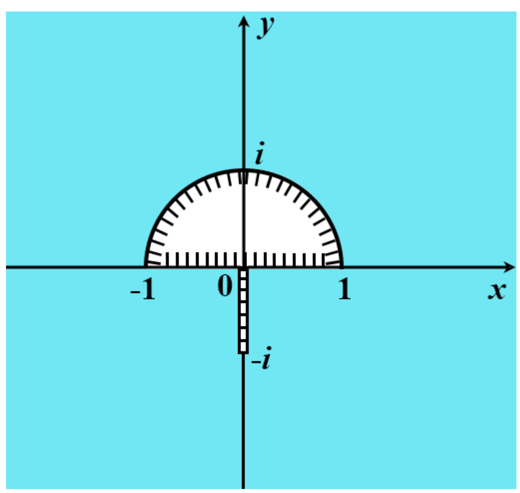


Рис.21

Решение.

Несмотря на то, что все части границы заданной области расположены на единичной окружности, а также на действительной и мнимой осях, применять функцию Жуковского к такой области нельзя. Дело в том, что в этой области функция Жуковского неоднолистна, т.к. область содержит точки

z_1, z_2 ($z_1 \neq z_2$) такие, что $z_1 \cdot z_2 = 1$. Например,

$$z_1 = 1 + i, \qquad z_2 = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2}$$

Попробуем применить дробно-линейное отображение. Поскольку не существует одной точки, в которой пересекаются все прямые и окружности, содержащие границу области, то «выпрямить» все части части границы сразу не удастся.

Применим отображение, которое «выпрямит» все части границы за исключением разреза. Для этого выберем дробно-линейное отображение, переводящее точку 1 в 0, а точку -1 в ∞:

$$f(z) = \frac{z-1}{z+1}$$

При этом конформном отображении:

- Действительная ось перейдет в действительную, причем полуинтервал $(-1, 1]$ перейдет в луч $(-\infty, 0]$, поскольку точка 0 переходит в -1;

- Единичная окружность перейдет в прямую, так как лежащая на ней точка -1 перейдет в ∞.

  Поскольку единичная окружность пересекала действительную ось в точке $z = 1$ под прямым углом, то прямая, являющаяся ее образом, тоже будет пересекать действительную ось в точке 0 под прямым углом.

  Чтобы понять, в какой из лучей мнимой оси: $[0, +i\infty)$ или $(-i\infty, 0]$ перейдет полуокружность из границы области, проверим, куда перейдет точка i

  $$f(i) = \frac{i-1}{i+1} = -\frac{(1-i)^2}{2} = -\frac{1-2i-1}{2} = i$$

  Следовательно, полуокружность из границы области перейдет в луч $[0, +i\infty)$.

  Образ области будет располагаться в I, III и IV четвертях, что легко проверить, используя сохранение ориентации на границе. Обход границы исходной области в направлении $0 \to 1 \to i$ оставляет область справа, следовательно, обход границы образа области в направлении $-1 \to 0 \to i$ также оставляет образ области справа.

- Мнимая ось переходит к окружность, так как на ней нет точки переходящей в ∞. Точки 1 и -1 симметричны относительно мнимой оси, значит, их образы 0 и ∞ должны быть симметричны относительно этой окружности. Тогда образ мнимой оси – это окружность с центром в нуле. Чтобы определить ее радиус, заметим, что на ней будет лежать образ точки $-i$

$$f(-i) = \frac{-i-1}{-i+1} = -\frac{(i+1)^2}{2} = -\frac{1+2i-1}{2} = -i$$

  Итак, мнимая ось переходит в единичную окружность с центром в нуле, а разрез по отрезку $[-i, 0]$ мнимой оси переходит в дугу единичной окружности, лежащую в III четверти.

Таким образом, при применении выбранного дробно-линейного преобразования получаем:

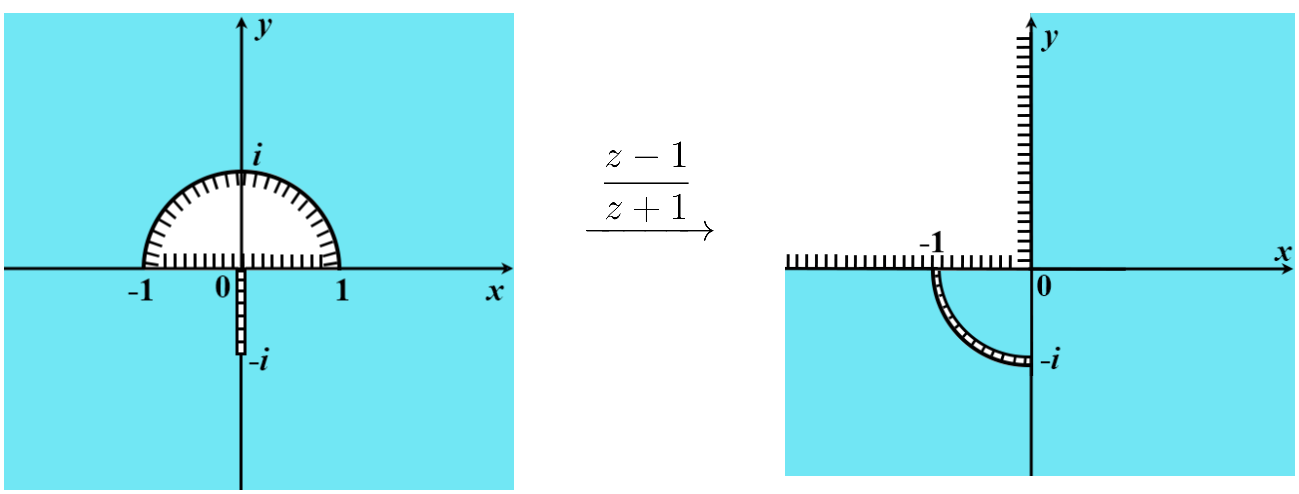


Рис.22

Теперь повернем получившийся угол так, чтобы одна из его сторон совпала с положительным направлением оси Ox, как показано на рис.23.

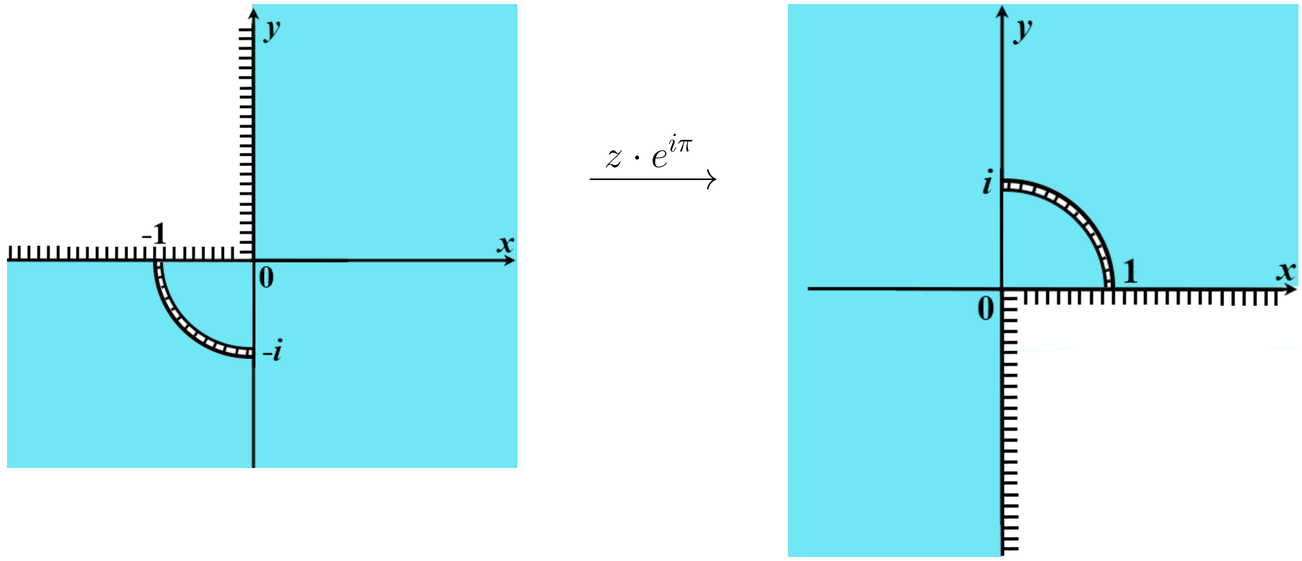


Рис.23

Переведем угол в верхнюю полуплоскость, применив функцию, которая является регулярной ветвью многозначной функции $f(z) = z^{\frac{2}{3}}$. При этом выберем такую регулярную ветвь $f(z)$, для которой $f(1 + i \cdot 0) = 1$.

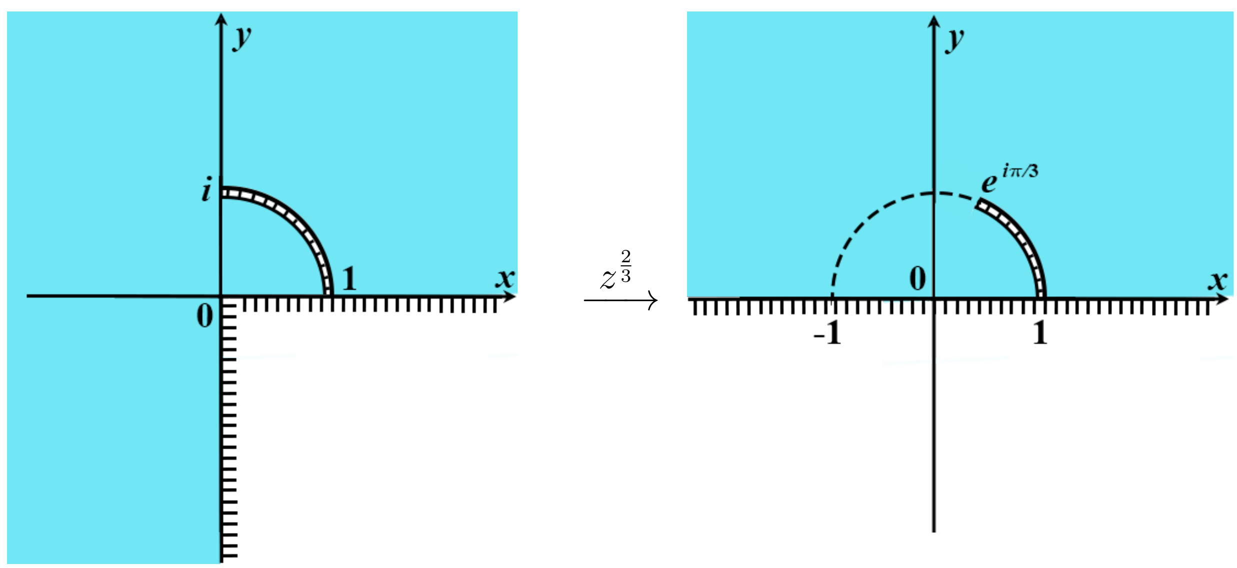


Рис.24

К таким областям можно применять дробно-линейное отображение, «распрямляя» дугу окружности, и тогда получается «столбик», который мы рассматривали на предыдущем семинаре. Однако удобнее воспользоваться функцией Жуковского. В такой области функция Жуковского будет однолистной.

При применении функции Жуковского

- внешность единичного круга в верхней полуплоскости перейдет во всю верхнюю полуплоскость;

- внутренность единичного круга в верхней полуплоскости перейдет во всю нижнюю полуплоскость;

- разрез по дуге единичной окружности от точки $e^{i\pi/3}$ до 1 спроектируется в отрезок $[0,5;1]$ (не входит в образ);

- действительная ось перейдет в объединение лучей $(-\infty,-1]\cup[1;+\infty)$ действительной оси (не входит в образ).

Таким образом, при применении функции Жуковского получаем

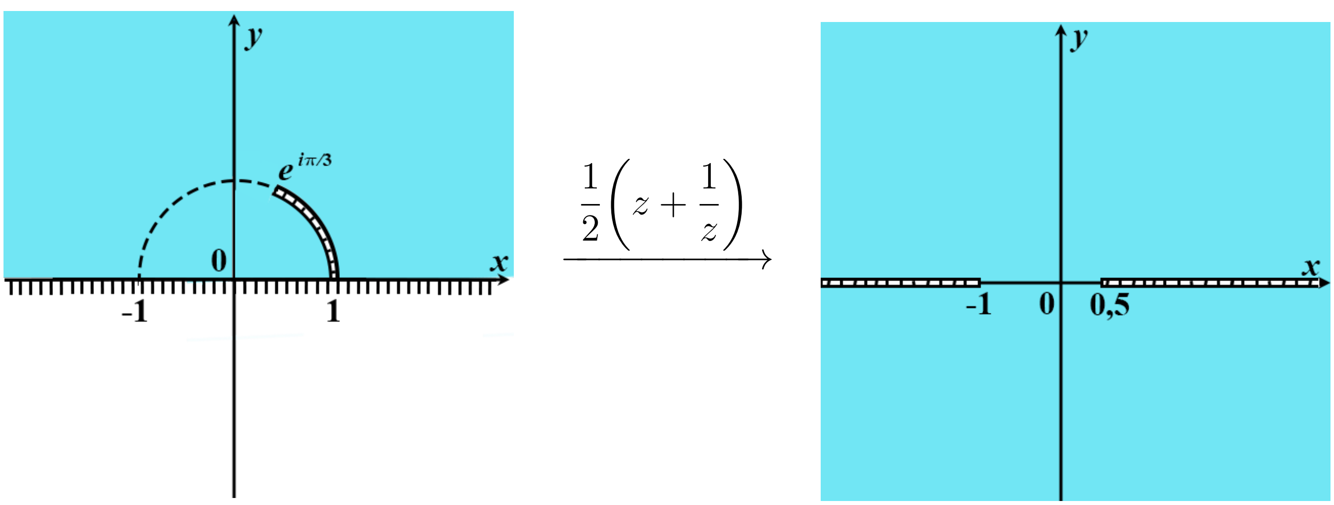


Рис.25

Снова воспользуемся дробно-линейным отображением, чтобы перевести плоскость с разрезом, проходящим через ∞ , в плоскость с разрезом по положительному направлению действительной оси.

Напишем формулу для какого-нибудь дробно-линейного отображения, переводящего точку $z = 0,5$ в нуль, а точку $z = -1$ в ∞. Таким отображением является, например, отображение

$$f(z) = \frac{z - 0,5}{z+1}$$

Это отображение переводит действительную ось в действительную ось, при этом разрез, изображенный в правой части рис. 25, переходит в луч действительной оси с вершиной в нуле. Однако существуют два таких луча, и чтобы понять, в какой из них переходит разрез, нужно подставить в дробно-линейное отображение какую-нибудь точку на разрезе. Например, точка $z = \infty$ при этом дробно-линейном отображении перейдет в 1 . Таким образом, выбранное дробно-линейное отображение переведет разрез в луч $[0, +\infty)$. Применяя это дробно-линейное отображение, получаем

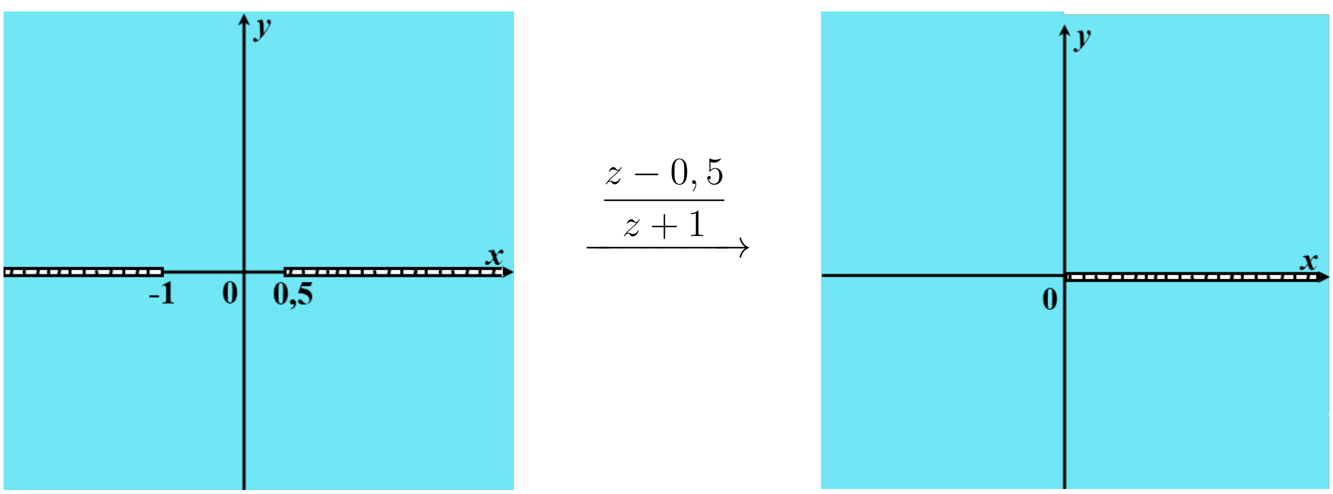


Рис.26

Наконец, применим функцию, которая является регулярной ветвью $\sqrt{z}$. Для этого выберем такую регулярную ветвь $f(z)$, на которой $f(1+i\cdot 0) = 1$.

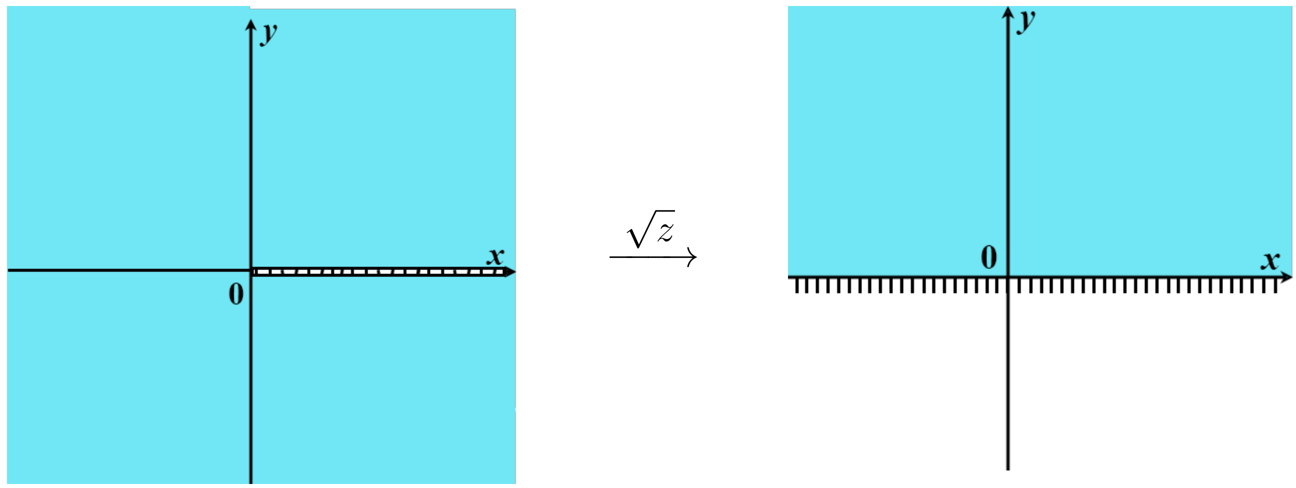


Рис.27

Решение задачи 3 закончено.

Функция, обратная к функции Жуковского

В некоторых задачах требуется конформно отобразить область, граница которой содержит дуги эллипсов или ветви гипербол. В таких случаях используют функцию, обратную к функции Жуковского. Эта функция является регулярной ветвью многозначной функции

$$f(z) = z + \sqrt{z^2 - 1} \tag{5}$$

Для того, чтобы можно было выделить регулярную ветвь функции (5), должна существовать хотя бы одна кривая, соединяющая точки 1 и -1, которая не входит в отображаемую область.

Продемонстрируем технику применения функции (5) на примере следующей задачи.

Задача 4 *Отобразить конформно на верхнюю полуплоскость область, изображенную на рис.28*

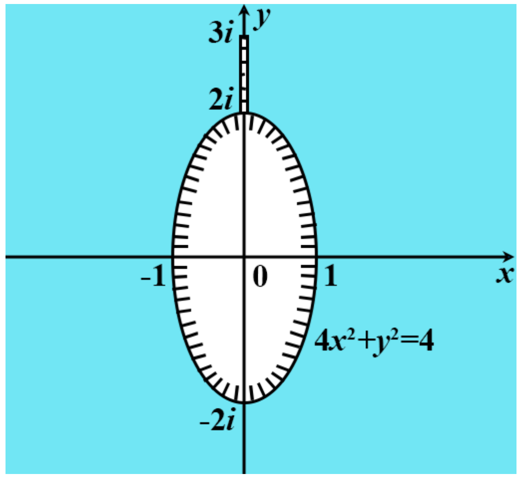


Рис.28

Решение.

Поскольку граница области содержит эллипс, то будем применять функцию, обратную к функции Жуковского. Для этого сначала нужно преобразовать заданную область к «правильному» виду.

Повернем эллипс так, чтобы его большая полуось попала на ось $0x$.

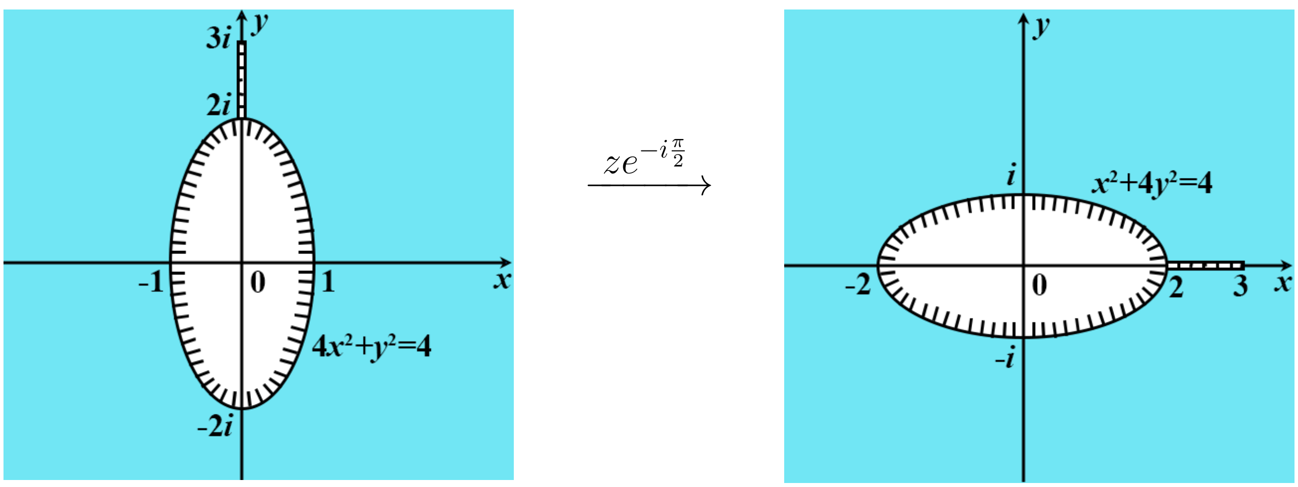


Рис.29

Теперь растянем эллипс в α раз так, чтобы в него могла перейти окружность радиуса r при применении функции Жуковского. Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(r+\dfrac{1}{r}\right)=2\alpha, \\ \dfrac{1}{2}\left(r-\dfrac{1}{r}\right)=\alpha, \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} r=3\alpha, \\ \dfrac{1}{r}=\alpha, \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} \alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \\ r=\sqrt{3}. \end{cases}$$

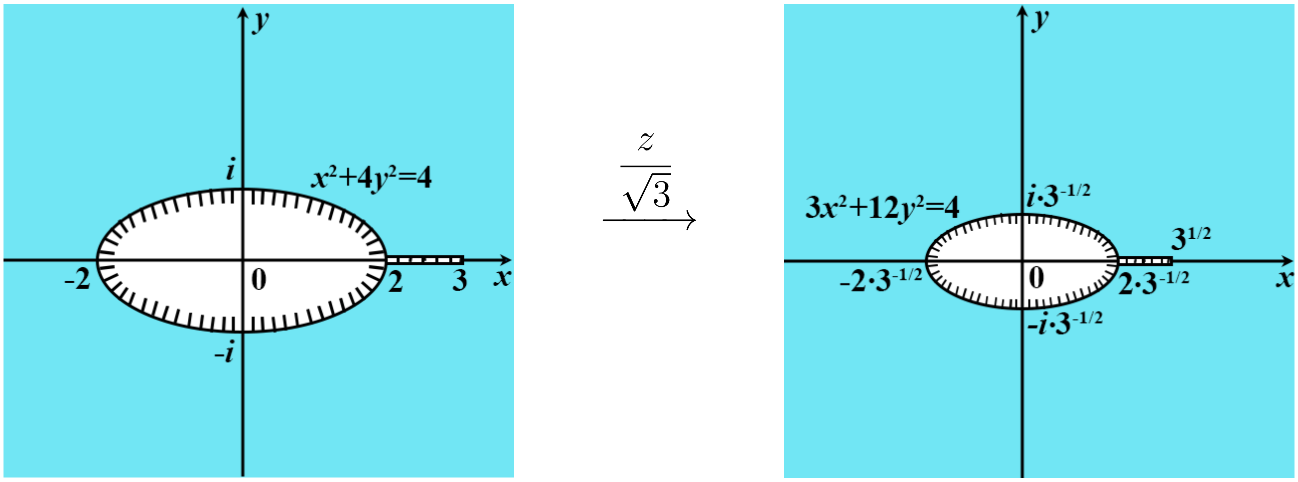


Рис.30

Наконец, применим функцию $f(z)$, обратную к функции Жуковского, заданную формулой (5) и условием $f\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right) = \sqrt{3}$ для выделения регулярной ветви.

При применении функции, обратной к функции Жуковского,

- эллипс перейдет в окружность радиуса $\sqrt{3}$ с центром в нуле;
- разрез на вещественной оси $\left[\dfrac{2}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right]$ перейдет в разрез $[\sqrt{3}, \sqrt{3}+\sqrt{2}]$ на вещественной оси;
- внешность эллипса перейдет во внешность круга радиуса $\sqrt{3}$ с центром в нуле.

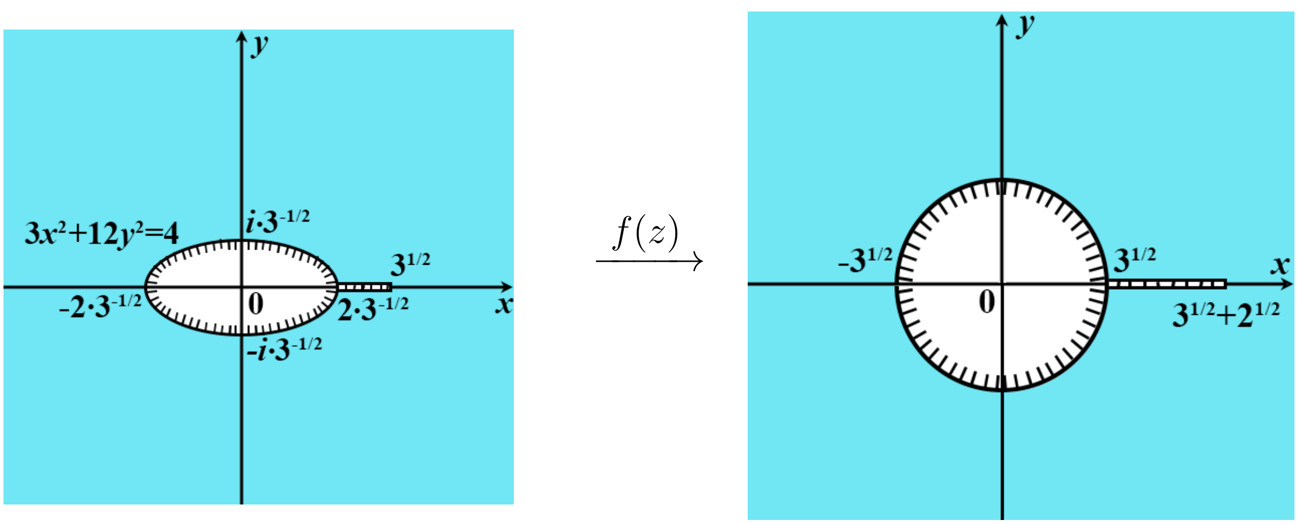


Рис.31

Сожмем окружность в $\sqrt{3}$ раз, чтобы она превратилась в единичную окружность.

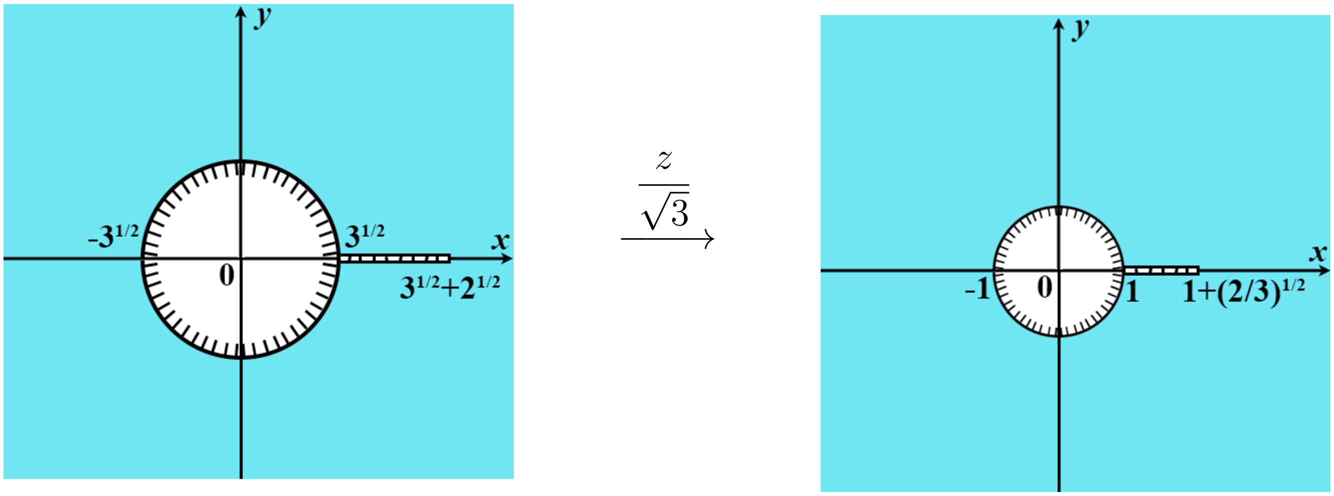


Рис.32

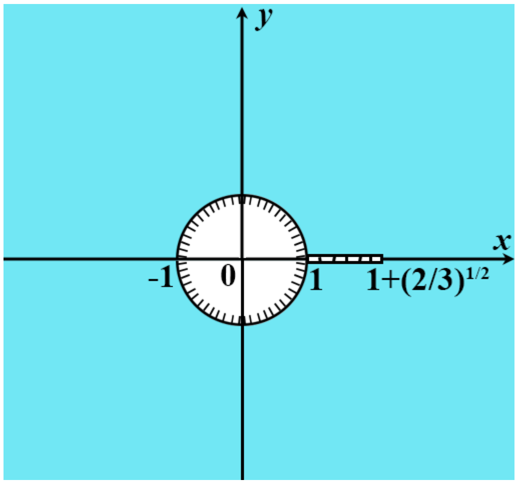
К такой области удобно применить функцию Жуковского, в результате чего

- внешность единичного круга в верхней полуплоскости перейдет во всю верхнюю полуплоскость;
- внутренность единичного круга в верхней полуплоскости перейдет во всю нижнюю полуплоскость;
- единичная окружность спроектируется в отрезок $[-1;1]$ (не входит в образ);
- разрез $\left[1, 1+\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right]$ на действительной оси перейдет в разрез $[1, a]$, где

$$a = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{2}{3}}+\frac{1}{1+\sqrt{\frac{2}{3}}}\right)$$

  на действительной оси (не входит в образ).

Таким образом, при применении функции Жуковского получаем



$$\xrightarrow{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}$$

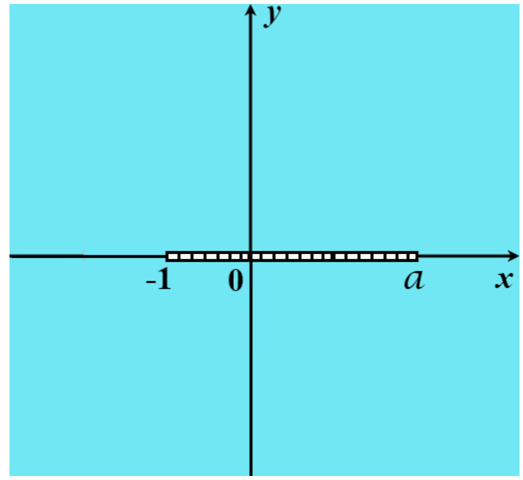


Рис.33

Теперь воспользуемся дробно-линейным отображением, чтобы перевести плоскость с разрезом $[-1, a]$ на действительной оси в плоскость с разрезом по положительному направлению действительной оси.

Напишем формулу для какого-нибудь дробно-линейного отображения, переводящего точку $z = -1$ в ∞, а точку $z = a$ в нуль. Таким отображением является, например, отображение

$$f(z) = \frac{z-a}{z+1}$$

Это отображение переводит действительную ось в действительную ось, при этом разрез$[-1, a]$ переходит в луч действительной оси с вершиной в нуле. Однако существуют два таких луча, и чтобы понять, в какой из них переходит разрез, нужно подставить в дробно-линейное отображение какую-нибудь точку на разрезе. Например, точка $z = 0$ при этом дробно-линейном отображении перейдет в $-a$. Таким образом, выбранное дробно-линейное отображение переведет разрез в луч $(-\infty, 0]$. Значит, нужно взять функцию

$$f(z) = -\frac{z-a}{z+1}$$

Применяя это дробно-линейное отображение, получаем

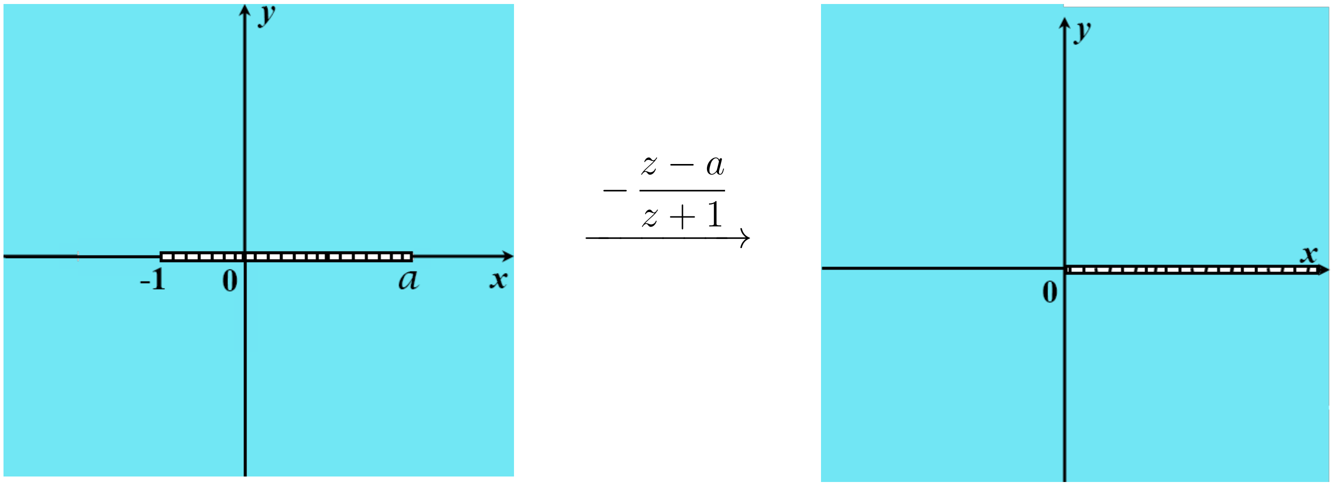


Рис.34

Наконец, применим функцию, которая является регулярной ветвью $\sqrt{z}$. Для этого выберем такую регулярную ветвь $f(z)$, на которой $f(1+i\cdot 0)=1$.

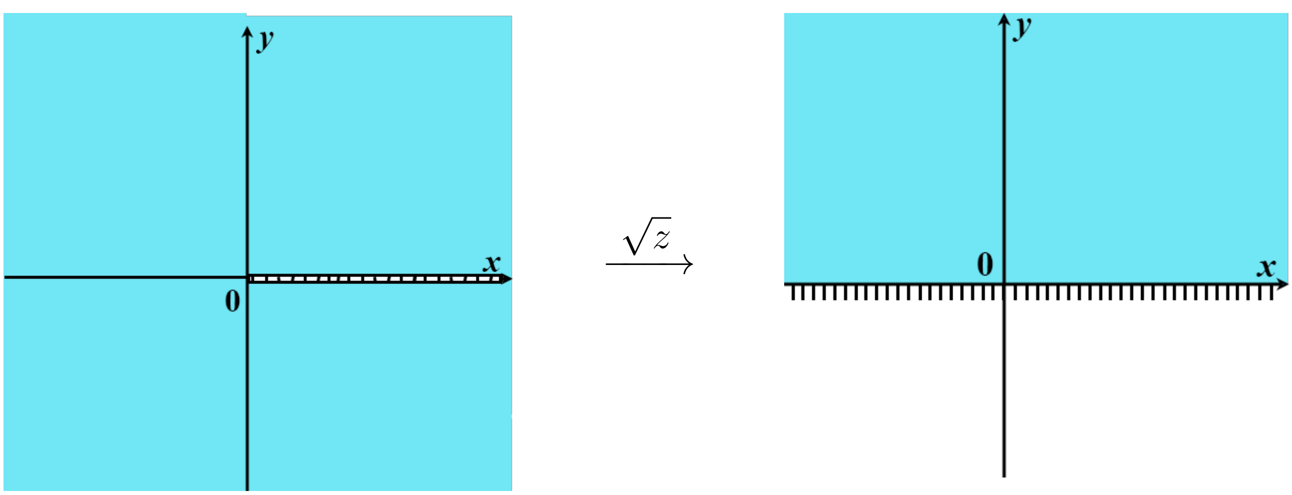


Рис.35

Решение задачи 4 закончено.

Следующая задача предлагается Вам для самостоятельного решения.

Задача 5 *Отобразить конформно на верхнюю полуплоскость область, изображенную на рис.36*

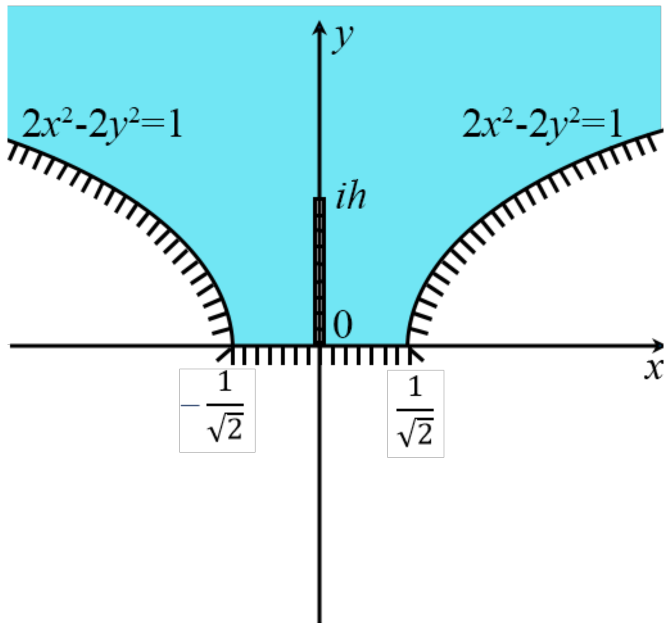


Рис.36

Экспонента

В ряде задач конформные отображения необходимо применять к областям в виде полосы или полуполосы.

В этом случае удобно воспользоваться экспонентой

$$f(z) = e^z$$

Поскольку $z = x + iy$, то

$$f(z) = e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

Таким образом,

$$|f(z)| = e^x, \qquad \arg f(z) = y$$

Утверждение 2. Экспонента конформна в любой области расширенной комплексной плоскости, которая не содержит точек z_1, z_2 $(z_1 \neq z_2)$ таких, что $z_1 = z_2 + 2\pi n i$ с каким-либо $n \in \mathbb{Z}$.

Покажем, куда экспонента переводит наиболее часто встречающиеся в задачах линии и области.

- Прямая, параллельная действительной оси,

$$z = x + ia, \qquad a = \text{const}, \qquad x \in (-\infty, +\infty),$$

перейдет в луч

$$z = re^{ia} \qquad a = \text{const}, \qquad r \in [0, +\infty),$$

составляющий угол a с положительным направлением действительной оси и началом в точке $z = 0$ (рис.37).

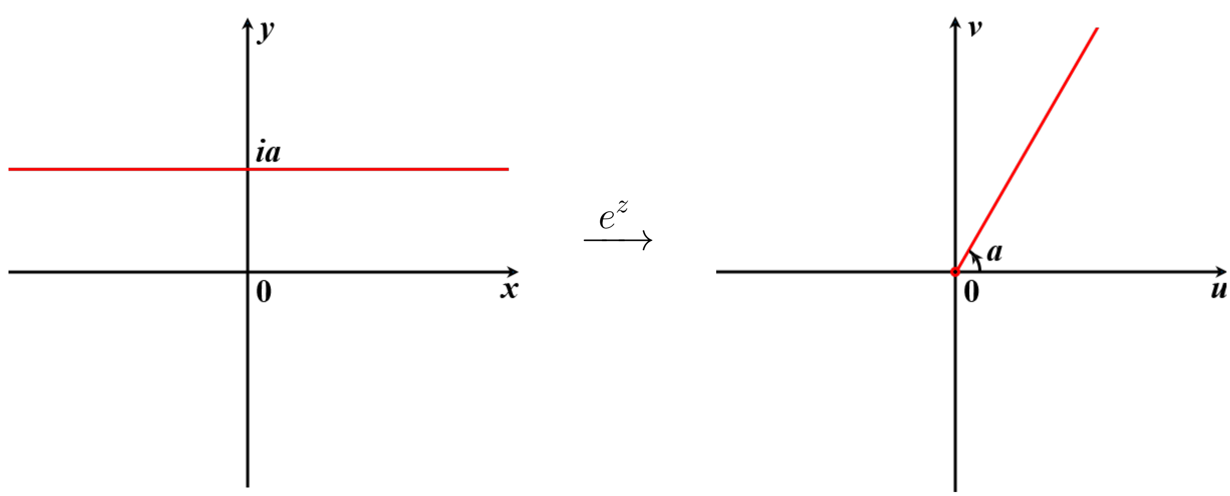


Рис.37

- Полоса шириной π, параллельная действительной оси,

$$z = x + iy, \qquad x \in (-\infty, +\infty), \qquad y = \in (0, \pi),$$

перейдет в верхнюю полуплоскость (рис.38).

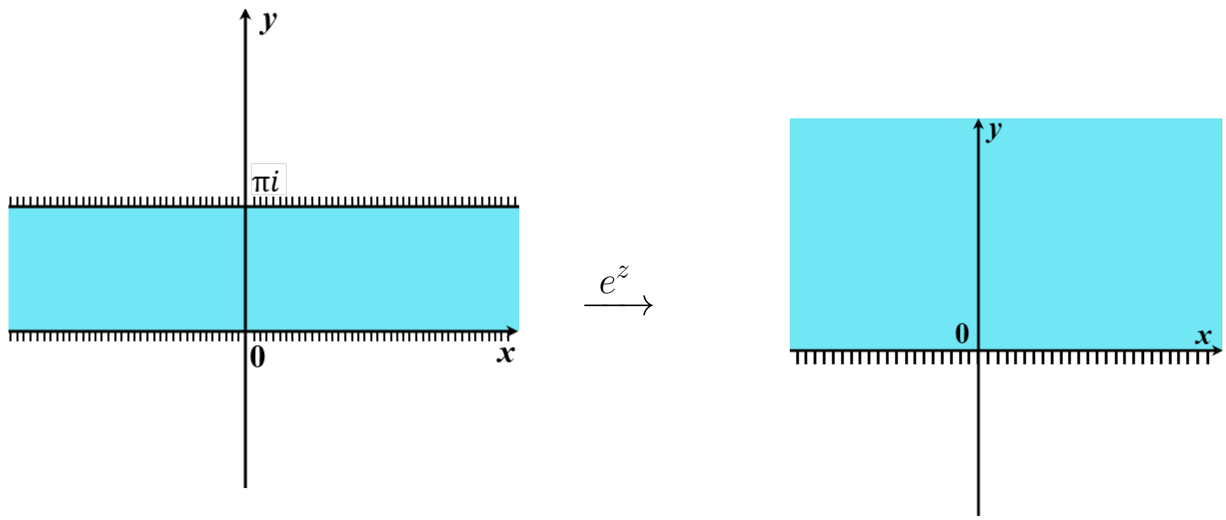


Рис.38

- Полоса шириной 2π, параллельная действительной оси,

$$z = x + iy, \qquad x \in (-\infty, +\infty), \qquad y \in (0, 2\pi),$$

перейдет в комплексную плоскость с разрезом по положительному направлению действительной оси (рис.39).

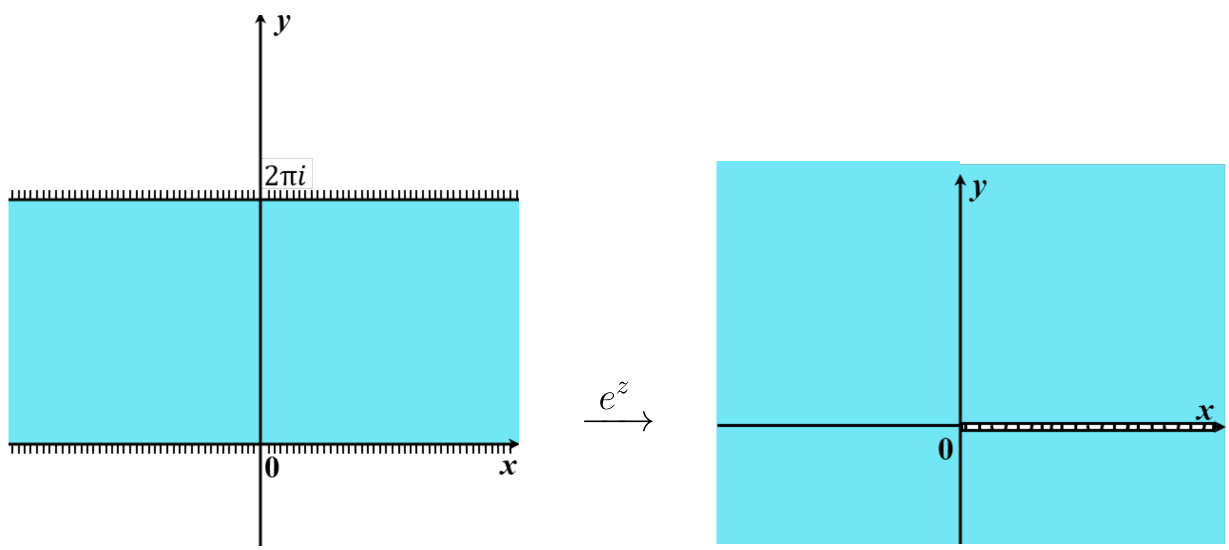


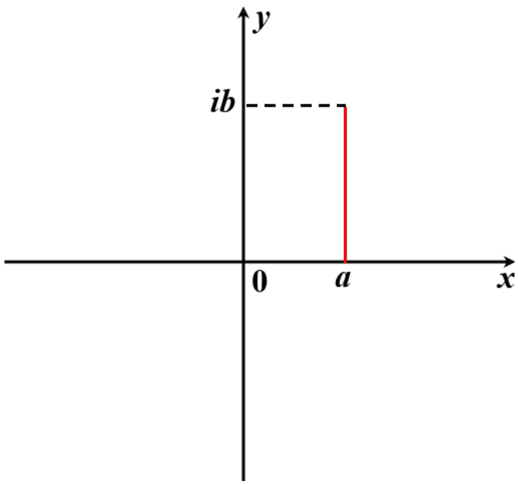
Рис.39

- Отрезок, параллельный мнимой оси,

$$z = a + iy, \qquad a = \text{const}, \qquad y \in [0, b], \qquad 0 < b < 2\pi$$

перейдет в дугу окружности радиуса e^a

$$f(z) = e^a \cdot e^{i\varphi} \qquad a = \text{const}, \qquad \varphi \in [0, b]$$



$\xrightarrow{e^z}$

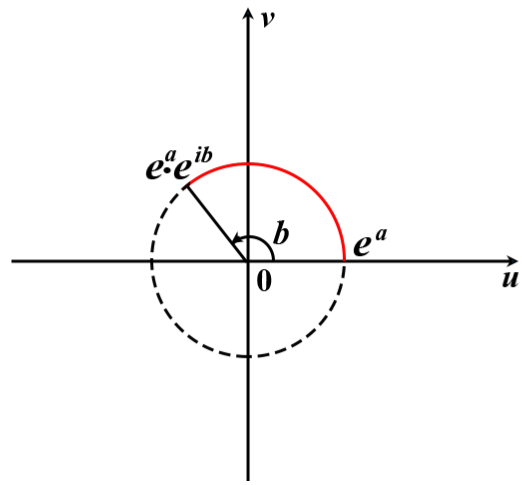
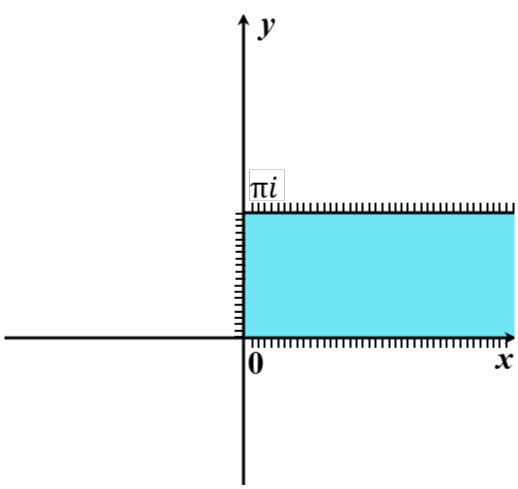


Рис.40

- Полуполоса шириной π, параллельная действительной оси,

$$z = x + iy, \qquad x \in (0, +\infty), \qquad y =\in (0, \pi),$$

перейдет во внешность единичного круга в верхней полуплоскости (рис.41).



$\xrightarrow{e^z}$

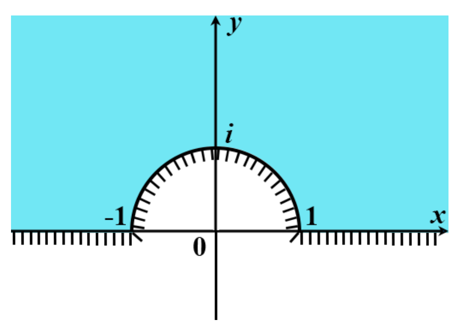


Рис.41

Покажем теперь, как используется экспонента при решении задач.

Задача 6 *Отобразить конформно на верхнюю полуплоскость область, изображенную на рис.42*

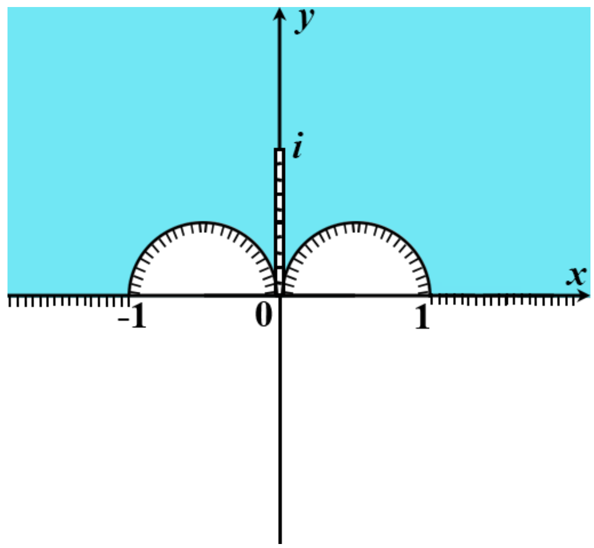


Рис.42

Решение.

Поскольку граница области состоит из лучей, дуг окружностей и отрезка, причем все прямые и окружности, на которых располагается граница, пересекаются в нуле, то применим дробно-линейное отображение, которое переведет нуль в ∞

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

В результате применения этого дробно-линейного отображения

- действительная ось перейдет в себя, причем луч $[1, +\infty$ перейдет в отрезок $[0, 1]$, а луч $(-\infty, -1]$ – в отрезок $[-1, 0]$, точки 1 и -1 останутся неподвижными;

- мнимая ось перейдет в себя, причем разрез $[0, i]$ перейдет в $[-i, 0]$;

- дуги окружностей перейдут в лучи (они содержат точку 0, которая переходит в ∞). Эти лучи перпендикулярны действительной оси в силу свойства сохранения углов при конформном отображении.

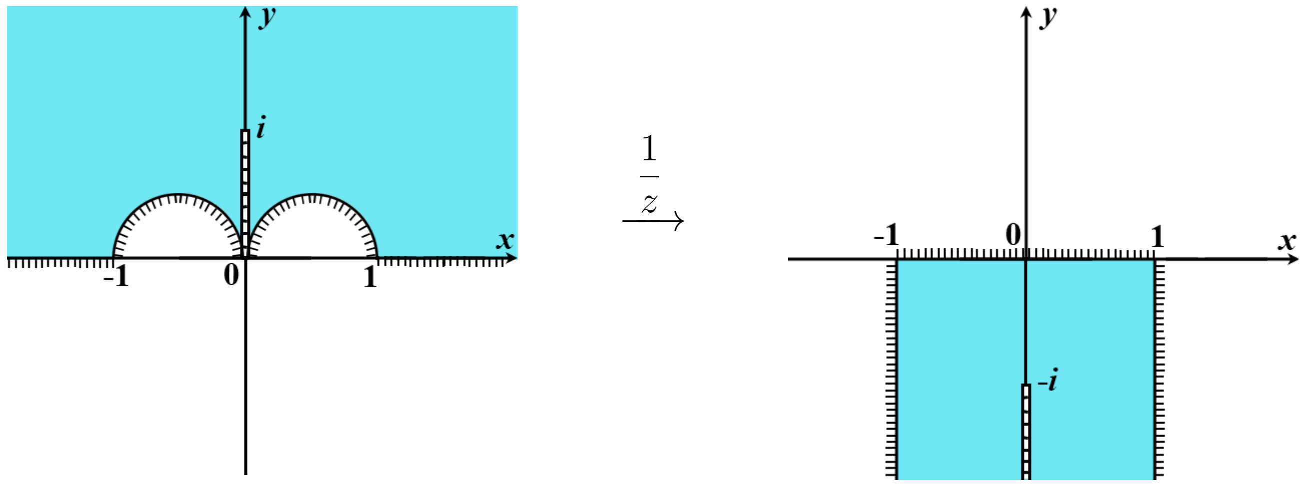


Рис.43

Поскольку мы получили половину полосы, то далее будем применять экспоненту. Однако для этого необходимо преобразовать полуполосу к нужному виду. Сначала повернем ее на $90°$ против часовой стрелки, чтобы полоса стала горизонтальной.

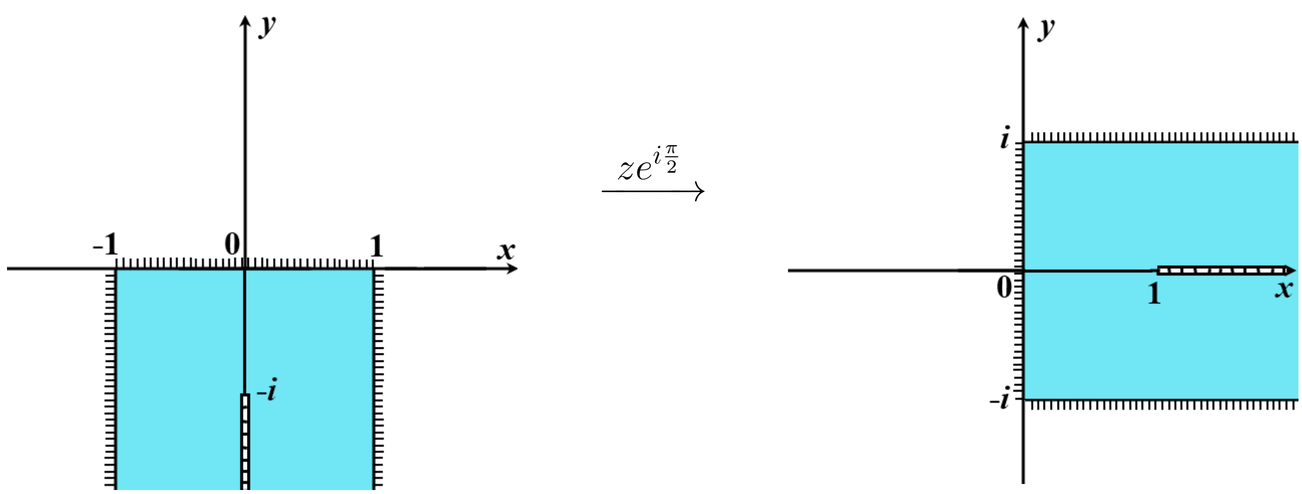


Рис.44

Поднимем полуполосу так, чтобы ее нижний край оказался на действительной оси

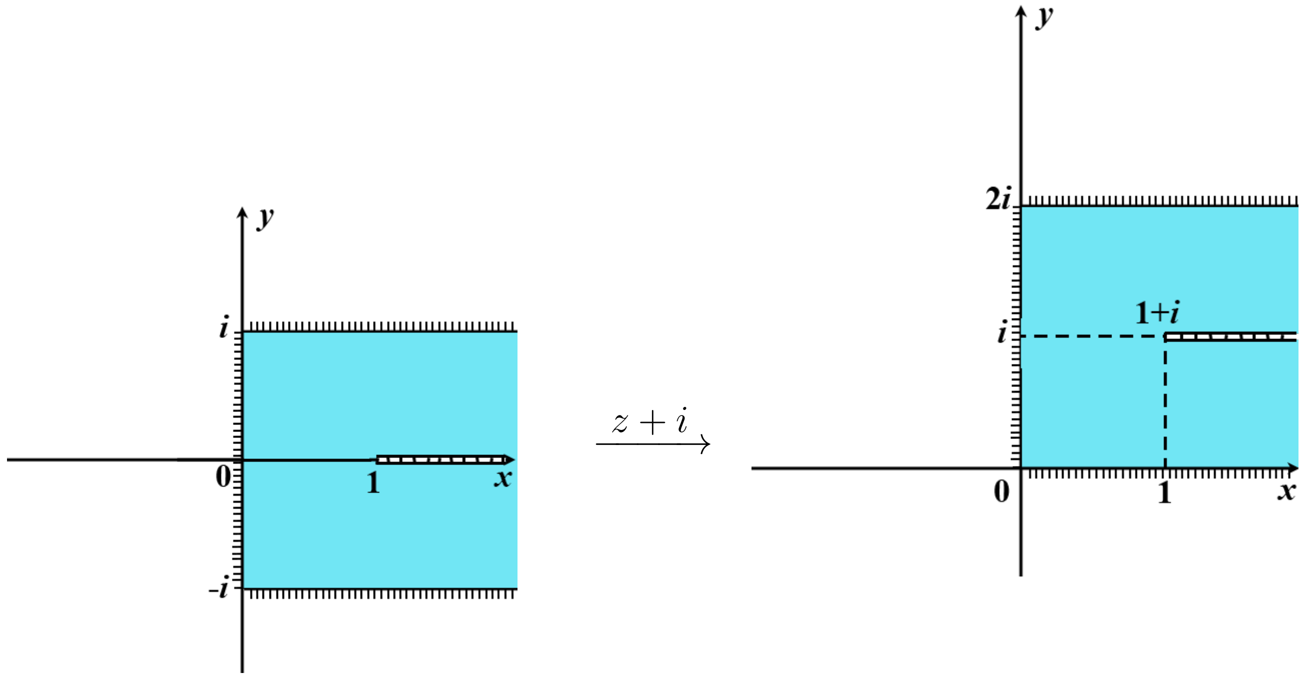


Рис.45

Затем растянем полуполосу до ширины π

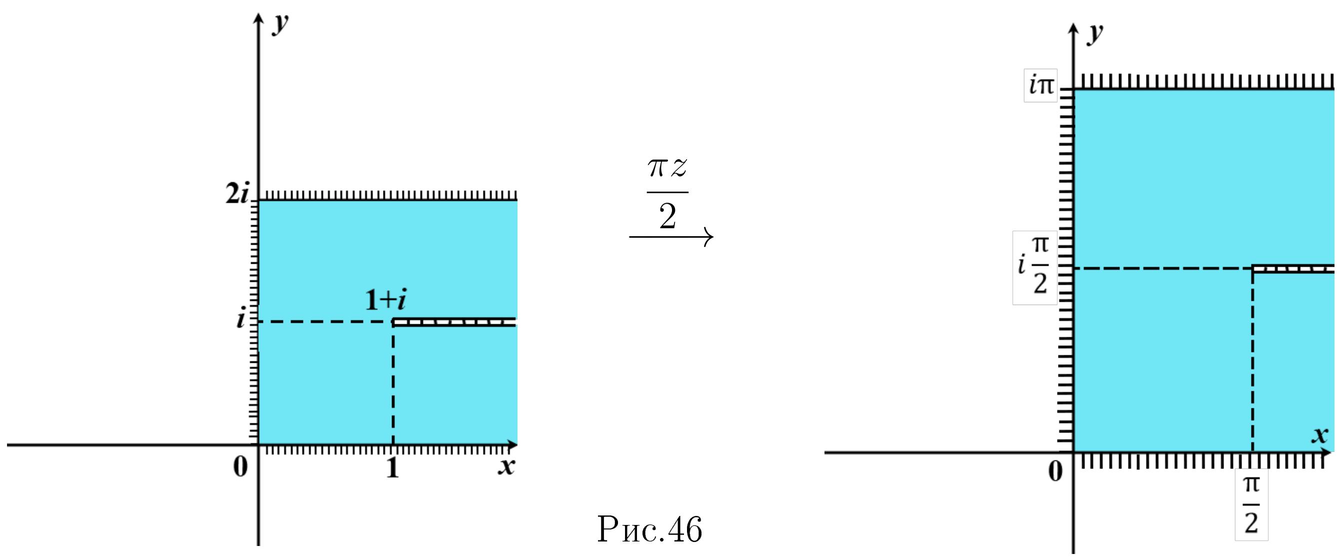


Рис.46

Теперь полуполоса приняла такой вид, что можно применить экспоненту. В результате

- полуполоса перейдет во внешность единичного круга в верхней полуплоскости;
- разрез перейдет в полуинтервал $[ia, +i\infty)$ на мнимой оси, где $a = e^{\frac{\pi}{2}}$.

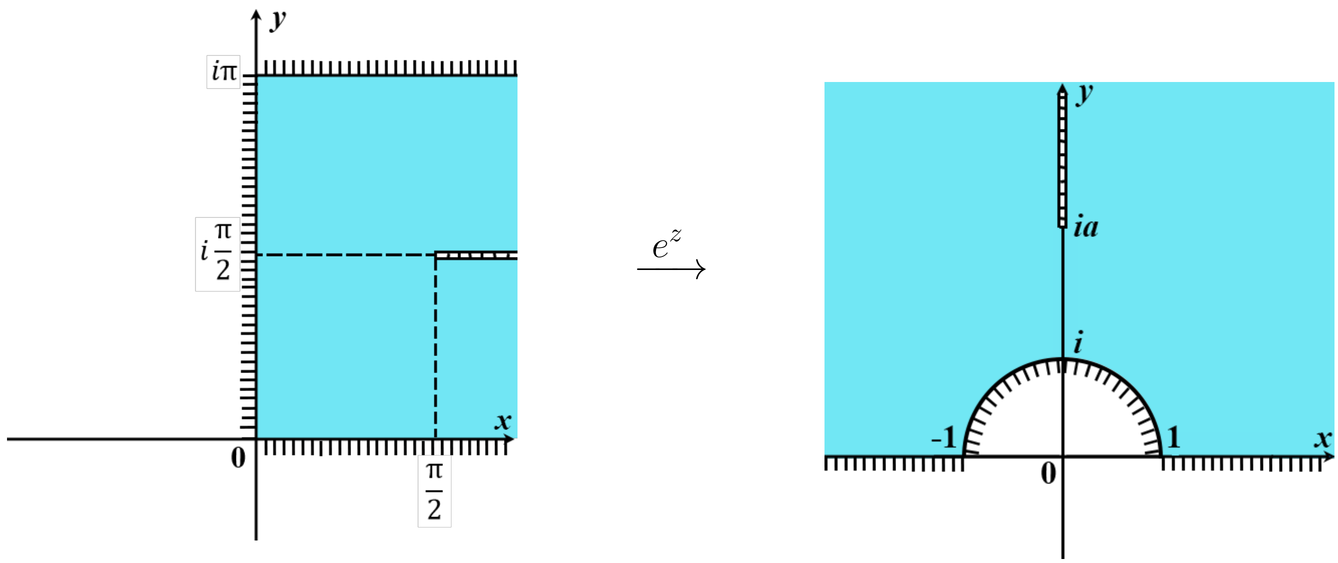


Рис.47

К такой области удобно применить функцию Жуковского, в результате чего

- внешность единичного круга в верхней полуплоскости перейдет во всю верхнюю полуплоскость;
- единичная окружность спроектируется в отрезок $[-1;1]$;
- лучи $(-\infty,-1]$ и $[1;+\infty)$ действительной оси перейдут в себя;
- разрез $[ia,+i\infty)$ на мнимой оси перейдет в разрез $[ib,+i\infty)$, где

$$ib=\frac{1}{2}\left(ie^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{ie^{\frac{\pi}{2}}}\right)=\frac{i}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}}-e^{-\frac{\pi}{2}}\right)=i\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}$$

  на мнимой оси (не входит в образ).

и мы получаем уже знакомый нам «столбик»

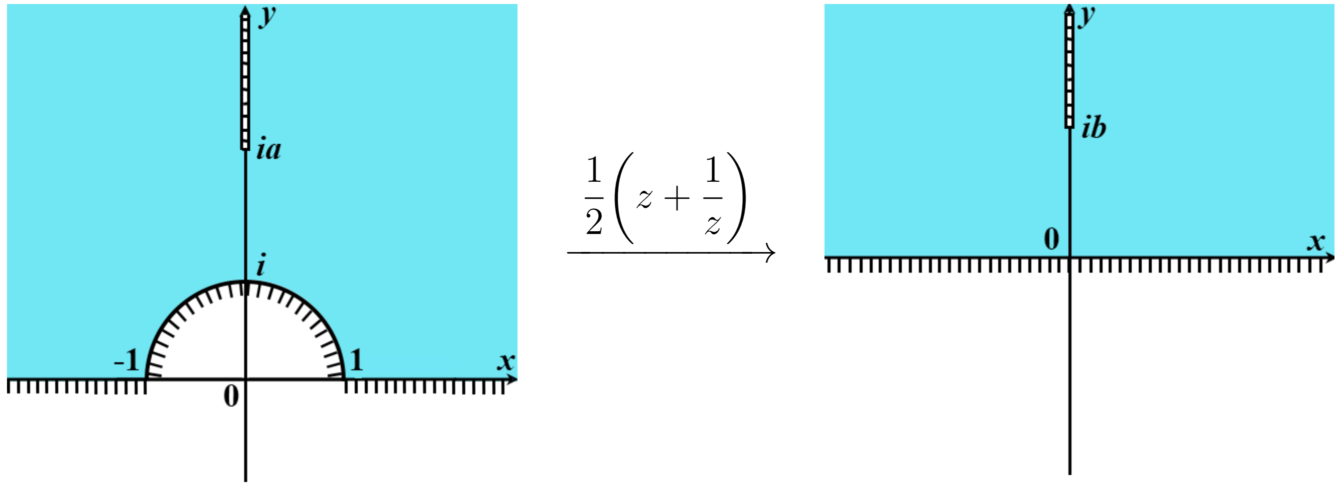


Рис.48

Поэтому применяем функцию $f(z) = z^2$

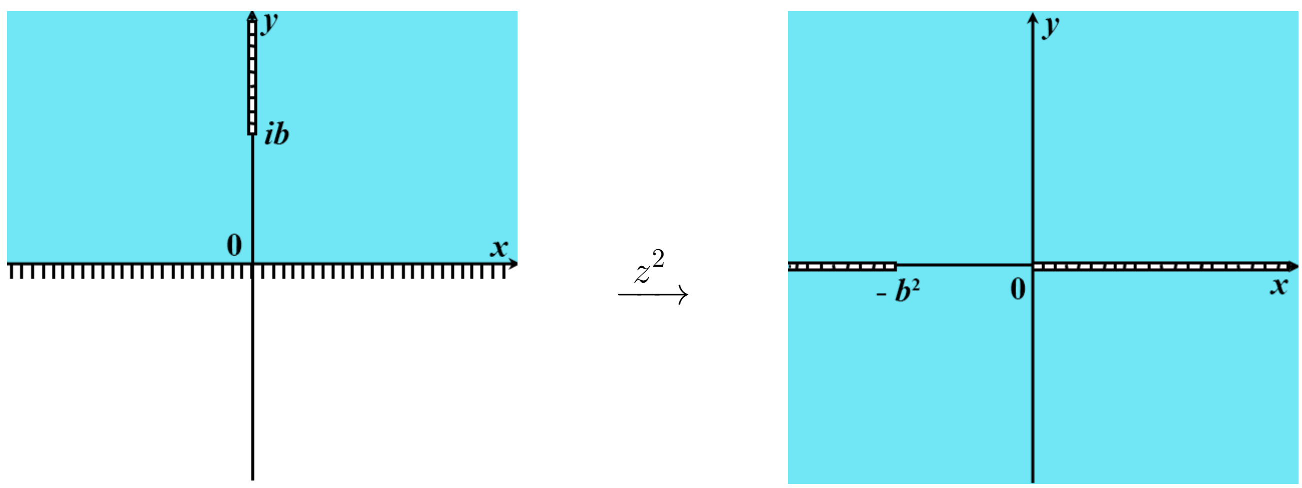


Рис.49

Теперь с помощью дробно-линейного отображения переведем плоскость с разрезами $[-b^2, 0]$, проходящим через ∞), на действительной оси в плоскость с разрезом по положительному направлению действительной оси.

Напишем формулу для какого-нибудь дробно-линейного отображения, переводящего точку $z = 0$ в себя, а точку $z = -b^2$ в ∞. Таким отображением является, например, отображение

$$f(z) = \frac{z}{z + b^2}$$

Это отображение переводит действительную ось в действительную ось, причем разрез, изображенный в правой части рис.49, переходит в луч действительной оси с вершиной в нуле. Поскольку существуют два таких луча, то, чтобы понять, в какой из них переходит разрез, нужно подставим в дробно-линейное отображение какую-нибудь точку на разрезе. Например, точка $z = \infty$ при этом дробно-линейном отображении перейдет в 1 . Таким образом, выбранное дробно-линейное отображение переведет разрез в луч $[0, +\infty)$.

Применяя это дробно-линейное отображение, получаем

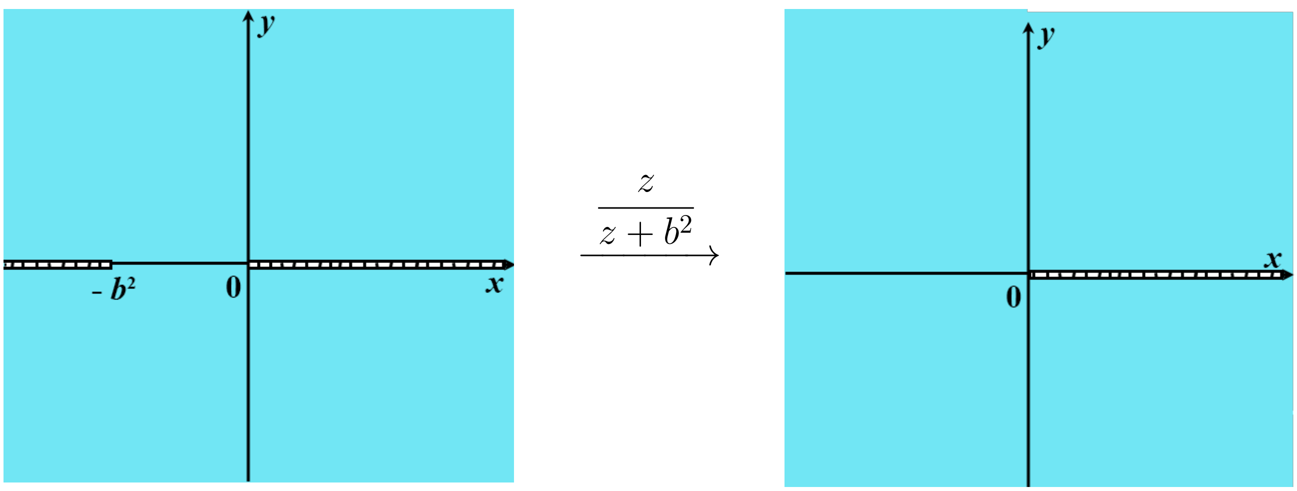


Рис.50

Наконец, применим функцию, которая является регулярной ветвью $f(z) = \sqrt{z}$ с условием $f(1 + i \cdot 0) = 1$.

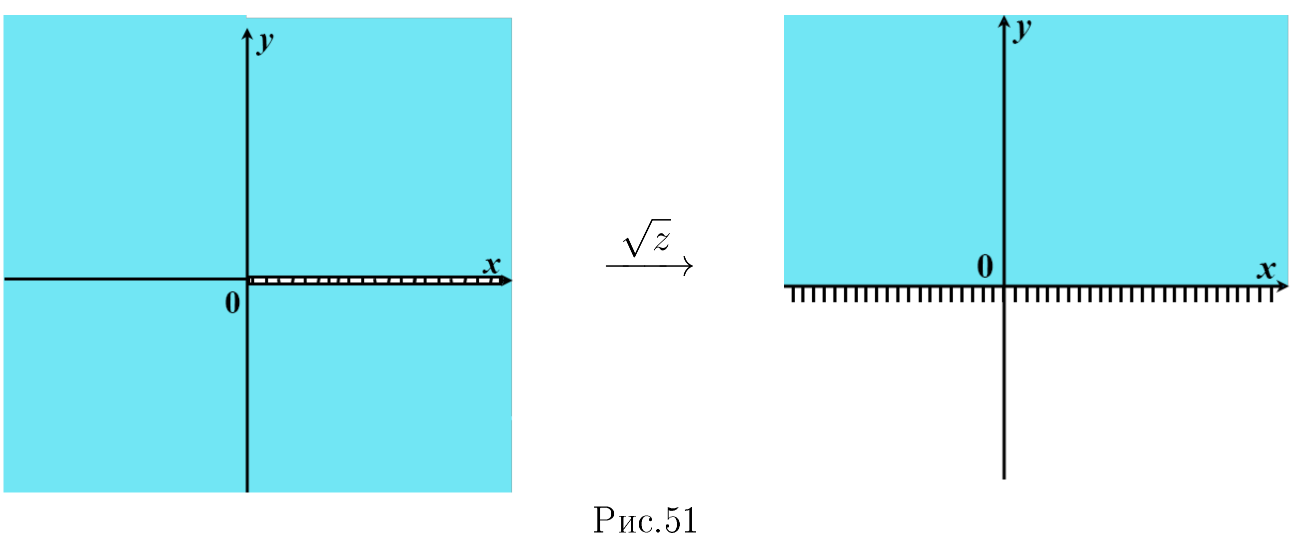


Рис.51

Решение задачи 6 закончено.

Следующая задача предлагается Вам для самостоятельного решения.

Задача 7 *Отобразить конформно на верхнюю полуплоскость область, изображенную на рис.52*

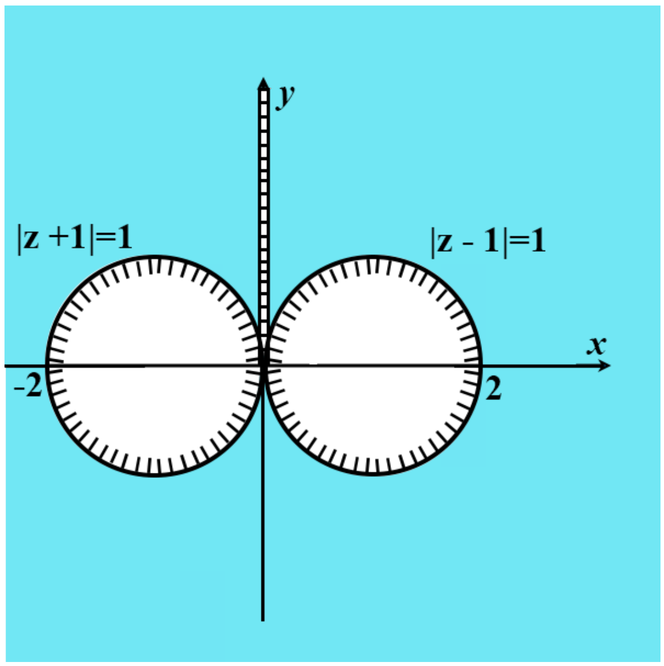


Рис.52

Замечание 2. В ряде книг и пособий по ТФКП для построения конформных отображений используются тригонометрические и гиперболические функции комплексного аргумента. Мы эти отображения не рассматриваем, поскольку каждая из перечисленных функций может быть представлена в виде суперпозиции экспоненты, поворота и функции Жуковского.

В частности, если записать формулу для функции $\cos z$ в виде

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + \frac{1}{e^{iz}}\right),$$

то становится понятным, что эта функция действительно является суперпозицией поворота на 90°, экспоненты и функции Жуковского.

На этом мы завершаем сегодняшнее дистанционное занятие. На следующем вебинаре мы продолжим изучение темы «Конформные отображения».

Спасибо за внимание.
Не болейте!