Конформные отображения (часть 1)

Самарова С.С.

ФОПФ, 3 курс, ТФКП

Учебное пособие для дистанционных занятий

В данном пособии рассматриваются методы решения задач, в которых требуется построить конформное отображение заданной области расширенной комплексной плоскости на другую заданную область.

Существует несколько эквивалентных определений конформного отображения области расширенной комплексной плоскости на область расширенной комплексной плоскости. Приведем одно из них, которое наиболее удобно при решении задач.

Определение 1. Функция $f(z)$ отображает область $D \in \overline{\mathbb{C}}$ на область $G \in \overline{\mathbb{C}}$ конформно, если выполнены условия:

- $f(z)$ голоморфна в области D за исключением, быть может, одной точки, в которой эта функция имеет полюс первого порядка;

- Отображение $f : D \to G$ однолистно (т.е. является взаимно-однозначным).

Замечание 1. Из конформности отображения $f : D \to G$ следует, что $f'(z) \neq 0$ для всех $z \in D$.

Замечание 2. Условие $f'(z) \neq 0$ для всех $z \in D$ не гарантирует однолистности отображения $f : D \to G$. В качестве примера рассмотрим следующее отображение (рис.1)

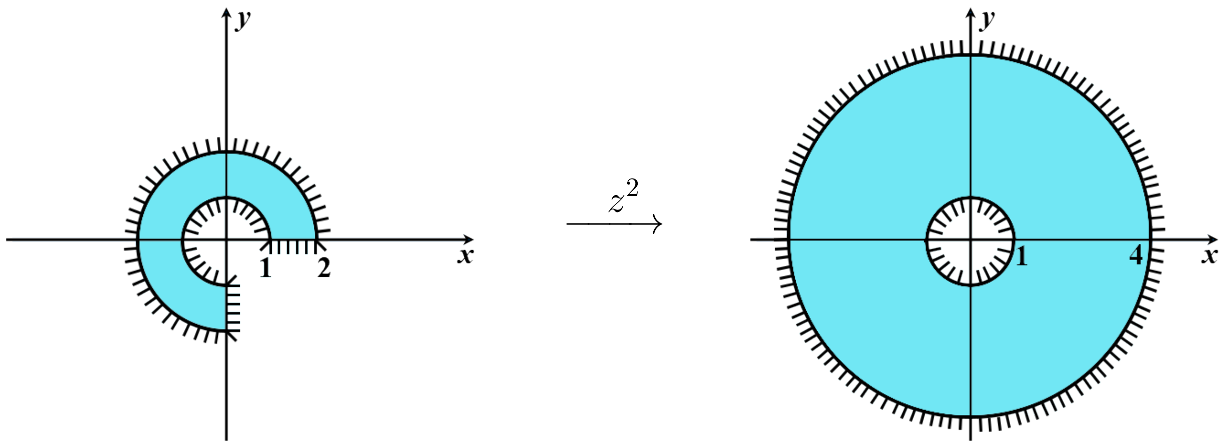

Рис.1

На рис.1, а также на всех дальнейших рисунках, в соответствии с традицией ТФКП **штриховкой принято отмечать внешность рассматриваемой области**. В данном пособии рассматриваемые области для наглядности также выделены голубой заливкой.

Заметим, что для всех z из области D, изображенной на рис.1 слева, производная функции $f(z) = z^2$ не обращается в нуль. Тем не менее, отображение не является конформным, поскольку оно не является однолистным.

Замечание 3 (Геометрический смысл аргумента производной). Пусть функция $f(z)$ голоморфна в некоторой окрестности точки z_0 и $f'(z_0) \neq 0$. Тогда все кривые, проходящие через точку z_0, при отображении $f(z)$ поворачиваются на один и тот же угол, равный $\arg f'(z_0)$. Отсюда следует, что при отображении $f(z)$ углы между кривыми, проходящими через точку z_0, сохраняются.

Замечание 4. Если отображение $f : D \to G$ является конформным, то оно сохраняет углы между кривыми в каждой точке области, поскольку в силу замечания 1 $f'(z) \neq 0$ для всех $z \in D$.

Свойства конформных отображений

Перечислим свойства конформных отображений, которые часто используются при решении задач.

При конформном отображении:

- область переходит в область;
- граница области переходит в границу области;

- сохраняется ориентация границы (рис.2);

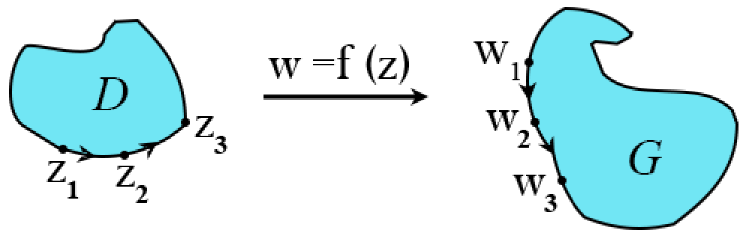

Рис.2

- сохраняются углы между кривыми в каждой точке области;
- у любого конформного отображения существует обратное отображение, причем тоже конформное;
- суперпозиция конформных отображений является конформным отображением.

Теперь мы уже можем перейти к рассмотрению свойств основных классов конформных отображений. Начнём с решения двух простых задачи, которые часто используются при решении более сложных заданий.

Задача 1 *Отобразить конформно на верхнюю полуплоскость область, изображенную на рис.3*

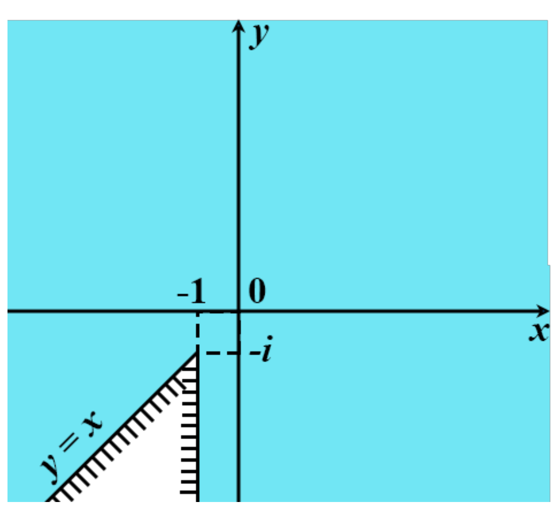

Рис.3

Решение.

Сначала переместим угол так, чтобы его вершина попала в точку $z = 0$.

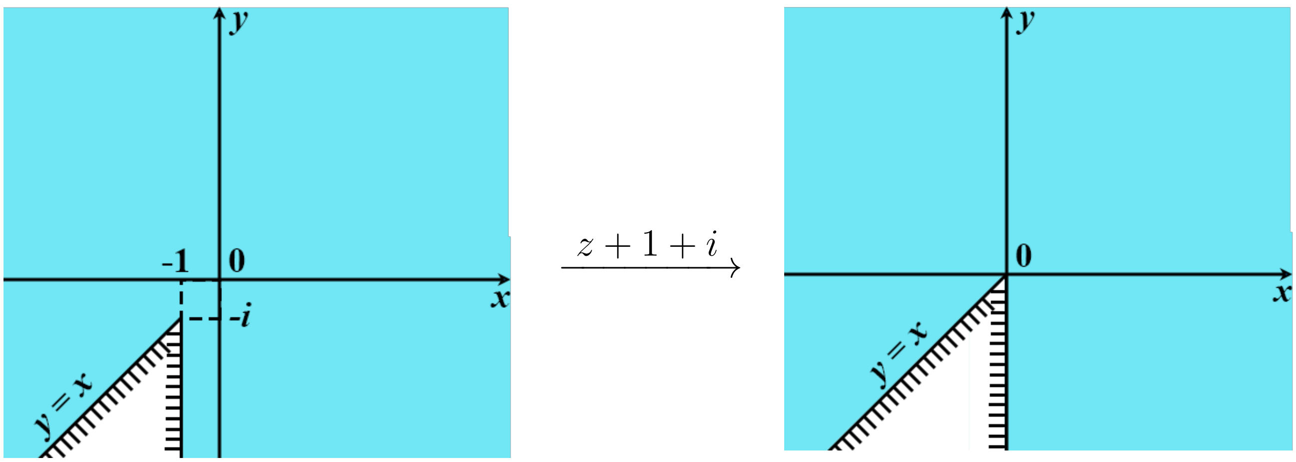

Рис.4

Теперь повернем угол так, чтобы одна из его сторон совпала с положительным направлением оси Ox, как показано на рис.5 справа.

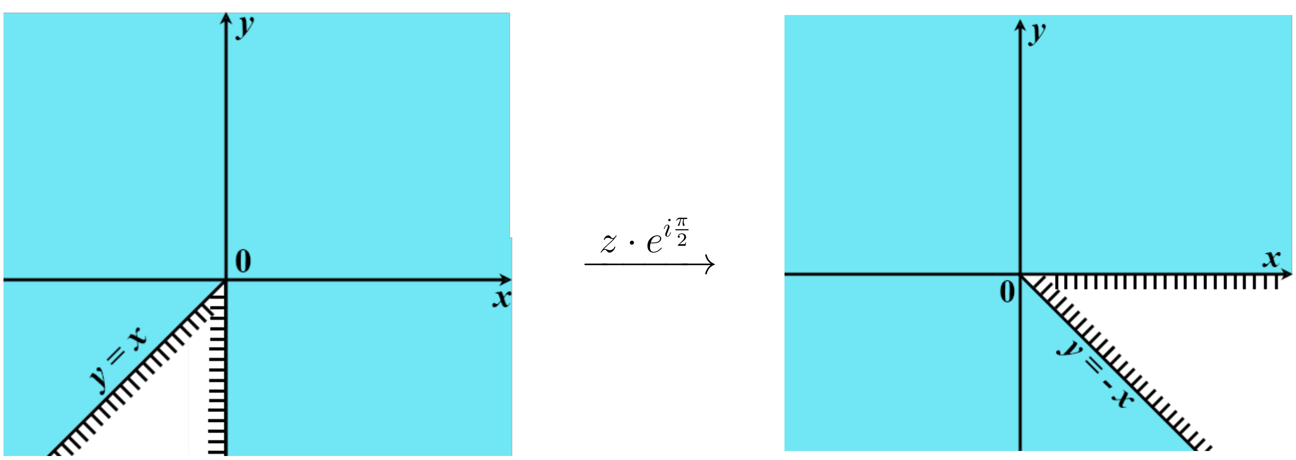

Рис.5

Теперь переведем угол в верхнюю полуплоскость, применив функцию, которая является регулярной вервью многозначной функции $f(z) = z^{\frac{4}{7}}$. При этом выберем такую регулярную ветвь $f(z)$, для которой $f(1 + i \cdot 0) = 1$.

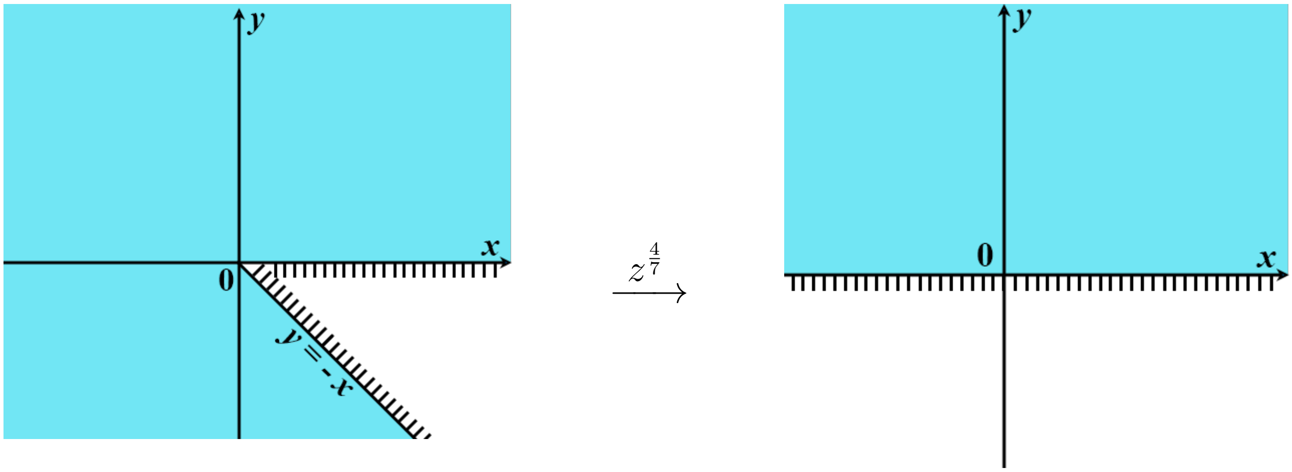

Рис.6

Поскольку суперпозиция конформных отображений является также конформным отображением, то мы получили конформное отображение, переводящее требуемую область в верхнюю полуплоскость.

Собирать применяемые при решении задачи функции в одну формулу не требуется до тех пор, пока Вас специально об этом не попросят. Ответ предоставляется в виде последовательности конформных отображений и рисунков.

Решение задачи 1 закончено.

Задача 2 («столбик») *Отобразить конформно на верхнюю полуплоскость область, изображенную на рис.7*

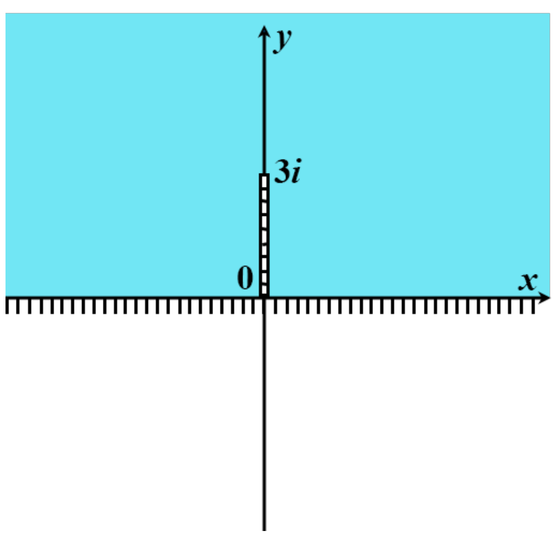

Рис.7

Решение.

Поскольку данная нам область меньше, чем верхняя полуплоскоскость, то она не содержит точек, дающих одно и то же значение при возведении в квадрат. Поэтому мы можем применить функцию $f(z) = z^2$, которая «выпрямит» границу области, превратив её в луч.

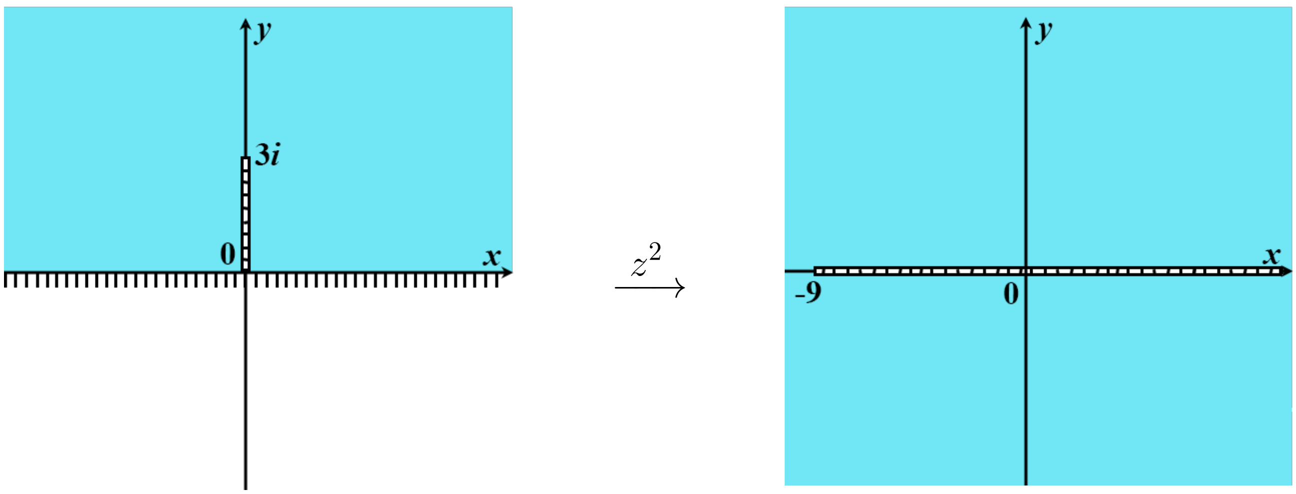

Рис.7

Теперь подвинем разрез так, чтобы его начало попало в точку $z = 0$.

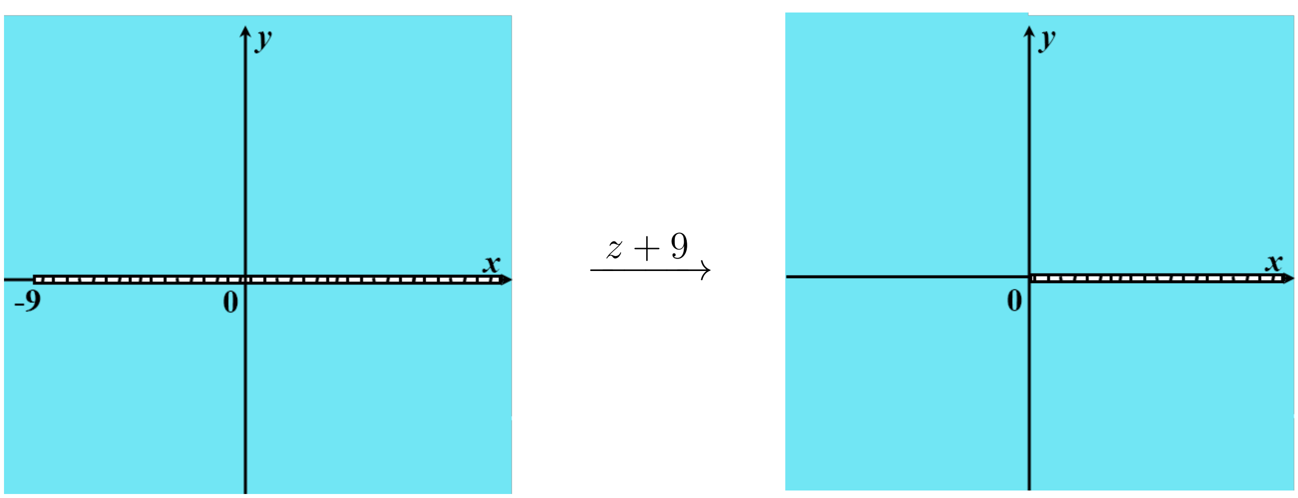

Рис.8

Наконец, применим функцию, которая является регулярной ветвью $\sqrt{z}$. Для этого выберем такую регулярную ветвь $f(z)$, на которой $f(1+i\cdot 0) = 1$.

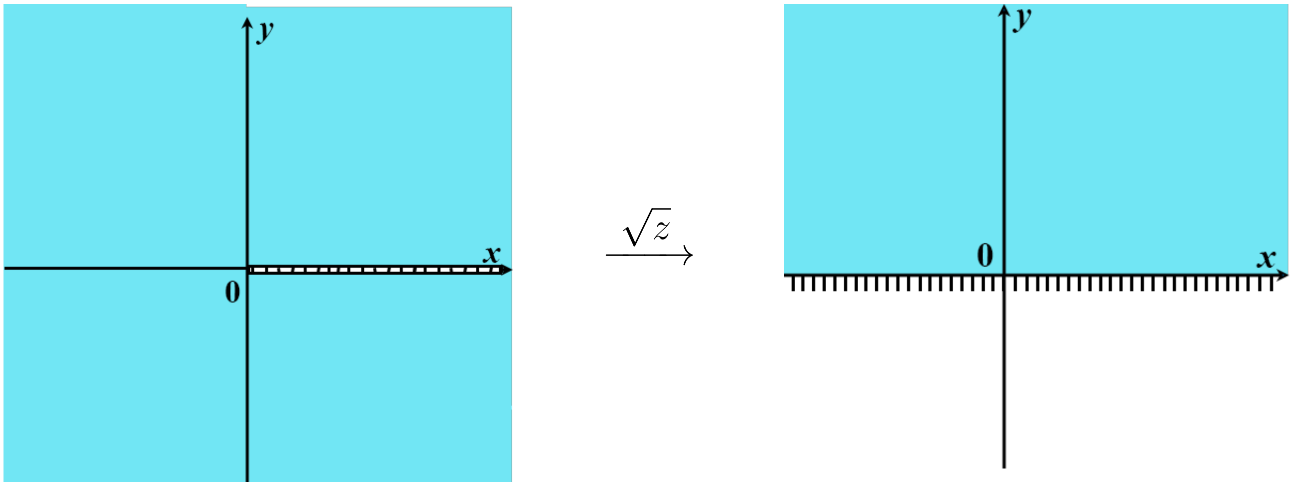

Рис.9

Решение задачи 2 закончено.

Дробно-линейные отображения

Очень важным видом конформных отображений являются дробно-линейные отображения.

Определение 2. Дробно-линейным отображением (преобразованием) называют рациональную функцию

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

где комплексные коэффициенты a, b, c, d удовлетворяют условию

$$ad - bc \neq 0$$

Утверждение 1. Каждое дробно-линейное отображение осуществляет конформное отображение всей расширенной комплексной плоскости на себя.

Это утверждение обычно доказывают на лекциях, и мы будем им пользоваться без доказательства.

Замечание 5. При дробно-линейном отображении точка $z = \infty$ переходит в точку $f(z) = \dfrac{a}{c}$, а точка $z = -\dfrac{d}{c}$ переходит в точку $f(z) = \infty$.

Дробно-линейные отображения в силу утверждения 1 обладают всеми свойствами конформных отображений, однако в дополнение к этим свойствам они обладают ещё и своими собственными важными **свойствами**. Перечислим их.

При дробно-линейном отображении:

- прямые и окружности переходят в прямые или окружности (прямая считается окружностью, содержащей точку ∞); это свойство называют круговым свойством дробно-линейных отображений;

- точки, симметричные относительно прямой или окружности, переходят в точки, симметричные относительно образа этой прямой или окружности; это свойство называют свойством сохранения симметрии относительно прямой или окружности при дробно-линейных отображениях;

  На всякий случай напомним, что изображенные на рис.10 точки z и z^* являются симметричными относительно прямой,

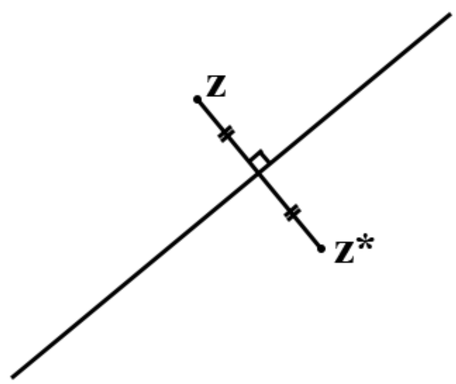

Рис.10

а изображенные на рис.11 точки z и z^* являются симметричными относительно окружности.

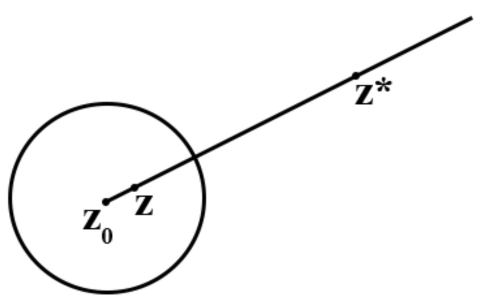

Рис.11

Изображенные на рис.11 симметричные относительно окружности точки z и z^* удовлетворяют равенству $|z-z_0| \cdot |z^*-z_0| = R^2$, где R – радиус окружности.

Подчеркнём особо, что при симметрии относительно окружности, центр окружности переходит в бесконечность, а бесконечность переходит в центр окружности.

- дробно-линейное отображение однозначно определяется образами трёх различных точек в расширенной комплексной плоскости.

Покажем, как используются эти свойства при решении задач.

Задача 3 *Отобразить конформно на верхнюю полуплоскость область, изображенную на рис.12*

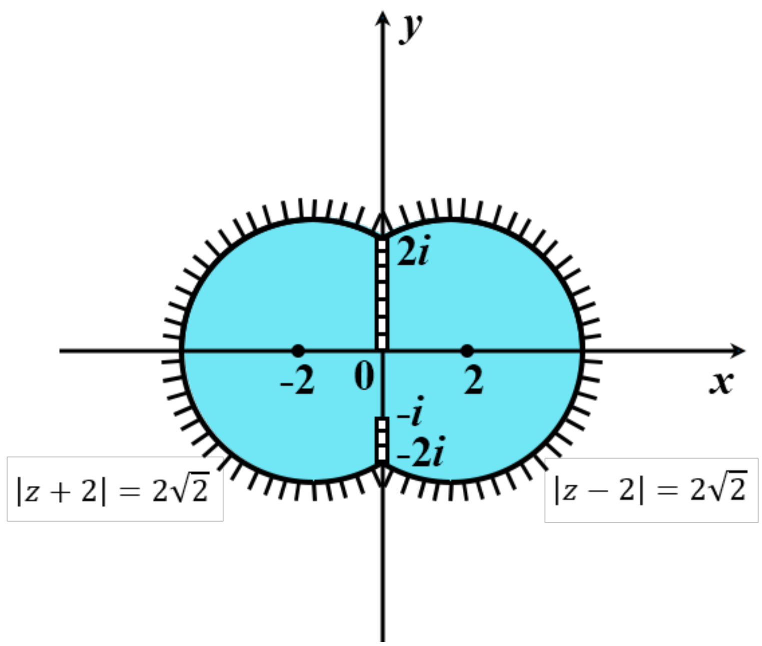

Рис.12

Решение.

Область, которую необходимо перевести в верхнюю полуплоскость, имеет достаточно сложную границу, состоящую из двух дуг окружностей и двух отрезков прямых.

Для того, чтобы понять, как можно упростить задачу, сначала обычно проверяют, существует ли точка комплексной плоскости, в которой пересекаются все окружности и прямые, задающие границу области. Как видно из рис.12, в нашем случае таких точек две: $z = 2i$ и $z = -2i$. Эту проверку осуществляют для того, чтобы выяснить, можно ли применить дробно-линейное преобразование, «выпрямляющее» участки границы области.

Для того, чтобы найти такое дробно-линейное преобразование, вспомним, что при дробно-линейном преобразовании прямые и окружности переходят в прямые и окружности. Кроме того, вспомним, что в случае, когда какая-либо точка прямой или окружности переходит при дробно-линейном преобразовании в ∞, то такая прямая или окружность переходит в прямую. Значит, можно «выпрямить» все части границы, если применить дробно-линейное преобразование, переводящее одну из точек $z = 2i$ или $z = -2i$ в ∞.

Напишем формулу для какого-нибудь дробно-линейного преобразования, переводящего точку $z = -2i$ в ∞, а точку $z = 2i$ в нуль.Таким преобразованием является, например, преобразование

$$f(z) = \frac{z - 2i}{z + 2i}$$

В этом преобразовании точка $z = 2i$, переходящая в нуль, была выбрана из соображений симметрии для облегчения расчетов.

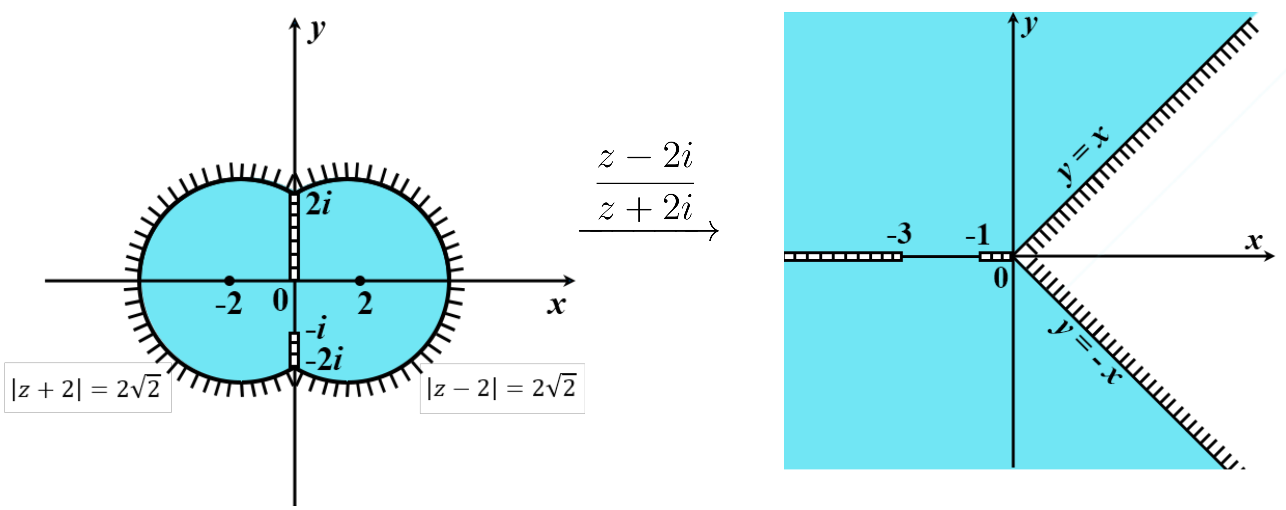

Рис.13

Для того,чтобы выяснить, куда перейдет рассматриваемая область при выбранном преобразовании, найдем сначала какую-нибудь фигуру, для которой легко понять, куда она перейдет. В нашем случае такой фигурой является мнимая ось. Из вида применяемого дробно-линейного преобразования ясно, что при подстановке в него чисто мнимых значений z результат будет действительным. Значит, мнимая ось перейдет в действительную, причем

$$z = 2i \ \to \ 0; \qquad z = 0 \ \to \ -1; \qquad z = -i \ \to \ -3; \qquad z = -2i \ \to \ \infty.$$

Выясним теперь, куда перейдет дуга окружности $|z-2| = 2\sqrt{2}$, ограничивающая область. Поскольку точка на этой дуге $z = 2i$ перейдет в нуль, а вся окружность перейдет в прямую, то дуга перейдет в луч с вершиной в нуле. Чтобы определить, какой из таких лучей нам нужен, вспомним про свойство сохранения углов при конформном отображении. Дуга окружности $|z-2| = 2\sqrt{2}$, ограничивающая область, образовывала с разрезом $[0, 2i]$ угол, равный $\dfrac{3\pi}{4}$, Значит, и луч, в который она перешла, будет образовывать с разрезом $[0, -1]$ угол, равный $\dfrac{3\pi}{4}$. Таким образом, это будет один из лучей на прямых $y = x$ или $y = -x$, находящийся в полуплоскости $x \geq 0$.

Из тех же соображений заключаем, что и дуга второй окружности $|z+2| = 2\sqrt{2}$, ограничивающая рассматриваемую область, перейдет во второй из двух лучей на прямых $y = x$ или $y = -x$, находящийся в полуплоскости $x \geq 0$.

Таким образом, после применения дробно-линейного отображения область принимает вид, изображенный справа на рис.13.

Теперь повернем получившийся угол так, чтобы одна из его сторон совпала с положительным направлением оси Ox, как показано на рис.14.

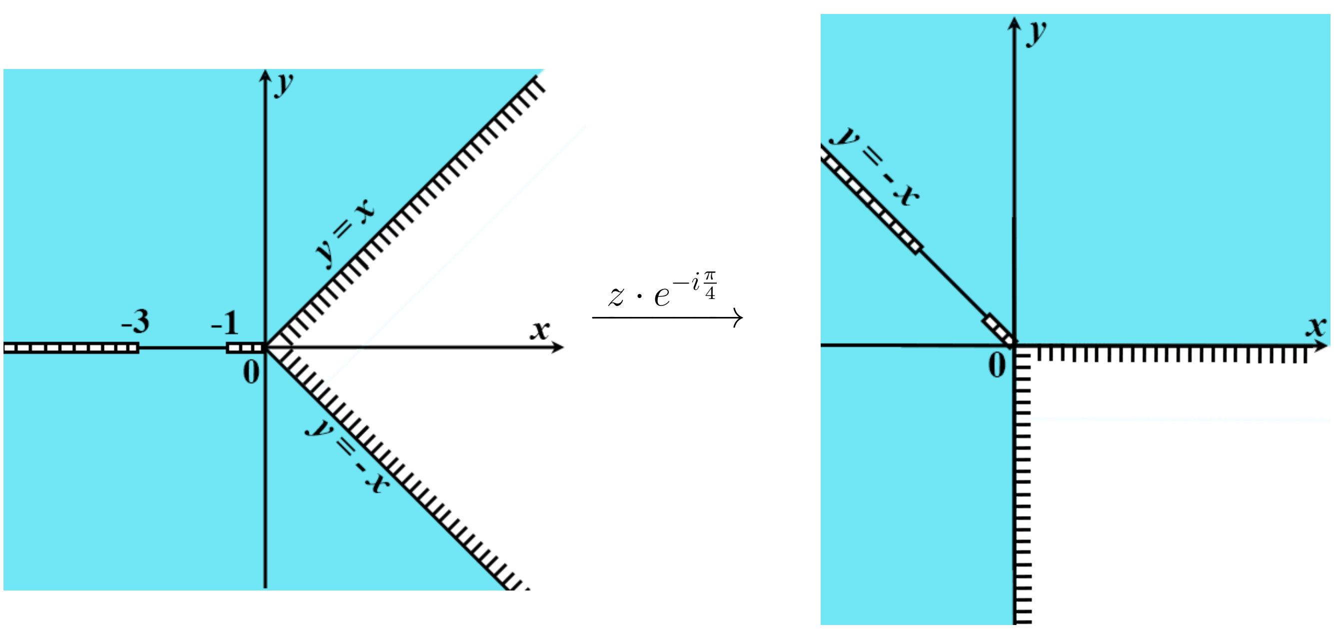

Рис.14

Теперь переведем угол в верхнюю полуплоскость, применив функцию, которая является регулярной ветвью многозначной функции $f(z) = z^{\frac{4}{3}}$. При этом выберем такую регулярную ветвь $f(z)$, для которой $f(1+i\cdot 0) = 1$.

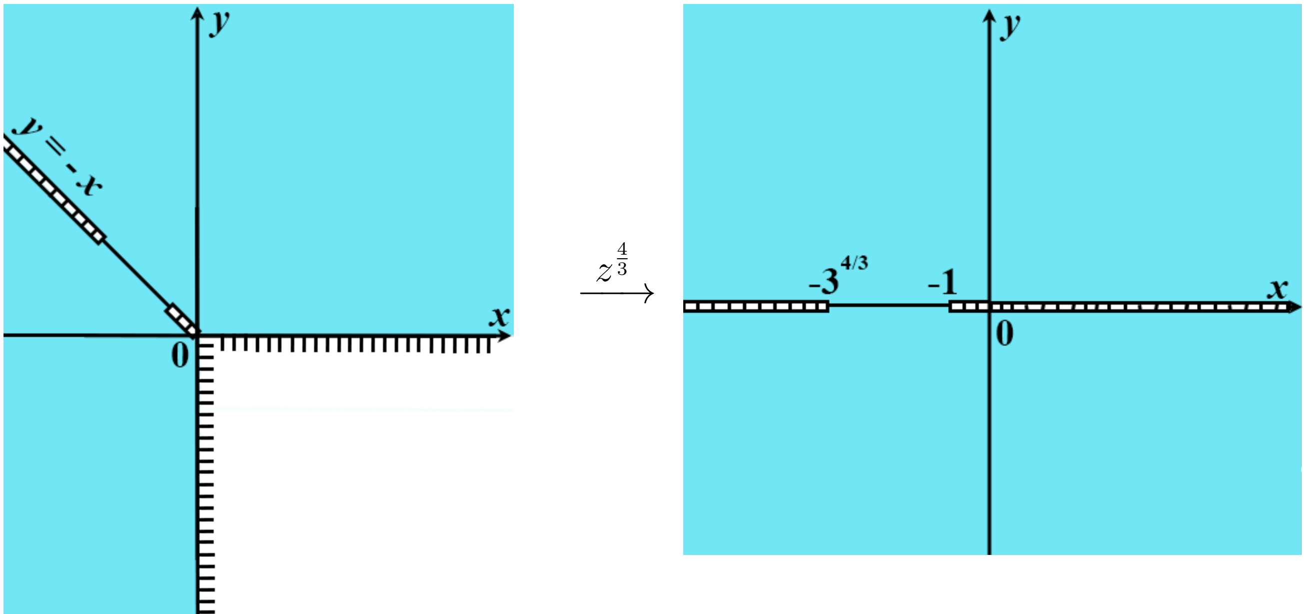

Рис.15

Теперь снова воспользуемся дробно-линейным отображением, чтобы перевести плоскость с разрезом, проходящим через ∞ (область в правой части рис.15 имеет один разрез, а не два), в плоскость с разрезом по положительному направлению действительной оси.

Напишем формулу для какого-нибудь дробно-линейного преобразования, переводящего точку $z = -3^{\frac{4}{3}}$ в ∞, а точку $z = -1$ в нуль.Таким преобразованием является, например, преобразование

$$f(z) = \frac{z+1}{z+\ 3^{\frac{4}{3}}}$$

Это отображение переводит действительную ось в действительную ось, при этом разрез, изображенный в правой части рис.15, переходит в луч действительной оси с вершиной в нуле. Однако существует два таких луча, и чтобы понять, в какой из них переходит разрез, нужно подставить в дробно-линейное отображение какую-нибудь точку на разрезе. Например, точка ∞ при этом дробно-линейном отображении перейдет в 1 . Таким образом, выбранное дробно-линейное отображение переведет разрез в луч $[0, +\infty)$ на действительной оси.

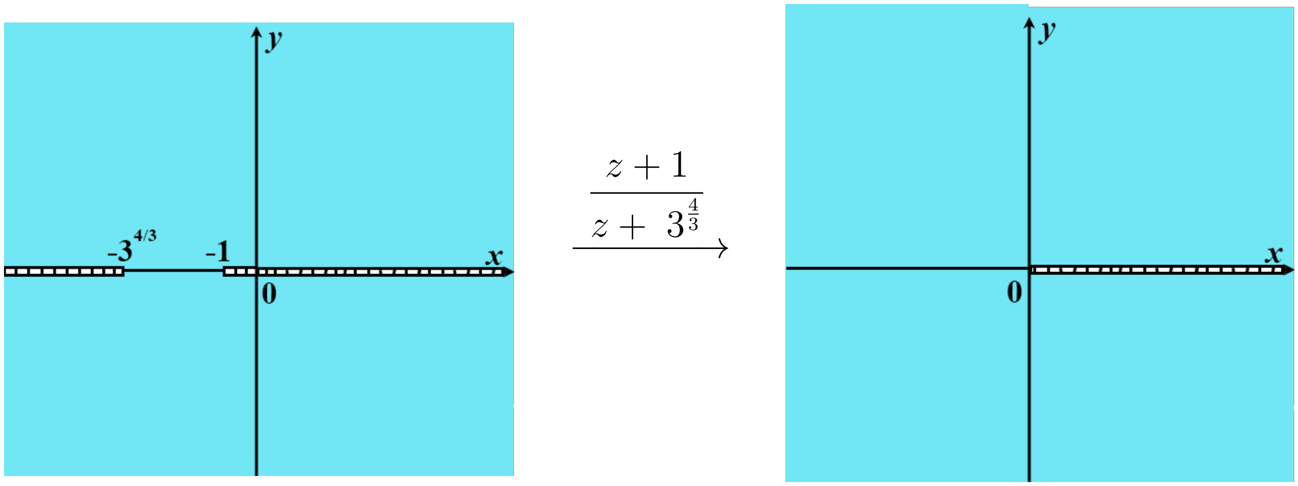

Рис.16

Наконец, применим функцию, которая является регулярной ветвью $\sqrt{z}$. Для этого выберем такую регулярную ветвь $f(z)$, на которой $f(1+i\cdot 0) = 1$.

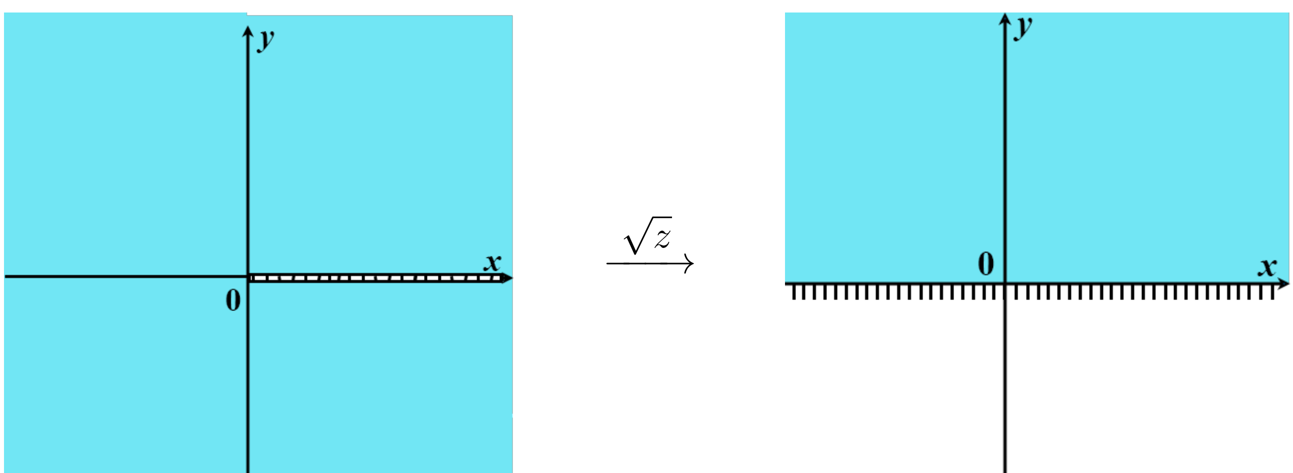

Рис.9

Решение задачи 3 закончено.

Следующие две задачи предлагаются Вам для самостоятельного решения.

Задача 4 *Отобразить конформно на верхнюю полуплоскость область, изображенную на рис.13*

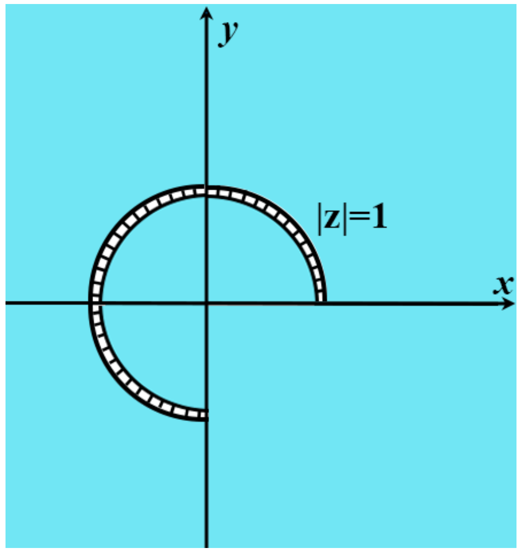

Рис.13

Задача 5 *Отобразить конформно на верхнюю полуплоскость область, изображенную на рис.14*

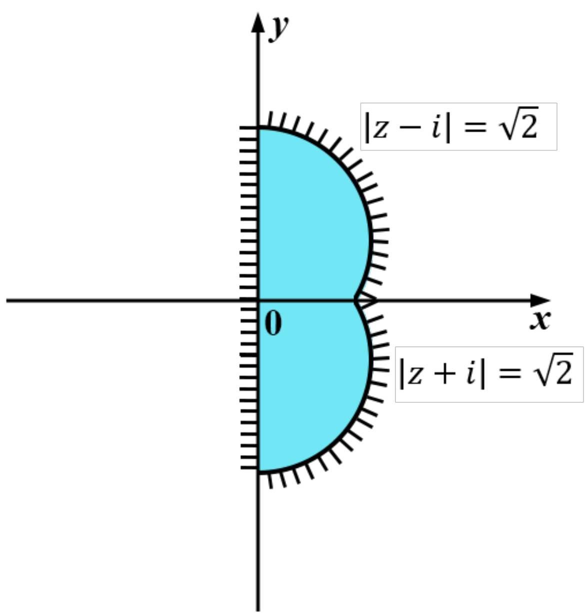

Рис.14

На следующем дистанционном занятии мы продолжим изучение темы «Конформные отображения».

Спасибо за внимание.
Не болейте!