Предел и непрерывность функций двух переменных

Самарова С.С.

Учебное пособие для дистанционных занятий по дисциплине «Многомерный анализ, интегралы и ряды»

1 курс

В пособии рассматриваются двойные пределы, повторные пределы и пределы по направлениям, а также понятия непрерывности и равномерной непрерывности функций двух переменных.

Двойной предел функций двух переменных

Определение 1 *Число A называют пределом (двойным пределом) функции $f(x,y)$ при $(x,y)\to(x_0,y_0)$ и обозначают*

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A\,,$$

если

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists\,\delta(\varepsilon)>0\ :\quad \forall(x,y),\quad 0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta(\varepsilon)$$

$$\to\quad |f(x,y)-A|<\varepsilon$$

Если на плоскости Oxy перейти к полярным координатам с началом в точке (x_0, y_0) (см. рис. 1)

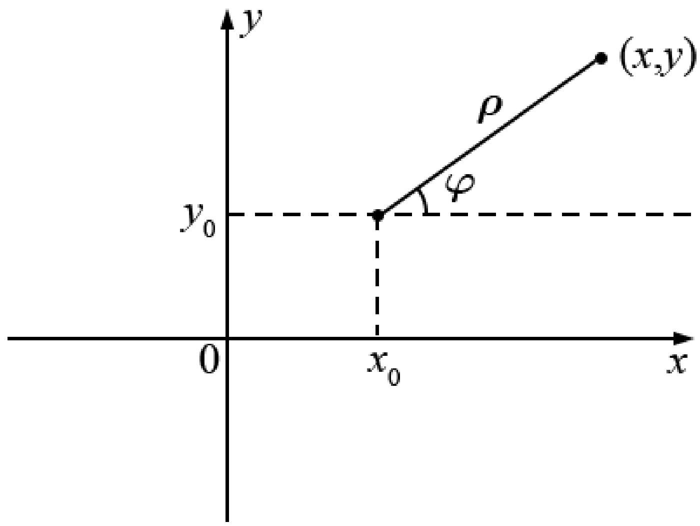

Рис. 1

то определение двойного предела можно переписать в виде

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \;:\quad \forall (\rho, \varphi), \quad 0 < \rho < \delta(\varepsilon)$$
$$\to \quad |f(x_0 + \rho \cos\varphi, y_0 + \rho \sin\varphi) - A| < \varepsilon$$

Получается, что функция $f(x_0+\rho\cos\varphi, y_0+\rho\sin\varphi)$ должна стремиться к числу A при $\rho \to 0$ при любом характере зависимости этой функции от переменной φ.

Поэтому для доказательства существования двойного предела

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A\,,$$

обычно используют следующее утверждение.

Утверждение 1 ***(Достаточное условие существования конечного двойного предела)***

Пусть существует такое число $\rho_0 > 0$, что для всех $\rho \in (0; \rho_0)$ и всех φ выполнена оценка

$$|f(x_0 + \rho \cos\varphi, y_0 + \rho \sin\varphi) - A| \leqslant F(\rho)$$

причем

$$\lim_{\rho\to 0} F(\rho) = 0$$

Тогда существует двойной предел

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A$$

Задача 1 *Найти предел*

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy^2}{\sqrt{x^4+y^4}}$$

Решение.

Выясним сначала, чему может быть равен этот предел, если предположить, что он существует.

В этом случае из определения двойного предела следует равенство

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy^2}{\sqrt{x^4+y^4}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \frac{xy^2}{\sqrt{x^4+y^4}} = 0$$

Поэтому, если двойной предел существует, то он равен нулю. Докажем, что действительно

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy^2}{\sqrt{x^4+y^4}} = 0$$

Для этого перейдем к полярным координатам и найдем оценку, не зависящую от угла φ,

$$\left|\frac{xy^2}{\sqrt{x^4+y^4}} - 0\right| = \left|\frac{\rho^3\cos\varphi\sin^2\varphi}{\sqrt{\rho^4\cos^4\varphi+\rho^4\sin^4\varphi}}\right| \leqslant \frac{\rho}{\sqrt{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi}} =$$

$$= \frac{\rho}{\sqrt{\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)^2 - 2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}} = \frac{\rho}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 2\varphi}} \leqslant \sqrt{2}\rho \ \to 0 \ \ (\rho\to 0)$$

Доказано в силу достаточного условия существования двойного предела.

Ответ. 0

В некоторых случаях при доказательстве существования двойного предела удобно использовать разложения по формуле Тейлора функций одной переменной. Продемонстрируем это на примере решения задачи из домашнего задания.

Задача 2 (задание §2, №48(6)) *Найти предел функции*

$$f(x,y) = \frac{1 - \sqrt[3]{\sin^4 x + \cos^4 y}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

в точке $(0,0)$.

Решение. Выясним сначала, чему может быть равен этот предел, если предположить, что он существует.

В этом случае из определения двойного предела следует равенство

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to +0\\ y=0}} f(x,y) = \lim_{x\to +0} \frac{1 - \sqrt[3]{\sin^4 x + 1}}{x} = \lim_{x\to +0} \frac{1-(1+o(x))}{x} = 0$$

Поэтому, если двойной предел существует, то он равен нулю. Докажем, что действительно

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1 - \sqrt[3]{\sin^4 x + \cos^4 y}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0\,.$$

С помощью разложений по формулам Тейлора при $x\to 0$ и $y\to 0$ получаем

$$\frac{1 - \sqrt[3]{\sin^4 x + \cos^4 y}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1 - \sqrt[3]{o(x)+1+o(y)}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1 - \big(1+o(x)+o(y)\big)}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \frac{o(x)+o(y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Покажем, что

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{o(x)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0\,.$$

Действительно,

$$\left|\frac{o(x)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \left|\frac{o(x)}{x}\right| \cdot \left|\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leqslant \left|\frac{o(x)}{x}\right| \to 0 \quad (\rho\to 0)$$

Точно также и

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{o(y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0\,.$$

Таким образом,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1-\sqrt[3]{\sin^4 x+\cos^4 y}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0\,.$$

Ответ. 0

Предел функции двух переменных по направлению

С понятием предела функции двух переменных близко связано понятие предела функции двух переменных по направлению, заданному вектором.

Определение 2 *Пусть* $\vec{e}=(\cos\varphi,\sin\varphi)$ *– единичный вектор. Пределом функции* $f(x,y)$ *при* $(x,y)\to(x_0,y_0)$ *по направлению вектора* $\vec{e}$ *(рис. 2) называют предел функции одной переменной* ρ

$$\lim_{\rho\to+0} f(x_0+\rho\cos\varphi,\, y_0+\rho\sin\varphi)$$

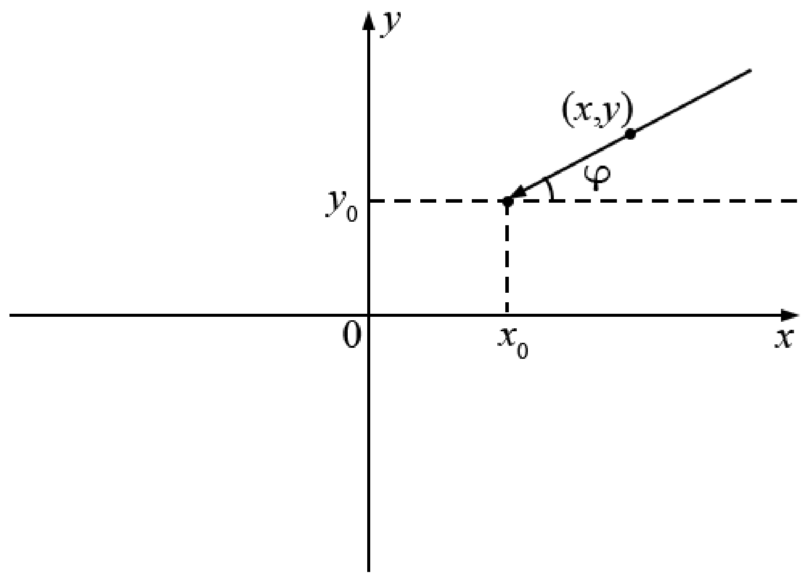

Рис. 2

Утверждение 2 *Если у функции* $f(x,y)$ *существует двойной предел*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = A\,,$$

то у нее существует предел в этой точке по любому направлению, и он равен A.

Следствие. Если пределы функции $f(x,y)$ при $(x,y) \to (x_0,y_0)$ по двум различным направлениям оказались разными, то у этой функции не существует двойного предела при $(x,y) \to (x_0,y_0)$.

Задача 3 *Найти предел*

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}$$

если он существует.

Решение.

Покажем, что этот двойной предел не существует. Для этого сначала найдем предел по направлению, заданному углом $\varphi = 0$

$$\lim_{\substack{x\to+0\\ y=0}} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=0$$

Теперь посчитаем предел по направлению, заданному углом $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$

$$\lim_{\substack{x\to+0\\ y=x}} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{x\to+0}\frac{x^4}{x^4}=1\neq 0$$

Поскольку пределы по этим двум направлениям оказались разными, то двойной предел не существует.

Ответ. Двойной предел не существует.

Равенство пределов функции по всем направлениям является необходимым условием существования двойного предела, но не достаточным, как показывает следующий пример.

Задача 4 *Доказать, что у функции*

$$f(x,y)=\frac{xy^2}{x^2+\left(x-y^2\right)^2}$$

двойной предел при $(x,y)\to(0,0)$ *не существует, хотя пределы по всем направлениям в этой точке существуют и равны между собой.*

Решение.

Рассмотрим направление $(\cos\varphi,\sin\varphi)$ и найдем предел по этому направлению.

Если $\cos\varphi=0$, то $x=0$, $y=\rho\sin\varphi$ и

$$\lim_{\substack{\rho\to+0\\ x=0}} \frac{xy^2}{x^2+(x-y^2)^2}=0$$

Если же $\cos\varphi\neq 0$, то

$$\lim_{\rho\to+0} \frac{xy^2}{x^2+(x-y^2)^2}=\lim_{\rho\to+0} \frac{\rho^3\cos\varphi\sin^2\varphi}{\rho^2\cos^2\varphi+(\rho\cos\varphi-\rho^2\sin^2\varphi)^2}=$$

$$= \lim_{\rho \to +0} \frac{\rho \cos\varphi \sin^2\varphi}{\cos^2\varphi + (\cos\varphi - \rho \sin^2\varphi)^2} = 0$$

Таким образом, пределы по всем направлениям $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ существуют и равны 0.

Покажем теперь, что двойной предел не существует. Действительно, если бы такой предел существовал, то он был бы равен 0. Однако выполнено равенство

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{xy^2}{x^2 + (x - y^2)^2} = \lim_{\substack{y \to 0 \\ x = y^2}} \frac{xy^2}{x^2 + (x - y^2)^2} = \lim_{y \to 0} \frac{y^4}{y^4} = 1 \neq 0$$

откуда следует, что двойной предел не существует.

Повторные пределы

Определение 3 *Пределы вида*

$$\lim_{x \to x_0} \left(\lim_{y \to y_0} f(x, y) \right) \quad \text{и} \quad \lim_{y \to y_0} \left(\lim_{x \to x_0} f(x, y) \right)$$

называют повторными пределами.

Конечно же, вычисление повторных пределов является более простой операцией, чем вычисление двойного предела, и довольно часто у студентов возникает желание заменить вычисление двойного предела вычислением повторного предела.

Покажем на примерах, что повторные пределы никак не связаны с двойными пределами.

В следующей задаче повторные пределы существуют, но не равны между собой, двойной предел при этом не существует.

Задача 5 *Найти*

$$\lim_{x \to 0} \left(\lim_{y \to 0} \frac{x^3 - y}{x^3 + y} \right); \qquad \lim_{y \to 0} \left(\lim_{x \to 0} \frac{x^3 - y}{x^3 + y} \right); \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^3 - y}{x^3 + y}$$

Решение.

Вычислим первый из повторных пределов

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^3-y}{x^3+y}\right)=\lim_{x\to 0}\ \frac{x^3}{x^3}=1$$

Вычислим второй из повторных пределов

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^3-y}{x^3+y}\right)=\lim_{y\to 0}\ \frac{-y}{y}=-1\neq 1$$

Покажем, что двойной предел не существует. Для этого найдем пределы по направлениям, заданным углами $\varphi=0$ и $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$.

Вычислим предел по направлению $\varphi=0$

$$\lim_{\substack{x\to +0\\ y=0}}\ \frac{x^3-y}{x^3+y}=\lim_{x\to +0}\ \frac{x^3}{x^3}=1$$

Теперь посчитаем предел по направлению, заданному углом $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$

$$\lim_{\substack{y\to +0\\ x=0}}\ \frac{x^3-y}{x^3+y}=\lim_{y\to +0}\frac{-y}{y}=-1$$

Поскольку пределы по этим двум направлениям оказались разными, то двойной предел не существует.

В следующей задаче повторные пределы существуют и равны между собой, а двойной предел при этом не существует.

Задача 6 (задание §2, №37(2)) *Найти*

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}\right);\qquad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}\right);\qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\ \frac{xy}{x^2+y^2}$$

Решение.

Вычислим первый из повторных пределов

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}\right)=0$$

Вычислим второй из повторных пределов

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}\right)=0$$

Покажем, что двойной предел не существует. Для этого сначала найдем предел по направлению, заданному углом $\varphi=0$

$$\lim_{\substack{x\to +0\\ y=0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=0$$

Теперь посчитаем предел по направлению, заданному углом $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$

$$\lim_{\substack{y\to +0\\ x=y}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{y\to +0}\frac{y^2}{2y^2}=\frac{1}{2}\neq 0$$

Поскольку пределы по этим двум направлениям оказались разными, то двойной предел не существует.

В следующей задаче повторные пределы не существуют, а двойной предел при этом существует.

Задача 7 *Найти*

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\left(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right)\right);\qquad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right)\right);$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right)$$

Решение.

Поскольку при любом $x\neq 0$ предел

$$\lim_{y\to 0}x\sin\frac{1}{y}$$

не существует, то не существует и первый из повторных пределов.

Аналогично, поскольку при любом $y\neq 0$ предел

$$\lim_{x\to 0}y\sin\frac{1}{x}$$

не существует, то не существует и второй из повторных пределов.

Покажем, что двойной предел существует. Действительно,

$$\left|x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right| \leqslant \left|x\sin\frac{1}{y}\right|+\left|y\sin\frac{1}{x}\right| \leqslant |x|+|y| \leqslant\ 2\rho\ \to\ 0 \quad (\rho\to 0)$$

Поэтому двойной предел

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right)=0$$

Непрерывность функции двух переменных

Определение 4 *Функцию* $f(x,y)$ *называют непрерывной в точке* $(x_0,\, y_0)$, *если она определена в некоторой окрестности этой точки и существует двойной предел*

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

Задача 8 (задание §2, №54) *Найти значение* a, *при котором функция*

$$u=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}\,, & \text{если}\quad x^2+y^2\neq 0,\\ a\,, & \text{если}\quad x^2+y^2=0,\end{cases}$$

в точке $(0,0)$ *является*

1) *непрерывной по прямой* $x=\alpha t,\quad y=\beta t,\quad \alpha^2+\beta^2\neq 0$*;*

2) *непрерывной по кривой* $y=\alpha x^2$*;*

3) *непрерывной.*

Решение.

1) На прямой $x=\alpha t,\quad y=\beta t,\quad \alpha^2+\beta^2\neq 0$ функция u является функцией одной переменной

$$u=u(t)=\begin{cases}\dfrac{\alpha^2\beta\, t}{\alpha^4t^2+\beta^2}\,, & \text{если}\quad t\neq 0,\\ a\,, & \text{если}\quad t=0,\end{cases}$$

Эта функция непрерывна при $t=0$ тогда и только тогда, когда $a=0$.

2) На параболе $y = \alpha x^2$ функция u является функцией одной переменной

$$u = u(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha x^4}{x^4 + \alpha^2 x^4}\,, & \text{если} \quad x \neq 0, \\ a\,, & \text{если} \quad x = 0, \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{1 + \alpha^2}\,, & \text{если} \quad x \neq 0, \\ a\,, & \text{если} \quad x = 0, \end{cases}$$

Эта функция непрерывна при $x = 0$ тогда и только тогда, когда

$$a = \frac{\alpha}{1 + \alpha^2}.$$

3) Докажем, что двойной предел

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

не существует.

Действительно, если бы этот предел существовал, то он был бы равен пределам по направлениям, а именно, 0, как мы выяснили в пункте 1).

С другой стороны, он должен был бы быть равным пределу по параболе $y = x^2$, который мы нашли в пункте 2), а именно, $\dfrac{1}{2}$.

Поскольку эти пределы не совпадают, то двойной предел не существует. Значит, функция u не является непрерывной ни при каком значении a.

Ответ. 1) $\quad a = 0$; $\quad$ 2) $\quad a = \dfrac{\alpha}{1 + \alpha^2}$;

3) функция не является непрерывной ни при каком значении a.

Равномерная непрерывность функции двух переменных

Определение равномерной непрерывности функции двух переменных на множестве A полностью аналогично соответствующему определению для функции одной переменной.

Определение 5 *Функцию* $f(x,y)$ *называют равномерно непрерывной на множестве* A, *если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \,:\, \forall (x_1,y_1) \in A \,, \forall (x_2,y_2) \in A,$$
$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} < \delta(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad |f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)| < \varepsilon$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема Кантора. Функция, непрерывная на замкнутом ограниченном множестве, равномерно непрерывна на этом множестве.

Решим задачу из домашнего задания.

Задача 9 (задание §2, №77(3)) *Исследовать на равномерную непрерывность функцию*

$$f(x,y) = \sin\frac{1}{x^2+y^2-1}$$

на множестве $A = \{x^2+y^2<1\}$.

Решение.

Докажем, что функция $f(x,y)$ не является равномерно непрерывной на множестве A. Для этого рассмотрим эту функцию на множестве $A \cap \{y=0\}$:

$$f(x,0) = \sin\frac{1}{x^2-1}, \quad x \in (-1;1).$$

Найдем точки $x \in (0;1)$, в которых $f(x,0)=1$:

$$\sin\frac{1}{x^2-1} = 1$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{\pi}{2} - 2\pi n, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$x_n = \sqrt{\frac{2}{\pi-4\pi n}+1}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Найдем точки $\tilde{x} \in (0;1)$, в которых $f(\tilde{x},0) = -1$:

$$\sin \frac{1}{\tilde{x}^2 - 1} = -1$$

$$\frac{1}{\tilde{x}^2 - 1} = -\frac{\pi}{2} - 2\pi n, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\tilde{x}_n = \sqrt{-\frac{2}{\pi + 4\pi n} + 1}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Заметим, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \tilde{x}_n = 1$$

поэтому

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - \tilde{x}_n| = 0$$

Следовательно,

$$\forall \delta > 0 \quad \exists N_0 : \forall n \geqslant N_0 \quad \to \quad |x_n - \tilde{x}_n| < \delta$$

Теперь построим отрицание к определению равномерной непрерывности функции на множестве A.

$$\exists\, \varepsilon = 2 > 0 : \quad \forall \delta > 0 : \exists\, (x_{N_0}, 0) \in A\,, \exists\, (\tilde{x}_{N_0}, 0) \in A,$$
$$|x_{N_0} - \tilde{x}_{N_0}| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x_{N_0}, 0) - f(\tilde{x}_{N_0}, 0)| = 2 \geqslant \varepsilon$$

Доказано.

Ответ. Функция не является равномерно непрерывной на множестве A.

Спасибо за внимание.
Не болейте!