Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические и гиперболические функции

Самарова С.С.

Учебное пособие для дистанционных занятий по дисциплине «Многомерный анализ, интегралы и ряды»

1 курс

В пособии рассматриваются методы интегрирования выражений, содержащих тригонометрические и гиперболические функции. Решаются типовые примеры из студенческих домашних заданий и экзаменационных контрольных работ.

Универсальная тригонометрическая подстановка

Если неопределенный интеграл имеет вид

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx$$

то избавиться от тригонометрических функций можно при помощи универсальной тригонометрической подстановки

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = 2\operatorname{arctg} t \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

В этом случае

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Задача 1 *Найти интеграл*

$$\int \frac{1-\sin x+\cos x}{1+\sin x-\cos x}\,dx$$

Решение.

Воспользовавшись универсальной тригонометрической подстановкой, сведем интеграл к интегралу от рациональной дроби

$$\int \frac{1-\sin x+\cos x}{1+\sin x-\cos x}\,dx \underset{\substack{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}\\ dx=\frac{2\,dt}{1+t^2}}}{=} \int \frac{1-\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2\,dt}{1+t^2} =$$

$$= 2\int \frac{2-2t}{\big(2t^2+2t\big)\big(1+t^2\big)}\,dt = 2\int \frac{1-t}{t(t+1)\big(1+t^2\big)}\,dt$$

Представим подынтегральную функцию в виде суммы простейших дробей с неопределенными коэффициентами

$$\frac{1-t}{t(t+1)\big(1+t^2\big)} = \frac{A}{t}+\frac{B}{t+1}+\frac{Ct+D}{1+t^2}$$

Коэффициенты A и B находим по формулам

$$A = \left.\frac{1-t}{(t+1)\big(1+t^2\big)}\right|_{t=0} = 1$$

$$B = \left.\frac{1-t}{t\big(1+t^2\big)}\right|_{t=-1} = -1$$

Следовательно,

$$\frac{Ct+D}{1+t^2} = \frac{1-t}{t(t+1)\big(1+t^2\big)} - \frac{1}{t} + \frac{1}{t+1} = \frac{1-t-(t+1)\big(1+t^2\big)+t\big(1+t^2\big)}{t(t+1)\big(1+t^2\big)} =$$

$$= \frac{1-t-t-1-t^3-t^2+t+t^3}{t(t+1)\big(1+t^2\big)} = \frac{-t^2-t}{t(t+1)\big(1+t^2\big)} = -\frac{1}{1+t^2}$$

Таким образом,

$$2\int \frac{1-t}{t(t+1)\big(1+t^2\big)}\,dt = 2\int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} - \frac{1}{1+t^2}\right) dt =$$

$$= 2\ln|t| - 2\ln|t+1| - 2\,\mathrm{arctg}\,t + C =$$

$$= 2\ln\left|\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right| - 2\ln\left|\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}+1\right| - 2\,\mathrm{arctg}\left(\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right) + C =$$

$$= 2\ln\left|\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right| - 2\ln\left|\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}+1\right| - x + C$$

Ответ.

$$\int \frac{1-\sin x+\cos x}{1+\sin x-\cos x}\,dx = 2\ln\left|\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right| - 2\ln\left|\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}+1\right| - x + C$$

Вычисление интегралов вида $\displaystyle\int \sin^n x\cos^m x\,dx$

Применение универсальной тригонометрической подстановки часто приводит к трудоемким вычислениям, поэтому в ряде случаев удобнее использовать другие методы.

Для вычисления интеграла

$$\int \sin^n x\cos^m x\,dx,$$

где m и n – целые числа,

- в случае, когда m – нечетное число, удобно сделать замену переменной

$$t = \sin x$$

- в случае, когда n – нечетное число, удобно сделать замену переменной

$$t = \cos x$$

- в случае, когда m и n – четные неотрицательные числа, нужно, применяя тригонометрические формулы, преобразовать подынтегральную функцию к сумме синусов/косинусов кратных углов;
- в случае, когда m и n – четные числа, и хотя бы одно из них отрицательное, удобно сделать замену переменной

$$t = \operatorname{tg} x, \quad \text{если } m < 0;$$

или

$$t = \operatorname{ctg} x, \quad \text{если } n < 0.$$

Задача 2 *Найти интеграл*

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos x}\, dx$$

Решение.

Поскольку $\cos x$ входит в подынтегральную функцию в нечетной степени, то сделаем замену переменной

$$t = \sin x, \quad dt = \cos x\, dx$$

Тогда

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos x}\, dx = \int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}\, \cos x\, dx \underset{\substack{t=\sin x\\ dt=\cos x\, dx}}{=} \int \frac{t^4}{1-t^2}\, dt =$$

$$= -\int \frac{t^4-1+1}{t^2-1}\, dt = -\int \left(t^2+1+\frac{1}{t^2-1}\right) dt =$$

$$= -\frac{t^3}{3} - t - \frac{1}{2}\, \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = -\frac{\sin^3 x}{3} - \sin x - \frac{1}{2}\, \ln\left|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right| + C$$

Ответ.

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos x}\, dx = -\frac{\sin^3 x}{3} - \sin x - \frac{1}{2}\, \ln\left|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right| + C$$

Задача 3 *Найти интеграл*

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}$$

Решение.

Поскольку степени $\sin x$ и $\cos x$ четные и отрицательные, то сделаем замену переменной

$$t = \operatorname{tg} x, \quad dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$$

Тогда

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x} = \int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} \underset{\substack{t=\operatorname{tg} x\\ dt=\frac{dx}{\cos^2 x}}}{=} \int \frac{t^2+1}{t^2}\, \left(t^2+1\right) dt =$$

$$= \int \frac{t^4+2t^2+1}{t^2}\, dt = \int \left(t^2+2+\frac{1}{t^2}\right) dt =$$

$$= \frac{t^3}{3} + 2t - \frac{1}{t} + C = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + 2\operatorname{tg} x - \frac{1}{\operatorname{tg} x} + C$$

Ответ.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x} = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + 2\operatorname{tg} x - \frac{1}{\operatorname{tg} x} + C$$

Вычисление интегралов вида $\int \frac{dx}{a + b\cos^2 x + c\sin^2 x + d\cos x \sin x}$

Продемонстрируем методику вычисления таких интегралов на следующем примере.

Задача 4 *Найти интеграл*

$$\int \frac{dx}{2 + 3\sin 2x + 2\cos^2 x}$$

Решение.

Воспользовавшись основным тригонометрическим тождеством и формулой для синуса двойного угла, преобразуем интеграл к более удобному виду

$$\int \frac{dx}{2 + 3\sin 2x + 2\cos^2 x} = \int \frac{dx}{2\cos^2 x + 2\sin^2 x + 6\sin x\cos x + 2\cos^2 x} =$$

$$= \int \frac{dx}{2\sin^2 x + 6\sin x\cos x + 4\cos^2 x} = \int \frac{1}{2\operatorname{tg}^2 x + 6\operatorname{tg} x + 4} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x}$$

В результате замены

$$t = \operatorname{tg} x, \quad dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$$

интеграл сводится к вычислению интеграла от рациональной дроби

$$\int \frac{1}{2\,\mathrm{tg}^2 x + 6\,\mathrm{tg}\, x + 4} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} \underset{\substack{t = \mathrm{tg}\, x \\ dt = \frac{dx}{\cos^2 x}}}{=} \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + 3t + 2}$$

Представив подынтегральную функцию в виде суммы простейших дробей

$$\frac{1}{t^2 + 3t + 2} = \frac{1}{(t+1)(t+2)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t+2}$$

найдем коэффициенты A и B по формулам

$$A = \left.\frac{1}{t+2}\right|_{t=-1} = 1$$

$$B = \left.\frac{1}{t+1}\right|_{t=-2} = -1$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + 3t + 2} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2} \right) dt = \frac{1}{2}\, \ln|t+1| - \frac{1}{2}\, \ln|t+2| + C =$$

$$= \frac{1}{2}\, \ln|\,\mathrm{tg}\, x + 1| - \frac{1}{2}\, \ln|\,\mathrm{tg}\, x + 2| + C$$

Ответ.

$$\int \frac{dx}{2 + 3\sin 2x + 2\cos^2 x} = \frac{1}{2}\, \ln|\,\mathrm{tg}\, x + 1| - \frac{1}{2}\, \ln|\,\mathrm{tg}\, x + 2| + C$$

Вычисление интегралов вида $\displaystyle\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)\,dx$

Методы вычисления интегралов, содержащих гиперболические функции, полностью аналогичны методам вычисления интегралов, содержащих тригонометрические функции, описанным выше.

Аналогом универсальной тригонометрической подстановки является «универсальная гиперболическая подстановка»

$$t = \operatorname{th}\frac{x}{2}$$

В этом случае

$$dt = \frac{1}{2\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}}\,dx = \frac{1}{2}\left(1-\operatorname{th}^2\frac{x}{2}\right)dx \quad\Rightarrow\quad dx = \frac{2\,dt}{1-t^2}$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{2\operatorname{sh}\frac{x}{2}\operatorname{ch}\frac{x}{2}}{\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}-\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}} = \frac{2\ \operatorname{th}\ \frac{x}{2}}{1-\operatorname{th}^2\ \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1-t^2}$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}+\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}}{\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}-\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}} = \frac{1+\operatorname{th}^2\frac{x}{2}}{1-\operatorname{th}^2\frac{x}{2}} = \frac{1+t^2}{1-t^2}$$

Задача 5 *Найти интеграл*

$$\int\frac{dx}{4+5\operatorname{ch} x}$$

Решение.

Воспользовавшись «универсальной гиперболической подстановкой», получаем

$$\int\frac{dx}{4+5\operatorname{ch} x} \underset{\substack{t=\operatorname{th}\frac{x}{2}\\ dx=\frac{2\,dt}{1-t^2}}}{=} \int\frac{2\,dt}{(1-t^2)\left(4+\frac{5\,(1+t^2)}{1-t^2}\right)} = \int\frac{2\,dt}{4-4t^2+5+5t^2} =$$

$$= \int\frac{2\,dt}{9+t^2} = \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3} + C = \frac{2}{3}\ \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{th}\frac{x}{2}}{3} + C$$

Ответ.

$$\int \frac{dx}{4+5\operatorname{ch}x} = \frac{2}{3}\ \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{th}\frac{x}{2}}{3} + C$$

Задача 6 (задание, §4, №10(1)) *Найти интеграл*

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}x\operatorname{ch}^2 x}$$

Решение.

Поскольку $\operatorname{sh}x$ входит в подынтегральную функцию в нечетной степени, то сделаем замену переменной

$$t = \operatorname{ch}x, \quad dt = \operatorname{sh}x\,dx$$

Тогда

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}x\operatorname{ch}^2 x} = \int \frac{\operatorname{sh}x\,dx}{\operatorname{sh}^2 x\operatorname{ch}^2 x} \underset{\substack{t=\operatorname{ch}x\\ dt=\operatorname{sh}x\,dx}}{=} \int \frac{dt}{(t^2-1)t^2} = \int \frac{t^2+(1-t^2)}{(t^2-1)t^2}\,dt =$$

$$= \int\left(\frac{1}{t^2-1} - \frac{1}{t^2}\right)dt = \frac{1}{2}\ \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + \frac{1}{t} + C = \frac{1}{2}\ \ln\left|\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}\right| + \frac{1}{\operatorname{ch}x} + C$$

Ответ.

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}x\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{2}\ \ln\left|\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}\right| + \frac{1}{\operatorname{ch}x} + C$$

Применение тригонометрических и гиперболических подстановок для вычисления интегралов от рациональных дробей и иррациональных функций

Многие интегралы можно вычислять различными способами. В ряде случаев вычисление интегралов от рациональных дробей и иррациональных функций с помощью тригонометрических и гиперболических подстановок позволяет значительно облегчить расчеты.

Разберем несколько примеров.

Задача 7 *Найти интеграл*

$$\int \sqrt{(4-x^2)^3}\,dx$$

Решение.

Сделаем замену переменной

$$x = 2\sin t, \quad dx = 2\cos t\,dt$$

Тогда

$$\int \sqrt{(4-x^2)^3}\,dx \underset{\substack{x=2\sin t\\ dx=2\cos t\,dt}}{=} 16\int \cos^4 t\,dt = 4\int (1+\cos 2t)^2\,dt =$$

$$= 4\int (1+2\cos 2t+\cos^2 2t)\,dt = 4\int \left(1+2\cos 2t+\frac{1+\cos 4t}{2}\right)\,dt =$$

$$= 2\int (3+4\cos 2t+\cos 4t)\,dt = 6t+4\sin 2t+\frac{1}{2}\sin 4t + C =$$

$$= 6t+8\sin t\cos t+2\sin t\cos t(1-2\sin^2 t)+C =$$

$$= 6t+10\sin t\cos t-4\sin^3 t\cos t+C =$$

$$= 6\arcsin\frac{x}{2} + 5x\,\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} - \frac{x^3}{2}\,\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} + C$$

Ответ.

$$\int\sqrt{(4-x^2)^3}\,dx = 6\arcsin\frac{x}{2} + 5x\,\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} - \frac{x^3}{2}\,\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} + C$$

Задача 8 *Найти интеграл*

$$\int\sqrt{9+x^2}\,dx$$

Решение.

Сделаем замену переменной

$$x = 3\operatorname{sh}t, \quad dx = 3\operatorname{ch}t\,dt$$

Тогда

$$\int\sqrt{9+x^2}\,dx \underset{\substack{x=3\operatorname{sh}t\\ dx=3\operatorname{ch}t\,dt}}{=} 9\int\operatorname{ch}^2 t\,dt = \frac{9}{2}\int(1+\operatorname{ch}2t)\,dt =$$

$$= \frac{9\,t}{2} + \frac{9}{4}\operatorname{sh}2t + C$$

Для того, чтобы вернуться к исходной переменной, решим уравнение

$$x = 3\operatorname{sh}t$$

$$x = \frac{3e^t - 3e^{-t}}{2}$$

$$3(e^t)^2 - 2x\,e^t - 3 = 0$$

$$(e^t)_{1,2} = \frac{x \pm \sqrt{x^2+9}}{3}$$

Поскольку $e^t > 0$, то

$$e^t = \frac{x + \sqrt{x^2+9}}{3}$$

$$t = \ln(x + \sqrt{x^2+9}) - \ln 3$$

Следовательно,

$$\int \sqrt{9+x^2}\,dx = \frac{9\,t}{2} + \frac{9}{4}\operatorname{sh} 2t + C = \frac{9}{2}\ \ln(x + \sqrt{x^2+9}) + \frac{3}{2}\,x\sqrt{1+\frac{x^2}{9}} + C$$

Ответ.

$$\int \sqrt{9+x^2}\,dx = \frac{9}{2}\ \ln(x + \sqrt{x^2+9}) + \frac{1}{2}\,x\sqrt{9+x^2} + C$$

Спасибо за внимание.
Не болейте!