Интегрирование иррациональных функций

Самарова С.С.

Учебное пособие для дистанционных занятий по дисциплине «Многомерный анализ, интегралы и ряды»

1 курс

Пособие посвящено методам вычисления неопределенных интегралов от иррациональных функций. Основу этих методов составляет поиск подходящих замен переменной, позволяющих свести интегралы от иррациональных функций к интегралам от рациональных дробей. Рассматриваются подстановки Эйлера и подстановки, с помощью которых можно проинтегрировать дифференциальный бином. Решаются типовые примеры из студенческих домашних заданий и экзаменационных контрольных работ.

Интегрирование иррациональных функций, содержащих корни из дробно-линейного выражения

Если неопределенный интеграл имеет вид

$$\int R\left(x,\ \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}},\ \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}},\dots,\ \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx$$

то избавиться от радикалов

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}},\ \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}},\ldots,\ \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}$$

можно при помощи замены переменной

$$t=\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{n}}$$

где n – наименьшее общее кратное чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k$.

Задача 1 (Экзаменационная контрольная работа 1969/1970 уч. года)
Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x}+\sqrt[3]{1+x}}$$

Решение.

Сделаем замену переменной

$$t=(1+x)^{1/6} \quad \Rightarrow \quad x=t^6-1, \quad dx=6t^5dt$$

Тогда

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x}+\sqrt[3]{1+x}} \underset{\substack{x=t^6-1\\ dx=6t^5dt}}{=} \int \frac{6t^5dt}{t^3+t^2}=6\int\frac{t^3dt}{t+1}$$

Мы получили интеграл от рациональной дроби. Для того, чтобы его вычислить, выделим у этой дроби целую часть, разделив числитель на знаменатель с остатком

$$\begin{array}{r|l}
t^3 & t+1 \\ \cline{2-2}
t^3+t^2 & t^2-t+1 \\ \cline{1-1}
-t^2 & \\
-t^2-t & \\ \cline{1-1}
t & \\
t+1 & \\ \cline{1-1}
-1 &
\end{array}$$

Таким образом,

$$6\int\frac{t^3dt}{t+1}=6\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)dt=2t^3-3t^2+6t-6\ln|t+1|+C$$

Возвращаясь к исходной переменной, получим

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x}+\sqrt[3]{1+x}}=2\sqrt{1+x}-3\sqrt[3]{1+x}+6\sqrt[6]{1+x}-6\ln\left|\sqrt[6]{1+x}+1\right|+C$$

Ответ.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x}+\sqrt[3]{1+x}}=2\sqrt{1+x}-3\sqrt[3]{1+x}+6\sqrt[6]{1+x}-6\ln\left|\sqrt[6]{1+x}+1\right|+C$$

Интегрирование иррациональных функций, содержащих квадратный корень из квадратного трехчлена. Подстановки Эйлера

Если неопределенный интеграл имеет вид

$$\int R\left(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx\,,\qquad a\neq 0,\quad b^2-4ac\neq 0,$$

то избавиться от $\sqrt{ax^2+bx+c}$ можно при помощи одной из подстановок Эйлера:

- при $a>0$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}\,x\pm t$$

- при $c>0$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm xt\pm\sqrt{c}$$

- при $b^2-4ac>0$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\big(x-x_1\big)t$$

где x_1 – один из корней уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Задача 2 *Найти интеграл*

$$\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$$

Решение.

Поскольку у квадратного трехчлена x^2+x+1 коэффициент при x^2 положителен, то воспользуемся первой подстановкой Эйлера

$$\sqrt{x^2+x+1}=x+t$$

Выразим из этого равенства переменную x

$$x^2+x+1=x^2+2xt+t^2$$

$$x(2t-1)=1-t^2$$

$$x=\frac{1-t^2}{2t-1}\quad\Rightarrow\quad dx=\frac{-2t(2t-1)-2(1-t^2)}{(2t-1)^2}\,dt=\frac{-2(t^2-t+1)}{(2t-1)^2}\,dt$$

В результате получим

$$x+1=\frac{1-t^2}{2t-1}+1=\frac{1-t^2+2t-1}{2t-1}=\frac{2t-t^2}{2t-1}$$

$$\sqrt{x^2+x+1}=x+t=\frac{1-t^2}{2t-1}+t=\frac{1-t^2+2t^2-t}{2t-1}=\frac{t^2-t+1}{2t-1}$$

Теперь проведем, наконец, замену переменной

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}} \underset{\substack{x=\frac{1-t^2}{2t-1} \\ dx=\frac{-2(t^2-t+1)}{(2t-1)^2}\,dt}}{=} \int \frac{-2(t^2-t+1)(2t-1)(2t-1)}{(2t-1)^2(2t-t^2)(t^2-t+1)}\,dt =$$

$$= 2\int \frac{1}{t(t-2)}\,dt$$

Представим подынтегральную функцию в виде суммы простейших дробей с неопределенными коэффициентами

$$\frac{1}{t(t-2)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-2}$$

Как мы видели ранее, коэффициенты A и B можно легко найти по формулам

$$A = \left.\frac{1}{t-2}\right|_{t=0} = -\frac{1}{2}$$

$$B = \left.\frac{1}{t}\right|_{t=2} = \frac{1}{2}$$

Таким образом,

$$2\int \frac{1}{t(t-2)}\,dt = \int \left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{t-2}\right)dt = -\int \frac{dt}{t} + \int \frac{dt}{t-2} =$$

$$= -\ln|t| + \ln|t-2| + C$$

Остается вернуться к исходной переменной x

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}} = -\ln|\sqrt{x^2+x+1}-x| + \ln|\sqrt{x^2+x+1}-x-2| + C$$

Ответ.

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}} = -\ln|\sqrt{x^2+x+1}-x| + \ln|\sqrt{x^2+x+1}-x-2| + C$$

Интегрирование дифференциального бинома

Неопределенный интеграл

$$\int x^r \left(ax^q+b\right)^p \, dx \,,$$

где a, b – действительные числа, а r, p, q – рациональные числа, называют интегралом от дифференциального бинома.
Вычислить интеграл от дифференциального бинома можно только в следующих случаях:

- p – целое число.

  В этом случае под интегралом имеются корни только из x. Как мы видели в начале этого занятия, для вычисления такого интеграла нужно сделать замену переменной

  $$x = t^s,$$

  где s – наименьшее общее кратное знаменателей рациональных чисел r и q.

- $\dfrac{r+1}{q}$ – целое число.

  В этом случае интеграл сводится к интегралу от рациональной дроби с помощью замены

  $$ax^q + b = t^s,$$

  где s – знаменатель рационального числа p.

- $\dfrac{r+1}{q}+p$ – целое число.

  В этом случае интеграл сводится к интегралу от рациональной дроби с помощью замены

  $$\frac{ax^q+b}{x^q}=t^s,$$

  где s – знаменатель рационального числа p.

Во всех остальных случаях интеграл от дифференциального бинома не выражается через элементарные функции.

Задача 3 *Найти интеграл*

$$\int\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\,dx$$

Решение.

Под интегралом стоит дифференциальный бином, у которого

$$r=0,\quad p=\frac{1}{3},\quad q=\frac{1}{4}$$

Поскольку

$$\frac{r+1}{q}=4 \text{ – целое число,}$$

то сделаем в интеграле замену переменной

$$1+\sqrt[4]{x}=t^3,\quad\Rightarrow\quad x=\left(t^3-1\right)^4\quad\Rightarrow\quad dx=12\left(t^3-1\right)^3t^2dt$$

В результате получаем

$$\int\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\,dx \underset{\substack{x=\left(t^3-1\right)^4\\ dx=12\left(t^3-1\right)^3t^2dt}}{=} 12\int\left(t^3-1\right)^3t^3dt=$$

$$= 12\int\left(t^{12}-3t^{9}+3t^{6}-t^{3}\right)dt = \frac{12\,t^{13}}{13}-\frac{36\,t^{10}}{10}+\frac{36\,t^{7}}{7}-3t^{4}+C =$$

$$= \frac{12}{13}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^{\frac{13}{3}}-\frac{36}{10}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^{\frac{10}{3}}+\frac{36}{7}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^{\frac{7}{3}}-3\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^{4}+C$$

Ответ.

$$\int\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\,dx =$$

$$= \frac{12}{13}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^{\frac{13}{3}}-\frac{36}{10}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^{\frac{10}{3}}+\frac{36}{7}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^{\frac{7}{3}}-3\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^{4}+C$$

Задача 4 *Найти интеграл*

$$\int\frac{dx}{x^{2}\,\sqrt[3]{\left(2+x^{3}\right)^{5}}}$$

Решение.

Под интегралом стоит дифференциальный бином, у которого

$$r=-2,\quad p=-\frac{5}{3},\quad q=3$$

Поскольку

$$\frac{r+1}{q}+p=-\frac{1}{3}-\frac{5}{3}=-2 \text{ – целое число,}$$

то сделаем в интеграле замену переменной

$$\frac{2+x^{3}}{x^{3}}=t^{3},\quad\Rightarrow\quad x^{3}=\frac{2}{t^{3}-1}\quad\Rightarrow\quad x=\sqrt[3]{2}\,\left(t^{3}-1\right)^{-\frac{1}{3}}\quad\Rightarrow$$

$$dx = -\frac{\sqrt[3]{2}}{3}\left(t^3-1\right)^{-\frac{4}{3}} 3t^2\,dt = -\sqrt[3]{2}\left(t^3-1\right)^{-\frac{4}{3}} t^2\,dt$$

$$x^{-2} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\left(t^3-1\right)^{\frac{2}{3}}, \qquad \left(2+x^3\right)^{-\frac{5}{3}} = (xt)^{-5} = \frac{\left(t^3-1\right)^{\frac{5}{3}}}{\sqrt[3]{32}\,t^5}$$

В результате замены получаем

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt[3]{\left(2+x^3\right)^5}} \underset{\substack{x = \sqrt[3]{2}\left(t^3-1\right)^{-\frac{1}{3}} \\ dx = -\sqrt[3]{2}\left(t^3-1\right)^{-\frac{4}{3}} t^2\,dt}}{=} -\frac{1}{4}\int \frac{t^3-1}{t^3}dt =$$

$$= -\frac{1}{4}\int\left(1-\frac{1}{t^3}\right)dt = -\frac{1}{4}\,t - \frac{1}{8t^2} + C = -\frac{\sqrt[3]{2+x^3}}{4x} - \frac{x^2}{8\sqrt[3]{\left(2+x^3\right)^2}} + C$$

Ответ.

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt[3]{\left(2+x^3\right)^5}} = -\frac{\sqrt[3]{2+x^3}}{4x} - \frac{x^2}{8\sqrt[3]{\left(2+x^3\right)^2}} + C$$

Спасибо за внимание.
Не болейте!