Интегрирование рациональных дробей

Самарова С.С.

Учебное пособие для дистанционных занятий по дисциплине «Многомерный анализ, интегралы и ряды»

1 курс

В пособии рассматриваются методы вычисления неопределенных интегралов от рациональных дробей. Решаются типовые примеры из студенческих домашних заданий и экзаменационных контрольных работ.

Интегралами от рациональных дробей называют интегралы вида

$$\int \frac{Q(x)}{P(x)}\,dx$$

где $Q(x)$ и $P(x)$ – многочлены.

Вычисление таких интегралов осуществляется по следующей схеме.

1. Выделение целой части рациональной дроби в случае, если степень $Q(x)$ больше либо равна степени $P(x)$
2. Разложение знаменателя рациональной дроби на множители
3. Представление рациональной дроби в виде суммы простейших дробей
4. Интегрирование простейших дробей

Покажем на примерах, как реализуется эта схема.

Начнем с самого простого случая, когда все корни многочлена $P(x)$ действительные и различные.

Задача 1 (экзаменационная контрольная работа 1967/1968 уч. года)
Найти интеграл

$$\int \frac{3-x}{x^3+4x^2+3x}\,dx$$

Решение.

- Поскольку степень числителя дроби меньше степени знаменателя, то выделять целую часть не нужно.
- Разложим знаменатель на множители

$$x^3+4x^2+3x = x\big(x^2+4x+3\big) = x(x+1)(x+3)$$

- Поскольку в полученном разложении знаменателя на множители все множители линейные и входят в разложение в первой степени (все корни знаменателя действительные и различные), то разложение подынтегральной функции на простейшие дроби имеет вид

$$\frac{3-x}{x^3+4x^2+3x} = \frac{3-x}{x(x+1)(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+3} \tag{1}$$

  где A, B, C – числа, называемые неопределенными коэффициентами.

  Для того, чтобы найти эти числа, существует много способов, и можно использовать любой из них. Главное, чтобы результат разложения дроби на простейшие был правильным.

  Мы воспользуемся подходящим к этому случаю быстрым способом.

  Найдем сначала, например, коэффициент C. Для этого умножим равенство (1) на $(x+3)$:

$$\frac{3-x}{x(x+1)} = \frac{A(x+3)}{x} + \frac{B(x+3)}{x+1} + C \tag{2}$$

  Подставляя в тождество (2) $x=-3$, получаем

$$C = \left.\frac{3-x}{x(x+1)}\right|_{x=-3} = 1$$

Действуя аналогично, находим

$$B = \left.\frac{3-x}{x(x+3)}\right|_{x=-1} = -2$$

$$A = \left.\frac{3-x}{(x+1)(x+3)}\right|_{x=0} = 1$$

Таким образом,

$$\frac{3-x}{x^3+4x^2+3x} = \frac{1}{x} - \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x+3}$$

Обязательно проверьте себя! Сложите дроби в правой части равенства и убедитесь, что получилась дробь из левой части. Студенты допускают огромное количество ошибок при разложении дроби на простейшие.

- После того, как разложение на простейшие дроби получено, можно вычислить данный в задаче интеграл

$$\int \frac{3-x}{x^3+4x^2+3x}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x+3}\right) dx =$$

$$= \int \frac{dx}{x} - 2\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{dx}{x+3} = \ln|x| - 2\ln|x+1| + \ln|x+3| + C$$

Ответ.

$$\int \frac{3-x}{x^3+4x^2+3x} = \ln|x| - 2\ln|x+1| + \ln|x+3| + C$$

Решим теперь задачу, в которой требуется вычислить интеграл от рациональной дроби в случае, когда все корни многочлена, стоящего в знаменателе дроби, действительные, но среди них имеются кратные корни.

Задача 2 (экзаменационная контрольная работа 1984-1985 уч. года)
Найти интеграл

$$\int \frac{2x^4+x^3-6}{x^3-3x+2}\,dx$$

Решение.

- Поскольку степень числителя больше степени знаменателя, то выделим из дроби целую часть, разделив числитель на знаменатель с остатком

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
2x^4 & +x^3 & & & -6 & x^3-3x+2 \\ \cline{6-6}
2x^4 & & -6x^2 & +4x & & 2x+1 \\ \cline{1-4}
 & x^3 & +6x^2 & -4x & -6 & \\
 & x^3 & & -3x & +2 & \\ \cline{2-5}
 & & 6x^2 & -x & -8 &
\end{array}
$$

  Таким образом,

$$\int \frac{2x^4+x^3-6}{x^3-3x+2}\,dx = \int\left(2x+1+\frac{6x^2-x-8}{x^3-3x+2}\right)dx =$$

$$= x^2+x+\int \frac{6x^2-x-8}{x^3-3x+2}\,dx$$

  и задача свелась к вычислению интеграла от рациональной дроби

$$\int \frac{6x^2-x-8}{x^3-3x+2}\,dx$$

- Для вычисления интеграла разложим знаменатель дроби на множители

$$x^3-3x+2 = x^3-x-2x+2 = x\big(x^2-1\big)-2(x-1) = (x-1)\big(x^2+x-2\big) =$$

$$= (x-1)(x+2)(x-1) = (x-1)^2(x+2)$$

- Теперь представим дробь в виде суммы простейших дробей

$$\frac{6x^2-x-8}{x^3-3x+2} = \frac{6x^2-x-8}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+2} \tag{3}$$

  где A, B, C – неопределенные коэффициенты.

  Отметим особо, что, поскольку множитель $(x-1)$ входит в знаменатель дроби **с квадратом**, то ему в разложении дроби на простейшие соответствуют **два** слагаемых: с первой и со второй степенью в знаменателях.

Коэффициент C можно найти тем же способом, как это было сделано в задаче 1,

$$C = \left.\frac{6x^2 - x - 8}{(x-1)^2}\right|_{x=-2} = 2$$

Для того, чтобы определить коэффициент B, умножим равенство (3) на $(x-1)^2$

$$\frac{6x^2 - x - 8}{x+2} = A(x-1) + B + \frac{C(x-1)^2}{x+2}$$

Полагая $x = 1$, находим

$$B = \left.\frac{6x^2 - x - 8}{x+2}\right|_{x=1} = -1$$

К сожалению, найти A тем же способом не удастся, но можно подставить в тождество

$$\frac{6x^2 - x - 8}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{x+2}$$

вместо x любое подходящее число, например, $x = 0$:

$$-4 = -A - 1 + 1 \quad \Rightarrow \quad A = 4$$

Таким образом,

$$\frac{6x^2 - x - 8}{x^3 - 3x + 2} = \frac{4}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{x+2}$$

- Теперь можно проинтегрировать дробь

$$\int \frac{6x^2 - x - 8}{x^3 - 3x + 2}\,dx = \int \left(\frac{4}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{x+2}\right)dx =$$

$$= 4\int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{(x-1)^2} + 2\int \frac{dx}{x+2} = 4\,\ln|x-1| + \frac{1}{x-1} + 2\,\ln|x+2| + C$$

Следовательно,

$$\int \frac{2x^4+x^3-6}{x^3-3x+2}\,dx = x^2+x+\int \frac{6x^2-x-8}{x^3-3x+2}\,dx =$$

$$= x^2+x+4\ \ln|x-1|+\frac{1}{x-1}+2\ \ln|x+2|+C$$

Ответ.

$$\int \frac{2x^4+x^3-6}{x^3-3x+2}\,dx = x^2+x+4\ \ln|x-1|+\frac{1}{x-1}+2\ \ln|x+2|+C$$

Решим теперь задачу, в которой требуется вычислить интеграл от рациональной дроби в случае, когда многочлен, стоящий в знаменателе дроби, имеет квадратичный множитель, не раскладывающийся в произведение линейных.

Задача 3 (экзаменационная контрольная работа 2020-2021 уч.года)
Найти интеграл

$$\int \frac{4x^3+7x^2-13x-7}{(2x-1)^2(x^2+2x+10)}\,dx$$

Решение.

- Поскольку степень числителя дроби меньше степени знаменателя, то выделять целую часть не нужно.
- Знаменатель уже разложен на множители, т.к. квадратный трехчлен

  $$x^2+2x+10$$

  действительных корней не имеет.
- Поскольку в разложении знаменателя дроби на множители линейный множитель $(2x-1)$ входит в разложение во второй степени, а квадратичный множитель $(x^2+2x+10)$ – в первой степени, то разложение подынтегральной функции на простейшие дроби имеет вид

$$\frac{4x^3+7x^2-13x-7}{(2x-1)^2(x^2+2x+10)}=\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{(2x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+10}$$

где A, B, C, D – неопределенные коэффициенты.

Отметим особо, что в числителе простейшей дроби с квадратичным знаменателем стоит **не число, а многочлен первой степени** $Cx+D$.

Сразу найдем коэффициент B

$$B=\left.\frac{4x^3+7x^2-13x-7}{x^2+2x+10}\right|_{x=\frac{1}{2}}=-1$$

Следовательно,

$$\frac{4x^3+7x^2-13x-7}{(2x-1)^2(x^2+2x+10)}=\frac{A}{2x-1}-\frac{1}{(2x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+10}$$

Умножая это равенство на общий знаменатель, получаем тождество

$$4x^3+7x^2-13x-7=$$

$$=A(2x-1)(x^2+2x+10)-(x^2+2x+10)+(Cx+D)(2x-1)^2=$$

$$=2Ax^3+3Ax^2+18Ax-10A-x^2-2x-10+(Cx+D)(4x^2-4x+1)=$$

$$=x^3(2A+4C)+x^2(3A-1+4D-4C)+x(18A-2-4D+C)+(-10A-10+D)$$

Приравнивая коэффициенты при каждой степени x, получаем систему уравнений

$$\begin{cases}2A+4C=4\\3A-4C+4D=8\\18A+C-4D=-11\\-10A+D=3\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}A+2C=2\\5A+4D=12\\18A+C-4D=-11\\-10A+D=3\end{cases}\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} A+2C=2 \\ 5A+4D=12 \\ 18A+C-4D=-11 \\ 9D=27 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A=0 \\ C=1 \\ D=3 \end{cases}$$

Таким образом,

$$\frac{4x^3+7x^2-13x-7}{(2x-1)^2(x^2+2x+10)} = -\frac{1}{(2x-1)^2} + \frac{x+3}{x^2+2x+10}$$

- Воспользовавшись представлением подынтегральной функции в виде суммы простейших дробей, получаем

$$\int \frac{4x^3+7x^2-13x-7}{(2x-1)^2(x^2+2x+10)}\,dx = \int \left(-\frac{1}{(2x-1)^2} + \frac{x+3}{x^2+2x+10}\right) dx =$$

$$= -\int \frac{dx}{(2x-1)^2} + \int \frac{x+3}{x^2+2x+10}\,dx$$

Вычислим эти интегралы по отдельности.

1. Первый интеграл можно вычислить при помощи замены переменной

$$-\int \frac{dx}{(2x-1)^2} \underset{\substack{t=2x-1 \\ dt=2dx}}{=} -\int \frac{dt}{2t^2} = \frac{1}{2t} + C = \frac{1}{2(2x-1)} + C$$

2. Для подсчета второго интеграла выделим в числителе дроби производную знаменателя

$$x+3 = \frac{1}{2}\,(2x+2)+2$$

и представим интеграл в виде суммы

$$\int \frac{x+3}{x^2+2x+10}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+10}\,dx + 2\int \frac{1}{x^2+2x+10}\,dx$$

Первый интеграл вычисляем с помощью замены переменной

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+10}\,dx \underset{\substack{t=x^2+2x+10\\ dt=(2x+2)dx}}{=} \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+10| + C$$

Во втором интеграле выделим в знаменателе полный квадрат и сделаем замену переменной

$$2\int \frac{1}{x^2+2x+10}\,dx = 2\int \frac{1}{(x+1)^2+9}\,dx \underset{\substack{t=x+1\\ dt=dx}}{=} 2\int \frac{1}{t^2+9}\,dt =$$

$$= \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3} + C = \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3} + C$$

Складывая полученные результаты, получаем

$$\int \frac{x+3}{x^2+2x+10}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+10| + \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3} + C$$

Следовательно,

$$\int \frac{4x^3+7x^2-13x-7}{(2x-1)^2(x^2+2x+10)}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2(2x-1)} + \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+10| + \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3} + C$$

Ответ.

$$\int \frac{4x^3+7x^2-13x-7}{(2x-1)^2(x^2+2x+10)}\,dx = \frac{1}{2(2x-1)}+\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+10|+\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3}+C$$

Решим еще одну задачу, в которой применение общего метода приводит к трудоемким выкладкам, как, впрочем, всегда и бывает, а творческий подход позволяет получить ответ гораздо быстрее и легче.

Задача 4 (задание, §2 №8(2)) *Найти интеграл*

$$\int \frac{x^4-2x^2+2}{(x^2-2x+2)^2}\,dx$$

Решение.

Сделаем замену переменной

$$\int \frac{x^4-2x^2+2}{(x^2-2x+2)^2}\,dx = \int \frac{x^4-2x^2+2}{\big((x-1)^2+1\big)^2}\,dx \underset{\substack{t=x-1\\ dt=dx}}{=}$$

$$= \int \frac{(t+1)^4-2(t+1)^2+2}{(t^2+1)^2}\,dt =$$

$$= \int \frac{t^4+4t^3+6t^2+4t+1-2t^2-4t-2+2}{(t^2+1)^2}\,dt = \int \frac{t^4+4t^3+4t^2+1}{(t^2+1)^2}\,dt =$$

$$= \int \left(1+\frac{t^4+4t^3+4t^2+1-t^4-2t^2-1}{(t^2+1)^2}\right)dt =$$

$$= t + \int \frac{4t^3}{(t^2+1)^2}\,dt + \int \frac{2t^2}{(t^2+1)^2}\,dt$$

Вычислим каждый из полученных интегралов по отдельности.

- В первом интеграле сделаем замену переменной

$$\int \frac{4t^3}{(t^2+1)^2}\, dt \underset{\substack{y=t^2+1\\ dy=2tdt}}{=} \int \frac{2(y-1)}{y^2}\, dy = 2\int \frac{dy}{y} - 2\int \frac{dy}{y^2} =$$

$$= 2\ln|y| + \frac{2}{y} + C = 2\ln\bigl(t^2+1\bigr) + \frac{2}{t^2+1} + C$$

- Во втором интеграле применим интегрирование по частям

$$\int \frac{2t^2}{(t^2+1)^2}\, dt = \int t\, \frac{2t}{(t^2+1)^2}\, dt = \int t\left(-\frac{1}{t^2+1}\right)' dt =$$

$$= -\frac{t}{t^2+1} + \int \frac{1}{t^2+1}\, dt = -\frac{t}{t^2+1} + \operatorname{arctg} t + C$$

Таким образом,

$$t + \int \frac{4t^3}{(t^2+1)^2}\, dt + \int \frac{2t^2}{(t^2+1)^2}\, dt =$$

$$= t + 2\ln\bigl(t^2+1\bigr) + \frac{2}{t^2+1} - \frac{t}{t^2+1} + \operatorname{arctg} t + C$$

Остается возвратиться к исходной переменной x

$$\int \frac{x^4-2x^2+2}{(x^2-2x+2)^2}\, dx =$$

$$= x - 1 + 2\ln\bigl((x-1)^2+1\bigr) + \frac{2-(x-1)}{(x-1)^2+1} + \operatorname{arctg}(x-1) + C$$

Ответ.

$$\int \frac{x^4-2x^2+2}{(x^2-2x+2)^2}\, dx = x + 2\ln\bigl(x^2-2x+2\bigr) + \frac{3-x}{x^2-2x+2} + \operatorname{arctg}(x-1) + C$$

Спасибо за внимание.
Не болейте!