Неопределенный интеграл. Простейшие приемы интегрирования

Самарова С.С.

Учебное пособие для дистанционных занятий по дисциплине «Многомерный анализ, интегралы и ряды»

1 курс

В пособии рассматриваются методы вычисления неопределенных интегралов с помощью замены переменной и интегрирования по частям. Решаются типовые примеры из студенческих домашних заданий и экзаменационных контрольных работ.

Напомним нужные теоретические сведения.

Первообразная

Определение 1 *Функцию* $F(x)$ *называют первообразной функции* $f(x)$ *на интервале* (a,b), *если* $F(x)$ *дифференцируема на* (a,b) *и для любого* $x \in (a,b)$ *справедливо равенство*

$$F'(x) = f(x)$$

Если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на интервале (a,b), то и для любого числа C функция $F(x)+C$ также является первообразной $f(x)$ на интервале (a,b).

Если функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$ являются первообразными функции $f(x)$ на интервале (a,b), то $F_1(x) - F_2(x) = C$, где C – число.

Неопределенный интеграл

Определение 2 *Пусть* $F(x)$ *– первообразная функции* $f(x)$. *Множество всех первообразных функции* $f(x)$ *, имеющее вид*

$$\{F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}\}$$

называют неопределенным интегралом функции $f(x)$ *и обозначают*

$$\int f(x)\,dx$$

Таким образом,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

В этой формуле

- функцию $f(x)$ называют подынтегральной функцией;
- переменную x называют переменной интегрирования.

Табличные интегралы

Следующие формулы являются основой для решения любых задач, где требуется интегрирование.

Их нужно выучить наизусть!

- $\displaystyle\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\,; \quad \alpha \neq -1$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + C$
- $\displaystyle\int a^{x}\,dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C\,; \quad a > 0,\ a \neq -1$
- $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
- $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C$

- $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
- $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
- $\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C$
- $\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C$
- $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$
- $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$
- $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C\,; \quad a \neq 0$
- $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\, \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C\,; \quad a \neq 0$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{|a|} + C\,; \quad a \neq 0$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C\,; \quad a \neq 0$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\,\right| + C\,; \quad a \neq 0$

Вычисление простейших интегралов

Разберем несколько примеров, в которых для вычисления интеграла нужно преобразовать подынтегральную функцию к виду, имеющемуся в таблице интегралов.

Задача 1 *Найти интеграл*

$$\int \frac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x}}\, dx$$

Решение.

Разделим почленно числитель дроби, стоящей под интегралом, на знаменатель

$$\int \frac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x}}\, dx = \int \left(x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right) dx = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C =$$

$$= \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + 2x^{\frac{1}{2}} + C$$

Ответ.

$$\int \frac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x}}\, dx = \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + 2x^{\frac{1}{2}} + C$$

Задача 2 *Найти интеграл*

$$\int 2^{2x}\, e^x\, dx$$

Решение.

Преобразуем подынтегральную функцию к табличному виду

$$\int 2^{2x}\, e^x\, dx = \int 4^x\, e^x\, dx = \int (4e)^x\, dx = \frac{(4e)^x}{\ln(4e)} + C$$

Ответ.

$$\int 2^{2x}\, e^x\, dx = \frac{(4e)^x}{\ln(4e)} + C$$

Вычисление интегралов при помощи замены переменной

Теорема. *Пусть*

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C$$

на интервале I, *а функция* $g(t)$ *дифференцируема на интервале* J, *причем* $g(J) \in I$. *Тогда*

$$\int f\big(g(t)\big)\, g'(t)\, dt = F(g(t)) + C$$

Для вычисления интегралов сформулированную теорему обычно используют в виде

$$\int f(x)\, dx \underset{\substack{x = g(t) \\ dx = g'(t)\, dt}}{=} \int f\big(g(t)\big)\, g'(t)\, dt = F(g(t)) + C$$

и называют заменой переменной в неопределенном интеграле или интегрированием подстановкой.

Продемонстрируем применение метода замены переменной для вычисления нескольких неопределенных интегралов.

Задача 3 *Найти интеграл*

$$\int \frac{\operatorname{arctg}^2 x\, dx}{1 + x^2}$$

Решение.

Поскольку

$$\big(\operatorname{arctg} x\big)' = \frac{1}{1 + x^2}$$

то сделаем в интеграле замену переменной

$$t = \operatorname{arctg} x, \quad dt = \frac{dx}{1 + x^2}$$

В результате получаем

$$\int \frac{\operatorname{arctg}^2 x\, dx}{1 + x^2} \underset{\substack{t = \operatorname{arctg} x \\ dt = \frac{dx}{1+x^2}}}{=} \int t^2\, dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{3} + C$$

Ответ.

$$\int \frac{\operatorname{arctg}^2 x\, dx}{1+x^2} = \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{3} + C$$

Задача 4 (задание, §1 №13.7) *Найти интеграл*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$$

Решение.

Прежде всего отметим, что если в подынтегральную функцию переменная интегрирования x входит только в виде e^x, то для вычисления интеграла нужно сделать замену переменной

$$t = e^x, \quad dt = e^x dx = t dx$$

В результате этой замены переменной получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}} \underset{\substack{t = e^x \\ dt = t dx}}{=} \int \frac{dt}{t\sqrt{t-1}} \underset{\substack{u = \sqrt{t-1} \\ du = \frac{dt}{2\sqrt{t-1}}}}{=} 2\int \frac{du}{u^2+1} =$$

$$= 2\operatorname{arctg} u + C = 2\operatorname{arctg}\sqrt{t-1} + C = 2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1} + C$$

Ответ.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}} = 2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1} + C$$

Задача 5 *Найти интеграл*

$$\int \frac{\ln x\, dx}{x\sqrt{1 - 4\ln x - \ln^2 x}}$$

Решение.

Сделаем сначала замену переменной

$$t = \ln x, \quad dt = \frac{dx}{x}$$

В результате получим

$$\int \frac{\ln x \, dx}{x\sqrt{1 - 4\ln x - \ln^2 x}} \underset{\substack{t = \ln x \\ dt = \frac{dx}{x}}}{=} \int \frac{t\, dt}{\sqrt{1 - 4t - t^2}}$$

Для вычисления интегралов от дробей, у которых в знаменателе стоит квадратный корень из квадратного трехчлена, а в числителе – линейное выражение, применяется следующий прием.

- Найдем производную квадратного трехчлена, стоящего в знаменателе под корнем

$$\left(1 - 4t - t^2\right)' = -4 - 2t$$

- Преобразуем числитель, выделив в нем полученное при дифференцировании выражение

$$t = -\frac{1}{2}\left(-2t - 4\right) - 2$$

- Разобьем искомый интеграл на два интеграла

$$\int \frac{t\, dt}{\sqrt{1 - 4t - t^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{(-2t - 4)\, dt}{\sqrt{1 - 4t - t^2}} - 2\int \frac{dt}{\sqrt{1 - 4t - t^2}}$$

- Первый из этих интегралов можно вычислить, воспользовавшись заменой переменной

$$u = 1 - 4t - t^2, \quad du = (-2t - 4)dt$$

Действительно,

$$-\frac{1}{2}\int\frac{-2t-4\,dt}{\sqrt{1-4t-t^2}} \underset{\substack{u=1-4t-t^2\\ du=(-2t-4)dt}}{=} -\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{u}} =$$

$$= -\sqrt{u}+C = -\sqrt{1-4t-t^2}+C$$

- Для вычисления второго интеграла выделим в подынтегральном выражении из квадратного трехчлена под корнем полный квадрат

$$1-4t-t^2 = -(t^2+4t+4)+5 = 5-(t+2)^2$$

и сделаем замену переменной

$$u=t+2, \quad du=dt$$

В результате получим

$$-2\int\frac{dt}{\sqrt{1-4t-t^2}} \underset{\substack{u=t+2\\ du=dt}}{=} -2\int\frac{du}{\sqrt{5-u^2}} = -2\arcsin\frac{u}{\sqrt{5}}+C =$$

$$= -2\arcsin\frac{t+2}{\sqrt{5}}+C$$

- Складывая найденные интегралы, находим

$$\int\frac{t\,dt}{\sqrt{1-4t-t^2}} = -\sqrt{1-4t-t^2}-2\arcsin\frac{t+2}{\sqrt{5}}+C$$

Для завершения решения задачи необходимо возвратиться к исходной переменной x

$$\int\frac{\ln x\,dx}{x\sqrt{1-4\ln x-\ln^2 x}} = -\sqrt{1-4\ln x-\ln^2 x}-2\arcsin\frac{\ln x+2}{\sqrt{5}}+C$$

Ответ.

$$\int \frac{\ln x\, dx}{x\sqrt{1-4\ln x-\ln^2 x}} = -\sqrt{1-4\ln x-\ln^2 x} - 2\arcsin\frac{\ln x+2}{\sqrt{5}} + C$$

Вычисление интегралов при помощи интегрирования по частям

Теорема. *Пусть функции u и v дифференцируемы на интервале I и существует интеграл*

$$\int u(x)\, v'(x)\, dx$$

Тогда существует интеграл

$$\int u'(x)\, v(x)\, dx$$

и справедлива формула, называемая формулой интегрирования по частям

$$\int u(x)\, v'(x)\, dx = u(x)\, v(x) - \int u'(x)\, v(x)\, dx$$

Формулу интегрирования по частям удобно применять для вычисления таких интегралов, у которых в подынтегральном выражении функция $u(x) = x^n$, а функция $v(x)$ – одна из функций: $e^x,\ \sin x,\ \cos x,\ \operatorname{sh} x,\ \operatorname{ch} x,$ или же является производной известной функции.

Покажем это на примере.

Задача 6 *Найти интеграл*

$$\int x^2 e^{-x}\, dx$$

Решение.

Заметим, что

$$e^{-x} = \left(-e^{-x}\right)'$$

поэтому в качестве функций $u(x)$ и $v(x)$ выберем функции

$$u(x)=x^2, \quad v(x)=-e^{-x}$$

и применим формулу интегрирования по частям

$$\int x^2e^{-x}\,dx=\int x^2\big(-e^{-x}\big)'\,dx=-e^{-x}x^2+2\int x\,e^{-x}\,dx$$

Конечно же, интеграл, стоящий в правой части полученного равенства, является более простым по сравнению с исходным интегралом, поскольку в нем переменная x уже входит в первой степени, а не во второй, однако интегрирование ещё не закончено. Поэтому применим формулу интегрирования по частям второй раз, выбрав в качестве функций $u(x)$ и $v(x)$ функции

$$u(x)=x, \quad v(x)=-e^{-x}$$

Тогда

$$\int xe^{-x}\,dx=\int x\big(-e^{-x}\big)'\,dx=-e^{-x}x+\int e^{-x}\,dx=-e^{-x}x-e^{-x}+C$$

Таким образом,

$$\int x^2e^{-x}\,dx=-e^{-x}x^2-2e^{-x}x-2e^{-x}+2C$$

Ответ.

$$\int x^2e^{-x}\,dx=-e^{-x}\big(x^2+2x+2\big)+C$$

Формулу интегрирования по частям удобно применять для вычисления таких интегралов, у которых в подынтегральном выражении функция $u(x)$ резко упрощается в результате дифференцирования (обычно это логарифмы или обратные тригонометрические функции), а функция $v(x)$ является производной известной функции.

Покажем это на примере.

Задача 7 (задание, §1 №23.5) *Найти интеграл*

$$\int \arcsin^2 x \, dx$$

Решение.

Для вычисления этого интеграла выберем

$$u(x) = \arcsin^2 x, \quad v'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad v(x) = x$$

и применим формулу интегрирования по частям

$$\int \arcsin^2 x \, dx = \int 1 \cdot \arcsin^2 x \, dx = x \arcsin^2 x - \int x \, \frac{2 \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx =$$

$$= x \arcsin^2 x - 2 \int \arcsin x \, \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx$$

Интеграл, стоящий в правой части полученного равенства, является более простым по сравнению с исходным интегралом, так как в подынтегральную функцию $\arcsin x$ входит уже в первой степени, а не во второй, однако интегрирование ещё не закончено.

Поскольку

$$(\sqrt{1 - x^2})' = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

то интегрирование по частям можно применить второй раз, выбрав в качестве функций $u(x)$ и $v(x)$ функции

$$u(x) = \arcsin x, \quad v(x) = -\sqrt{1 - x^2}$$

Тогда

$$\int \arcsin x \, \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx = \int \arcsin x \, \left(-\sqrt{1 - x^2}\right)' dx =$$

$$= -\sqrt{1 - x^2} \arcsin x + \int \sqrt{1 - x^2} \, \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx =$$

$$= -\sqrt{1 - x^2} \arcsin x + \int dx = -\sqrt{1 - x^2} \arcsin x + x + C$$

Таким образом,

$$\int \arcsin^2 x\,dx = x\arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2}\,\arcsin x - 2x + 2C$$

Ответ.

$$\int \arcsin^2 x\,dx = x\arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2}\,\arcsin x - 2x + C$$

Разберем еще один типовой пример из задания.

Задача 8 (задание, §1 №24.3) *Найти интеграл*

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx\,, \quad a^2+b^2\neq 0.$$

Решение.

1 способ.

Обозначим заданный интеграл через I и применим формулу интегрирования по частям дважды

$$I=\int e^{ax}\sin bx\,dx=\int e^{ax}\left(-\frac{\cos bx}{b}\right)'dx=-\frac{1}{b}\,e^{ax}\cos bx+\frac{1}{b}\int a\,e^{ax}\cos bx\,dx=$$

$$=-\frac{1}{b}\,e^{ax}\cos bx+\frac{a}{b}\int e^{ax}\left(\frac{\sin bx}{b}\right)'dx=$$

$$=-\frac{1}{b}\,e^{ax}\cos bx+\frac{a}{b^2}\,e^{ax}\sin bx-\frac{a}{b^2}\int ae^{ax}\sin bx\,dx=$$

$$=\frac{e^{ax}(-b\cos bx+a\sin bx)}{b^2}-\frac{a^2}{b^2}\,I$$

Решая относительно I уравнение

$$I=\frac{e^{ax}(-b\cos bx+a\sin bx)}{b^2}-\frac{a^2}{b^2}\,I$$

получаем

$$I\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)=\frac{e^{ax}(-b\cos bx+a\sin bx)}{b^2}+C$$

Следовательно,

$$I = \frac{e^{ax}(-b\cos bx + a\sin bx)}{a^2+b^2} + C$$

2 способ.

Представим заданный интеграл как мнимую часть интеграла от комплекснозначной функции

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \operatorname{Im}\int e^{ax}\,e^{ibx}\,dx = \operatorname{Im}\int e^{(a+ib)x}\,dx = \operatorname{Im}\left(\frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib} + D + iC\right) =$$

$$= \operatorname{Im}\left(\frac{e^{ax}(\cos bx + i\sin bx)(a-ib)}{a^2+b^2}\right) + C = \frac{e^{ax}(-b\cos bx + a\sin bx)}{a^2+b^2} + C$$

Ответ.

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}(-b\cos bx + a\sin bx)}{a^2+b^2} + C$$

Задачи на вычисление неопределенных интегралов из экзаменационных контрольных работ

В письменных экзаменационных контрольных работах одна из задач на вычисление неопределенных интегралов является комбинированной и предполагает применение как метода интегрирования по частям, так и метода замены переменной.

Продемонстрируем это на примерах.

Задача 9 (экзаменационная контрольная работа 2020-2021 уч. года)
Найти интеграл

$$\int \sqrt{x}\,\ln(1+x)\,dx$$

Решение.

Для вычисления интеграла воспользуемся сначала формулой интегрирования по частям, выбрав

$$u(x) = \ln(x+1), \quad v'(x) = \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad v(x) = \frac{2}{3}\, x\sqrt{x}$$

В результате получим

$$\int \sqrt{x}\, \ln(1+x)\, dx = \frac{2}{3}\, x\sqrt{x}\, \ln(1+x) - \frac{2}{3} \int \frac{x\sqrt{x}}{1+x}\, dx$$

Теперь для вычисления интеграла, стоящего в правой части полученного равенства, сделаем в нем замену переменной

$$t = \sqrt{x}, \quad dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx \quad \Rightarrow \quad dx = 2tdt$$

Тогда

$$\int \frac{x\sqrt{x}}{1+x}\, dx \underset{\substack{t=\sqrt{x} \\ dx = 2tdt}}{=} \int \frac{t^3}{1+t^2}\, 2tdt = 2 \int \frac{t^4}{1+t^2}\, dt$$

Выделяя целую часть дроби, стоящей под знаком интеграла, получаем

$$2 \int \frac{t^4}{1+t^2}\, dt = 2 \int \left(t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2} \right) dt = \frac{2t^3}{3} - 2t + 2 \operatorname{arctg} t + C$$

Теперь необходимо возвратиться к исходной переменной x

$$\int \frac{x\sqrt{x}}{1+x}\, dx = \frac{2x\sqrt{x}}{3} - 2\sqrt{x} + 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C$$

Таким образом,

$$\int \sqrt{x}\, \ln(1+x)\, dx = \frac{2}{3}\, x\sqrt{x}\, \ln(1+x) - \frac{4x\sqrt{x}}{9} + \frac{4\sqrt{x}}{3} - \frac{4}{3} \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C$$

Ответ.

$$\int \sqrt{x}\, \ln(1+x)\, dx = \frac{2}{3}\, x\sqrt{x}\, \ln(1+x) - \frac{4x\sqrt{x}}{9} + \frac{4\sqrt{x}}{3} - \frac{4}{3} \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C$$

Задача 10 (экзаменационная контрольная работа 2016-2017 уч. года)
Найти интеграл

$$\int \frac{e^x \cos^2 \sqrt[3]{1+e^x}}{\sqrt[3]{1+e^x}}\, dx$$

Решение.

Для вычисления интеграла сделаем сначала замену переменной

$$t = e^x, \quad dt = e^x dx = t dx$$

В результате получим

$$\int \frac{e^x \cos^2 \sqrt[3]{1+e^x}}{\sqrt[3]{1+e^x}}\, dx \underset{\substack{t=e^x \\ dt=e^x dx}}{=} \int \frac{\cos^2 \sqrt[3]{1+t}}{\sqrt[3]{1+t}}\, dt$$

Теперь сделаем еще одну замену переменной

$$y = \sqrt[3]{1+t} \quad \Rightarrow \quad t = y^3 - 1, \quad dt = 3y^2 dy$$

Тогда

$$\int \frac{\cos^2 \sqrt[3]{1+t}}{\sqrt[3]{1+t}}\, dt \underset{\substack{y=\sqrt[3]{1+t} \\ dt=3y^2 dy}}{=} \int \frac{\cos^2 y}{y}\, 3y^2 dy = 3\int y \cos^2 y\, dy$$

Воспользовавшись формулой понижения степени тригонометрических функций, получаем

$$3\int y\cos^2 y\, dy = \frac{3}{2}\int y\,(1+\cos 2y)\, dy = \frac{3}{2}\int y\, dy + \frac{3}{2}\int y\,\cos 2y\, dy =$$

$$= \frac{3y^2}{4} + \frac{3}{2}\int y\,\cos 2y\, dy$$

Для вычисления интеграла

$$\int y\, \cos 2y\, dy$$

применим интегрирование по частям, выбрав

$$u(y) = y, \quad v'(y) = \cos 2y \quad \Rightarrow \quad v(y) = \frac{1}{2}\,\sin 2y$$

Тогда

$$\int y\, \cos 2y\, dy = \frac{y}{2}\,\sin 2y - \frac{1}{2}\int \sin 2y\, dy = \frac{y}{2}\,\sin 2y + \frac{1}{4}\cos 2y + C$$

Возвращаясь к исходной переменной t, получаем

$$\int \frac{\cos^2 \sqrt[3]{1+t}}{\sqrt[3]{1+t}}\, dt = \frac{3y^2}{4} + \frac{3y}{4}\,\sin 2y + \frac{3}{8}\cos 2y + C =$$

$$= \frac{3\sqrt[3]{(1+t)^2}}{4} + \frac{3\sqrt[3]{1+t}}{4}\,\sin\bigl(2\sqrt[3]{1+t}\bigr) + \frac{3}{8}\cos\bigl(2\sqrt[3]{1+t}\bigr) + C$$

Таким образом,

$$\int \frac{e^x \cos^2 \sqrt[3]{1+e^x}}{\sqrt[3]{1+e^x}}\, dx =$$

$$= \frac{3\sqrt[3]{(1+e^x)^2}}{4} + \frac{3\sqrt[3]{1+e^x}}{4}\,\sin\bigl(2\sqrt[3]{1+e^x}\bigr) + \frac{3}{8}\cos\bigl(2\sqrt[3]{1+e^x}\bigr) + C$$

Ответ.

$$\int \frac{e^x \cos^2 \sqrt[3]{1+e^x}}{\sqrt[3]{1+e^x}}\, dx =$$

$$= \frac{3\sqrt[3]{(1+e^x)^2}}{4} + \frac{3\sqrt[3]{1+e^x}}{4}\,\sin\bigl(2\sqrt[3]{1+e^x}\bigr) + \frac{3}{8}\cos\bigl(2\sqrt[3]{1+e^x}\bigr) + C$$

Спасибо за внимание.
Не болейте!