Равномерная непрерывность функций

Самарова С.С.

Учебное пособие для дистанционных занятий по дисциплине «Введение в математический анализ»

1 курс

Пособие посвящено исследованию функций на равномерную непрерывность. Изучаются признаки равномерной непрерывности функций на различных множествах, приводятся решения ряда типовых примеров и задач.

Определение равномерной непрерывности функции

Рассмотрим функцию $f(x)$, непрерывную на множестве X. Это означает, что для каждого $x_1 \in X$ существует предел

$$\lim_{x \to x_1} f(x) = f(x_1)$$

На языке кванторов условие непрерывности функции на множестве формулируется так:

$$\forall x_1 \in X, \ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta(\varepsilon, x_1) > 0 \ : \ \forall x_2 \in X, \ |x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon, x_1)$$

$$\Rightarrow \ |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Заметим, что число $\delta(\varepsilon, x_1)$ зависит от выбора точки $x_1 \in X$.

Для некоторых функций удается выбрать одно и то же число $\delta(\varepsilon)$ сразу для всех точек множества. Такие функции являются равномерно непрерывными на множестве X .

Определение 1 *Функцию* $f(x)$ *называют равномерно непрерывной на множестве* X, *если*

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta(\varepsilon) > 0\,:\,\forall x_1 \in X\ \forall x_2 \in X\ |x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon)\ \Rightarrow\ |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Задача 1 *Исследовать функцию*

$$f(x) = \sin\sqrt{x}$$

на равномерную непрерывность на множестве $[1, +\infty)$.

Решение. Выберем две произвольных точки $x_1 \in [1, +\infty)$, и $x_2 \in [1, +\infty)$ и оценим модуль разности

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |\sin\sqrt{x}_1 - \sin\sqrt{x}_2| = \left|2\ \sin\frac{\sqrt{x}_1 - \sqrt{x}_2}{2}\ \cos\frac{\sqrt{x}_1 + \sqrt{x}_2}{2}\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\,\frac{|\sqrt{x}_1 - \sqrt{x}_2|}{2} \leqslant |\sqrt{x}_1 - \sqrt{x}_2|\,(\sqrt{x}_1 + \sqrt{x}_2) = |x_1 - x_2|$$

Таким образом,

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta = \varepsilon > 0\,:\,\forall x_1 \in [1, +\infty),\ \forall x_2 \in [1, +\infty),\ |x_1 - x_2| < \delta$$

$$\Rightarrow\ |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Ответ. Функция является равномерно непрерывной.

В том случае, когда нужно доказать, что функция $f(x)$, не является равномерно непрерывной на множестве X , используют отрицание определения равномерной непрерывности:

$$\exists\,\varepsilon > 0\,:\,\forall\,\delta > 0\ \exists\,x_1 \in X\ \exists\,x_2 \in X\,:\,|x_1 - x_2| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x_1) - f(x_2)| \geqslant \varepsilon$$

Задача 2 (задание, §12, № 2(1)) *Доказать, что функция*

$$f(x) = \cos\frac{1}{x}$$

не является равномерно непрерывной на интервале $(0, 1)$.

Доказательство. Рассмотрим точки, в которых $f(x) = 1$:

$$\cos\frac{1}{x} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{1}{2\pi n} \quad n = 1, 2, \ldots$$

и точки, в которых $f(x) = -1$:

$$\cos\frac{1}{x} = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{1}{\pi + 2\pi n} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Если выбирать точки x_1 и x_2 вида

$$x_1 = \frac{1}{2\pi n}\,; \quad x_2 = \frac{1}{\pi + 2\pi n}\,;$$

с одним и тем же n, то модуль разности значений функции в этих точках

$$|f(x_1) - f(x_2)| = 2,$$

в то время, как расстояние между этими точками

$$|x_1 - x_2| = \left|\frac{1}{2\pi n} - \frac{1}{\pi + 2\pi n}\right| = \frac{\pi}{2\pi n\,(\pi + 2\pi n)} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

Следовательно,

$$\forall\,\delta > 0\ \exists\,N_0\ :\ \forall\,n > N_0\ \Rightarrow\ \frac{\pi}{2\pi n\,(\pi + 2\pi n)} < \delta$$

Тогда

$$\exists\,\varepsilon = 2 > 0\ :\ \forall\,\delta > 0 \quad \exists\,x_1 = \frac{1}{2\pi(N_0 + 1)} \in (0, 1) \quad \exists\,x_2 = \frac{1}{\pi + 2\pi(N_0 + 1)} \in (0, 1) :$$

$$|x_1 - x_2| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x_1) - f(x_2)| \geqslant \varepsilon$$

Доказано.

Признаки равномерной непрерывности и свойства равномерно непрерывных функций

1. Функции, определенные на отрезке

На лекциях будет доказана следующая важная теорема, которую мы будем использовать постоянно.

Теорема Кантора. Функция, непрерывная на отрезке, является равномерно непрерывной на этом отрезке.

Из этой теоремы следует, что свойства непрерывности и равномерной непрерывности для функций, определенных на отрезке, эквивалентны.

Задача 3 (задание, §12, № 17) *Функция $f(x)$ равномерно непрерывна на отрезках $[a,b]$ и $[b,c]$. Доказать, что она равномерно непрерывна на отрезке $[a,c]$.*

Доказательство.

Поскольку функция $f(x)$ равномерно непрерывна на отрезках $[a,b]$ и $[b,c]$, то она является непрерывной на отрезках $[a,b]$ и $[b,c]$, а, значит, $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,c]$.

Тогда по теореме Кантора $f(x)$ равномерно непрерывна на отрезке $[a,c]$.

Доказано.

2. Функции, определенные на ограниченном множестве

Задача 4 (задание, §12, №9)

1. *Доказать, что если функция $f(x)$ равномерно непрерывна на ограниченном множестве, то она ограничена на этом множестве.*
2. *Привести пример функции, равномерно непрерывной на множестве и неограниченной на этом множестве.*

Решение.

1. Пусть $f(x)$ равномерно непрерывна на ограниченном множестве X. По определению равномерной непрерывности

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta(\varepsilon) > 0 \,:\, \forall x_1 \in X \ \forall x_2 \in X \ |x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \ |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Поскольку в этом определении число ε можно выбрать любым, то положим $\varepsilon = 1$ и найдем для него $\delta(1)$. Тогда

$$\forall x_1 \in X \ \forall x_2 \in X : \ |x_1 - x_2| < \delta(1) \ \Rightarrow \ |f(x_1) - f(x_2)| < 1 \qquad (1)$$

В силу ограниченности множества X существует такой отрезок $[A,B]$, что $X \subset [A,B]$. Разделим отрезок $[A,B]$ на отрезки длины $\delta(1)$:

$$[A, A+\delta(1)], \ [A+\delta(1), A+2\delta(1)], \ldots, [A+N\delta(1), B],$$

где число N определяется формулой

$$N = \left[\frac{B - A}{\delta(1)}\right]$$

и рассмотрим пересечение каждого из этих отрезков с множеством X. Если пересечение не пусто, то обозначим это пересечение X_k и выберем в нем какую нибудь точку $\xi_k \in X_k$. Точек ξ_k будет конечное число (не больше N).

Обозначим через M максимум

$$M = \max_k |f(\xi_k)|$$

Покажем, что для любого $x \in X$ выполнено неравенство

$$|f(x)| \leqslant M + 1$$

Действительно, рассмотрим любое число $x \in X$. Это число принадлежит какому-нибудь множеству X_k. В том случае, если таких множеств оказалось 2, возьмем любое из них. Тогда по построению

$$|x - \xi_k| < \delta(1)$$

а, значит, с помощью неравенства (1) получаем

$$|f(x)| = |f(x) - f(\xi_k) + f(\xi_k)| \leqslant |f(x) - f(\xi_k)| + |f(\xi_k)| \leqslant 1 + M$$

Ограниченность функции $f(x)$ доказана.

2. Подходящим примером неограниченной, но равномерно непрерывной функции, служит функция $f(x) = x$ на полуинтервале $[1, +\infty)$.

   Действительно, эта неограниченная функция является равномерно непрерывной на $[1, +\infty)$, поскольку

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \, \delta = \varepsilon > 0 \, : \, \forall x_1 \in [1, +\infty) \; \forall x_2 \in [1, +\infty) \; |x_1 - x_2| < \delta$$

$$\Rightarrow \; |f(x_1) - f(x_2)| = |x_1 - x_2| < \varepsilon$$

   Доказано.

Задача 5 (задание, §12, №7) *Доказать, что если функция не ограничена на ограниченном интервале, то она не является равномерно непрерывной на этом интервале.*

Решение. Докажем это утверждение методом «от противного».

Предположим, что функция, неограниченная на ограниченном интервале, является равномерно непрерывной на нем. Тогда из утверждения, доказанного в пункте 1 задачи 4, следует, что эта функция должна быть ограниченной.

Полученное противоречие доказывает требуемое утверждение.

Задача 6 (задание, §12, №25) *Доказать, что для равномерной непрерывности функции f на ограниченном интервале (a, b) необходимо и достаточно, чтобы функция была непрерывна на (a, b) и чтобы существовали пределы*

$$\lim_{x\to a+0} f(x) \qquad \textit{и} \qquad \lim_{x\to b-0} f(x)$$

Решение.

1. Необходимость.

Пусть функция $f(x)$ равномерно непрерывна на ограниченном интервале (a, b).

Тогда для любого $x \in (a, b)$ существует окрестность $U_{\delta_0}(x) \subset (a, b)$. Из определения равномерной непрерывности следует, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta(\varepsilon) \in (0, \delta_0) \,:\, \forall x_1 \in U_{\delta(\varepsilon)}(x) \;\Rightarrow\; |f(x_1) - f(x)| < \varepsilon$$

Таким образом, функция $f(x)$ непрерывна в любой точке $x \in (a, b)$.

Докажем, что существует предел

$$\lim_{x\to a+0} f(x)$$

По определению равномерной непрерывности

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \,:\, \forall x_1 \in (a, b)\ \forall x_2 \in (a, b)\ |x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon) \;\Rightarrow\; |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta_1 = \min\{\delta(\varepsilon), b\} > 0 \,:\, \forall x_1 \in (a, a + \delta_1)\ \forall x_2 \in (a, a + \delta_1)$$

$$\Rightarrow \ |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

В силу критерия Коши существования одностороннего предела функции это означает, что существует конечный предел

$$\lim_{x \to a+0} f(x)$$

Доказательство существования предела

$$\lim_{x \to b-0} f(x)$$

практически дословно совпадает с приведенным выше.

2. Достаточность.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на ограниченном интервале (a, b) и существуют конечные односторонние пределы

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = A \qquad \text{и} \qquad \lim_{x \to b-0} f(x) = B$$

Доопределив функцию $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ по непрерывности, получаем функцию

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (a, b); \\ A, & x = a; \\ B, & x = b \end{cases}$$

Поскольку функция $F(x)$ является непрерывной на отрезке $[a, b]$, то по теореме Кантора она равномерно непрерывна на отрезке $[a, b]$, и, уж тем более, равномерно непрерывна на интервале (a, b).

Доказательство завершено.

Задача 7 (задание, §12, № 4(3)) *Исследовать на равномерную непрерывность функцию*

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

на интервале $(0, \pi)$.

Решение.

Поскольку $f(x)$ непрерывна на интервале $(0, \pi)$ и существуют односторонние пределы

$$\lim_{x \to +0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \text{и} \qquad \lim_{x \to \pi-0} \frac{\sin x}{x} = 0\,,$$

то по доказанному в задаче 6 признаку эта функция равномерно непрерывна на интервале $(0, \pi)$.

3. Функции, определенные на полуинтервале $[a, +\infty)$

Задача 8 (задание, Т1) *Пусть функция f дифференцируема на множестве $I = [a, +\infty)$. Доказать следующие утверждения:*

а) *если f' ограничена на множестве I, то f равномерно непрерывна на этом множестве;*

б) *если f' бесконечно большая при $x \to +\infty$, то f не является равномерно непрерывной на множестве I.*

Решение.

а) Рассмотрим произвольные числа $x_1 \in [a, +\infty)$ и $x_2 \in [a, +\infty)$. По теореме Лагранжа о среднем существует такая точка $\xi \in (x_1, x_2)$, для которой справедливо равенство

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi)\,(x_1 - x_2)$$

Поскольку по условию задачи f' ограничена на множестве $[a, +\infty)$, то существует такое число $M > 0$, что для любого $\xi \in [a, +\infty)$ выполнено неравенство

$$|f'(\xi)| \leqslant M$$

Поэтому

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant M\,|x_1 - x_2|$$

Следовательно,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \frac{\varepsilon}{M} > 0 \,:\, \forall x_1 \in [a, +\infty) \;\forall x_2 \in [a, +\infty) \;|x_1 - x_2| < \delta$$

$$\Rightarrow \;|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant M\,|x_1 - x_2| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

Таким образом, f равномерно непрерывна на $[a, +\infty)$.

б) Если f' является бесконечно большой при $x \to +\infty$, то

$$\forall \delta > 0 \quad \exists\, A(\delta) > 0 \,:\, \forall x \in (A(\delta), +\infty) \;\Rightarrow\; |f'(x)| > \frac{1}{\delta}$$

Снова воспользовавшись теоремой Лагранжа о среднем, получим

$$\exists\, \varepsilon = \frac{1}{2} \,:\, \forall\, \delta > 0 \;\exists\, x_1 = A(\delta) \;\exists\, x_2 = x_1 + \frac{\delta}{2} \,: \quad |x_1 - x_2| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

$$\Rightarrow\; |f(x_1) - f(x_2)| = |f'(\xi)|\, |x_1 - x_2| > \frac{1}{\delta} \cdot \frac{\delta}{2} = \frac{1}{2} = \varepsilon$$

Таким образом, f не является равномерно непрерывной на $[a, +\infty)$.

Задача 9 (задание, §12, № 3(4)) *Исследовать на равномерную непрерывность функцию*

$$f(x) = e^x$$

на $(-\infty, +\infty)$.

Решение. Рассмотрим $f(x)$ на полуинтервале $[0, +\infty)$.

Поскольку производная

$$f'(x) = e^x$$

является бесконечно большой при $x \to +\infty$, то функция $f(x) = e^x$ не является равномерно непрерывной на $[0, +\infty)$ и тем более не является равномерно непрерывной на $(-\infty, +\infty)$.

Задача 10 (задание, §12, № 3(9)) *Исследовать на равномерную непрерывность функцию*

$$f(x) = x \sin\frac{1}{x}$$

на $(0, +\infty)$.

Решение. Представим интервал $(0, +\infty)$ в виде объединения множеств

$$(0, +\infty) = (0, 1] \cup [1, +\infty)$$

На полуинтервале $(0, 1]$ функция $f(x)$ непрерывна и имеет конечный односторонний предел

$$\lim_{x \to +0} x \sin\frac{1}{x} = 0$$

По признаку, доказанному в задаче 6, функция $f(x)$ является равномерно непрерывной на полуинтервале $(0, 1]$, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta_1(\varepsilon) > 0 \,:\, \forall x_1 \in (0, 1] \;\forall x_2 \in (0, 1] \;|x_1 - x_2| < \delta_1(\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \ |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2}$$

На полуинтервале $[1, +\infty)$ функция $f(x)$ дифференцируема и ее производная

$$f'(x) = \sin\frac{1}{x} + x \cdot \cos\frac{1}{x} \cdot \frac{(-1)}{x^2} = \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}$$

ограничена. Действительно,

$$|f'(x)| = \left|\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}\right| \leqslant \left|\sin\frac{1}{x}\right| + \left|\cos\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}\right| \leqslant 1 + \frac{1}{x} \leqslant 2$$

По признаку, доказанному в пункте 1 задачи 8, функция $f(x)$ является равномерно непрерывной на полуинтервале $[1, +\infty)$, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta_2(\varepsilon) > 0 \;:\; \forall x_1 \in [1, +\infty) \;\forall x_2 \in [1, +\infty) \;|x_1 - x_2| < \delta_2(\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \ |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3}$$

Рассмотрим теперь два произвольных числа x_1 и x_2 из интервала $(0, +\infty)$ такие, что $x_2 > x_1$. Возможны три варианта их расположения

1. $x_1 \in (0, 1]$; $x_2 \in (0, 1]$.

   В этом случае из утверждения (2) получаем

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta_1(\varepsilon) > 0 \;:\; \forall x_1 \in (0, 1] \;\forall x_2 \in (0, 1] \;|x_1 - x_2| < \delta_1(\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \ |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

2. $x_1 \in [1, +\infty)$; $x_2 \in [1, +\infty)$.

   В этом случае из утверждения (3) получаем

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta_2(\varepsilon) > 0 \;:\; \forall x_1 \in [1, +\infty) \;\forall x_2 \in [1, +\infty) \;|x_1 - x_2| < \delta_2(\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \ |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

3. $x_1 \in (0,1]$; $x_2 \in [1,+\infty)$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta_3(\varepsilon) = \min\{\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)\} > 0 \ :$$

$$\forall x_1 \in (0,1] \ \forall x_2 \in [1,+\infty) \ |x_1 - x_2| < \delta_3(\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \ |f(x_1) - f(x_2)| = |f(x_1) - f(1) + f(1) - f(x_2)| \leqslant$$

$$\leqslant |f(x_1) - f(1)| + |f(1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Объединяя вместе все три случая, получаем, что $f(x)$ является равномерно непрерывной на интервале $(0,+\infty)$.

Следующую задачу из экзаменационной контрольной работы 2020-2021 учебного года, которая решается полностью аналогично задаче 10, предлагаю Вам решить самостоятельно.

Задача 11 *Исследуйте на множестве* $[0,+\infty)$ *функцию*

$$y(x) = \ln(1 + 4\sqrt{x})$$

на равномерную непрерывность.

Задача 12 (задание, §12, № 20)

а) *Доказать, что если функции* f *и* g *ограничены и равномерно непрерывны на множестве* $[a,+\infty)$, *то их произведение* fg *– равномерно непрерывная функция на* $[a,+\infty)$.

б) *Привести пример равномерно непрерывных на* $[a,+\infty)$ *функций, произведение которых не является равномерно непрерывной на* $[a,+\infty)$ *функцией.*

в) *Доказать, что если функции* f *и* g *равномерно непрерывны на ограниченном множестве, то их произведение* fg *– равномерно непрерывная функция на этом множестве.*

Решение.

а) Функции f и g ограничены на множестве $[a,+\infty)$, следовательно, существуют такие константы $M_1>0$ и $M_2>0$, что для всех $x\in[a,+\infty)$ выполнены неравенства

$$|f(x)|\leqslant M_1 \qquad \text{и} \qquad |g(x)|\leqslant M_2$$

Обозначим через M максимум

$$M=\max\{M_1,M_2\}$$

Поскольку функции f и g равномерно непрерывны на множестве $[a,+\infty)$, то

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\,\delta_1(\varepsilon)>0\,:\,\forall x_1\in[a,+\infty)\ \forall x_2\in[a,+\infty)\ |x_1-x_2|<\delta_1(\varepsilon)$$
$$\Rightarrow\ |f(x_1)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{2M}$$

и

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\,\delta_2(\varepsilon)>0\,:\,\forall x_1\in[a,+\infty)\ \forall x_2\in[a,+\infty)\ |x_1-x_2|<\delta_2(\varepsilon)$$
$$\Rightarrow\ |g(x_1)-g(x_2)|<\frac{\varepsilon}{2M}$$

Обозначим через $\delta(\varepsilon)$ минимум

$$\delta(\varepsilon)=\min\{\delta_1(\varepsilon),\delta_2(\varepsilon)\}$$

Тогда

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\,\delta(\varepsilon)>0\,:\,\forall x_1\in[a,+\infty)\ \forall x_2\in[a,+\infty)\ |x_1-x_2|<\delta(\varepsilon)$$
$$\Rightarrow\ |f(x_1)g(x_1)-f(x_2)g(x_2)|=$$
$$=|f(x_1)g(x_1)-f(x_2)g(x_1)+f(x_2)g(x_1)-f(x_2)g(x_2)|\leqslant$$
$$\leqslant|f(x_1)g(x_1)-f(x_2)g(x_1)|+|f(x_2)g(x_1)-f(x_2)g(x_2)|=$$
$$=|g(x_1)||f(x_1)-f(x_2)|+|f(x_2)||g(x_1)-g(x_2)|<$$
$$<M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}+M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

Равномерная непрерывность произведения fg доказана.

б) В качестве требуемого примера рассмотрим функции $f(x) = g(x) = x$ на $[1, +\infty)$.

Как мы уже выяснили в пункте 2 задачи 4, функция $f(x) = x$ является равномерно непрерывной на $[1, +\infty)$.

Произведение функций $f(x) \cdot g(x) = x^2$ имеет бесконечно большую производную

$$(f(x) \cdot g(x))' = 2x \ \to \ +\infty \quad (x \to +\infty)$$

По доказанному в пункте 2 задачи 8 признаку произведение $f(x) \cdot g(x)$ не является равномерно непрерывной на $[1, +\infty)$ функцией.

в) Пусть функции f и g равномерно непрерывны на ограниченном множестве, тогда по доказанному в пункте 1 задачи 4 свойству, эти функции ограничены на этом множестве.

Дословно повторяя для ограниченного множества доказательство, приведенное в пункте а) данной задачи для полуинтервала $[a, +\infty)$, получим требуемое утверждение.

Задача 13 (задание, §12, № 23) *Функция* $f(x)$ *непрерывна на* $[a, +\infty)$ *и существует конечный предел*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)$$

Доказать, что $f(x)$ *равномерно непрерывна на* $[a, +\infty)$.

Решение. По критерию Коши существования предела функции

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A(\varepsilon) > 0 \ : \ \forall x_1 \in [A(\varepsilon), +\infty) \quad \forall x_2 \in [A(\varepsilon), +\infty) \\ \Rightarrow \ |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4}$$

На отрезке $[a, A(\varepsilon)]$ функция $f(x)$ непрерывна, а, значит, по тереме Кантора равномерно непрерывна. Следовательно, для этого же ε

$$\exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \ : \ \forall x_1 \in [a, A(\varepsilon)] \quad \forall x_2 \in [a, A(\varepsilon)] \quad |x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon) \\ \Rightarrow \ |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{5}$$

Рассмотрим теперь два произвольных числа x_1 и x_2 из полуинтервала $[a, +\infty)$ такие, что $x_2 > x_1$. Возможны три варианта их расположения

1. $x_1 \in [a, A(\varepsilon)]$; $x_2 \in [a, A(\varepsilon)]$.

   В этом случае из утверждения (5) получаем

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 : \quad \forall x_1 \in [a, A(\varepsilon)] \quad \forall x_2 \in [a, A(\varepsilon)] \quad |x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon)$$
$$\Rightarrow\ |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

2. $x_1 \in [A(\varepsilon), +\infty)$; $x_2 \in [A(\varepsilon), +\infty)$.

   В этом случае из утверждения (4) получаем

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 : \ \forall x_1 \in [A(\varepsilon), +\infty) \ \forall x_2 \in [A(\varepsilon), +\infty) \ |x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon)$$
$$\Rightarrow\ |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

3. $x_1 \in [a, A(\varepsilon)]$; $x_2 \in [A(\varepsilon), +\infty)$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 : \ \forall x_1 \in [a, A(\varepsilon)] \quad \forall x_2 \in [A(\varepsilon), +\infty) \ |x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon)$$
$$\Rightarrow\ \Big|f(x_1) - f(x_2)\Big| = \Big|f(x_1) - f\big(A(\varepsilon)\big) + f\big(A(\varepsilon)\big) - f(x_2)\Big| \leqslant$$
$$\leqslant \Big|f(x_1) - f\big(A(\varepsilon)\big)\Big| + \Big|f\big(A(\varepsilon)\big) - f(x_2)\Big| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Объединяя вместе все три случая, получаем, что $f(x)$ является равномерно непрерывной на интервале $[a, +\infty)$.

Спасибо за внимание.
Не болейте!