Правило Лопиталя

Самарова С.С.

Учебное пособие для дистанционных занятий по дисциплине «Введение в математический анализ»

1 курс

В пособии рассматривается метод вычисления пределов функций вида

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\ ,$$

называемый «Правило Лопиталя».

Теорема (Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей типа $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$).
Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$

- дифференцируемы в проколотой окрестности точки a, причем $g'(x)\neq 0$ в этой окрестности;
- функции $f(x)$ и $g(x)$ являются одновременно либо бесконечно малыми, либо бесконечно большими при $x\to a$;
- существует конечный предел

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Тогда существует

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Замечание. Правило Лопиталя можно использовать как при вычислении пределов при $x\to a$, так и при вычислении пределов при $x\to\infty$, $x\to+\infty$, $x\to-\infty$, $x\to a+0$, $x\to a-0$.

Чаще всего правило Лопиталя применяется для вычисления пределов, которые невозможно найти с помощью разложения функций по формуле Тейлора в окрестности точки a.

Наиболее показательными из таких пределов являются следующие.

Задача 1 *Найти предел*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}$$

Решение. По правилу Лопиталя

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$$

Ответ. 0

Задача 2 *Найти предел*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x}{x}$$

Решение. В данном примере правило Лопиталя нужно применить дважды

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln^2 x)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2\ln x)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$$

Ответ. 0

Задача 3 *Найти предел*

$$\lim_{x\to+0}\sqrt{x}\,\ln x$$

Решение.

$$\lim_{x\to+0}\sqrt{x}\,\ln x=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2x\sqrt{x}}}=-\lim_{x\to+0}2\sqrt{x}=0$$

Ответ. 0

Задача 4 (задание, §17, №47) *Найти предел*

$$\lim_{x\to+0} \sin x \ \ln\operatorname{ctg} x$$

Решение.

$$\lim_{x\to+0} \sin x \ \ln\operatorname{ctg} x = \lim_{x\to+0} \frac{\ln\operatorname{ctg} x}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x\to+0} \frac{(\ln\operatorname{ctg} x)'}{\left(\frac{1}{\sin x}\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to+0} \frac{\frac{1}{\operatorname{ctg} x}\cdot\frac{(-1)}{\sin^2 x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to+0} \frac{\sin x}{\cos^2 x} = 0$$

Ответ. 0

Задача 5 (задание, §17, №76) *Показать, что следующие пределы не могут быть вычислены по правилу Лопиталя и найти эти пределы*

1. $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{x+\cos x}{x-\cos x}$

2. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{x^3\sin\frac{1}{x}}{\sin^2 x}$

Решение.

1. Обозначим

$$f(x) = x + \cos x; \qquad g(x) = x - \cos x$$

Тогда

$$f'(x) = 1 - \sin x; \qquad g'(x) = 1 + \sin x$$

Производная $g'(x)$ обращается в нуль при

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n\,, \quad n = 0 \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Следовательно, в любой окрестности бесконечности есть нули стоящей в знаменателе дроби функции $g'(x)$, поэтому правило Лопиталя применять нельзя.

Вычислим этот предел по-другому:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\cos x}{x-\cos x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x}\ \cos x}{1-\frac{1}{x}\ \cos x} = 1$$

2. Обозначим

$$f(x) = x^3 \sin\frac{1}{x}\,; \qquad g(x) = \sin^2 x$$

Тогда

$$f'(x) = 3x^2 \sin\frac{1}{x} + x^3 \cos\frac{1}{x}\,\frac{(-1)}{x^2} = 3x^2 \sin\frac{1}{x} - x\cos\frac{1}{x};$$

$$g'(x) = 2\sin x \cos x = \sin 2x$$

Покажем, что не существует предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{3x^2\sin\frac{1}{x} - x\cos\frac{1}{x}}{\sin 2x} \tag{1}$$

Предполагая, что предел (1) существует, рассмотрим последовательность

$$x_n = \frac{1}{2\pi n} \to 0 \quad (n\to\infty)$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f'(x_n)}{g'(x_n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{1}{2\pi n}}{\sin\frac{1}{\pi n}} = -\frac{1}{2}$$

С другой стороны, если рассмотреть последовательность

$$\tilde{x}_n = \frac{1}{\pi + 2\pi n} \to 0 \quad (n\to\infty)$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f'(\tilde{x}_n)}{g'(\tilde{x}_n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\pi+2\pi n}}{\sin\frac{2}{\pi+2\pi n}} = \frac{1}{2}$$

В силу определения предела функции по Гейне отсюда следует, что предел (1) не существует.

Таким образом, правило Лопиталя применять нельзя.

Вычислим этот предел по-другому:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3\sin\frac{1}{x}}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 x}\cdot\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$$

Ответ. 1. 1; 2. 0.

Спасибо за внимание.
Не болейте!