Элементы дифференциальной геометрии

Самарова С.С.

Учебное пособие для дистанционных занятий по дисциплине «Введение в математический анализ»

1 курс

Пособие посвящено изучению плоских и пространственных кривых. Вводятся понятия касательной к кривой, нормали и бинормали. Рассматриваются методы решения типовых примеров и задач на вычисление кривизны кривых, построение спрямляющей, нормальной и соприкасающейся плоскостей к кривым.

Напомним нужные теоретические сведения.

Кривая в пространстве и на плоскости

«Пространственной кривой» $\gamma(t)$ «с параметризацией» t будем считать множество точек в пространстве

$$\gamma(t) = \left\{ \big(x(t);\, y(t);\, z(t)\big), \quad t \in [a,b] \right\},$$

координаты $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ которых непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a,b]$ и удовлетворяют для любого значения $t \in [a,b]$ условию

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \neq 0.$$

Понятие «Плоская кривая» $\gamma(t)$ «с параметризацией» t является аналогичным.

Касательный вектор к кривой. Натуральный параметр кривой

Вектор

$$\left(\frac{dx}{dt}; \frac{dy}{dt}; \frac{dz}{dt}\right)$$

называют касательным вектором к кривой в точке $\big(x(t);\, y(t);\, z(t)\big)$, а прямую с направляющим вектором

$$\left(\frac{dx}{dt}; \frac{dy}{dt}; \frac{dz}{dt}\right)$$

проходящую через точку $\big(x(t);\, y(t);\, z(t)\big)$, называют касательной к кривой в этой точке.

Каждую кривую можно параметризовать различными способами.

Поскольку каждая точка кривой однозначно определяется длиной кривой от ее начала до выбранной точки, то длина кривой от ее начала до конкретной точки является параметризацией кривой. Такую параметризацию называют натуральной, а сам натуральный параметр обычно обозначают буквой s.

Натуральный параметр s связан с исходным параметром t формулой

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \tag{1}$$

доказательство которой является лекционным материалом.

Если исходная параметризация кривой является натуральной, то из формулы (1) получаем

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2} = \frac{ds}{ds} = 1$$

Таким образом, в любой точке кривой с натуральной параметризацией длина касательного вектора равна единице.

Единичный касательный вектор принято обозначать $\vec{\tau}$:

$$\vec{\tau} = \left(\frac{dx}{ds}; \frac{dy}{ds}; \frac{dz}{ds}\right)$$

Главный нормальный вектор. Бинормальный вектор. Кривизна кривой

Предположим теперь, что кривая с натуральной параметризацией

$$\gamma(s) = \Big\{ \big(x(s);\, y(s);\, z(s) \big), \quad s \in [0, l] \Big\}$$

является дважды непрерывно дифференцируемой.

Поскольку в каждой точке кривой касательный вектор $\vec{\tau}$ имеет длину 1, т.е.

$$(\vec{\tau},\, \vec{\tau}) = 1\,,$$

то, дифференцируя это равенство по s, получаем

$$\frac{d}{ds}(\vec{\tau},\, \vec{\tau}) = \left(\frac{d\vec{\tau}}{ds},\, \vec{\tau} \right) + \left(\vec{\tau},\, \frac{d\vec{\tau}}{ds} \right) = 2\left(\frac{d\vec{\tau}}{ds},\, \vec{\tau} \right) = 0$$

Следовательно, в каждой точке кривой вектор

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} \tag{2}$$

перпендикулярен касательному вектору $\vec{\tau}$.

- Длину вектора (2) называют кривизной кривой в рассматриваемой точке и обозначают

  $$k = \left| \frac{d\vec{\tau}}{ds} \right|$$

  Физическим смыслом кривизны является угловая скорость вращения касательного вектора $\vec{\tau}$.

- В случае, когда $k \neq 0$, единичный вектор в направлении вектора (2) называют главным нормальным вектором кривой в рассматриваемой точке и обозначают

  $$\vec{\nu} = \frac{1}{k} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{ds}$$

- Прямую с направляющим вектором $\vec{\nu}$, проходящую через точку $\big(x(t);\, y(t);\, z(t) \big)$ кривой, называют главной нормалью к кривой в этой точке.

- Величину
$$R = \frac{1}{k}$$
называют радиусом кривизны кривой в рассматриваемой точке.

- Точку 0, расположенную на главной нормали на расстоянии радиуса кривизны R от рассматриваемой точки кривой в направлении главного нормального вектора $\vec{\nu}$, называют центром кривизны (рис. 1).

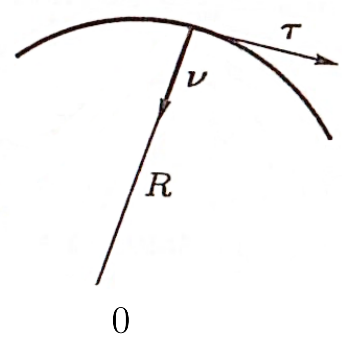

Рис. 1

- Векторное произведение $[\vec{\tau}, \vec{\nu}]$ называют бинормальным вектором кривой в рассматриваемой точке и обозначают
$$\vec{\beta} = [\vec{\tau}, \vec{\nu}]$$

- Прямую с направляющим вектором $\vec{\beta}$, проходящую через точку $\big(x(t);\, y(t);\, z(t)\big)$ кривой, называют бинормалью к кривой в этой точке.

Соприкасающаяся, нормальная и спрямляющая плоскости. Сопровождающий трехгранник Френе

В предыдущем разделе для каждой точки кривой построены три взаимно ортогональных вектора единичной длины $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$.

- Плоскость, проходящую через точку кривой параллельно векторам $\vec{\tau}$ и $\vec{\nu}$, называют соприкасающейся плоскостью (рис. 2)

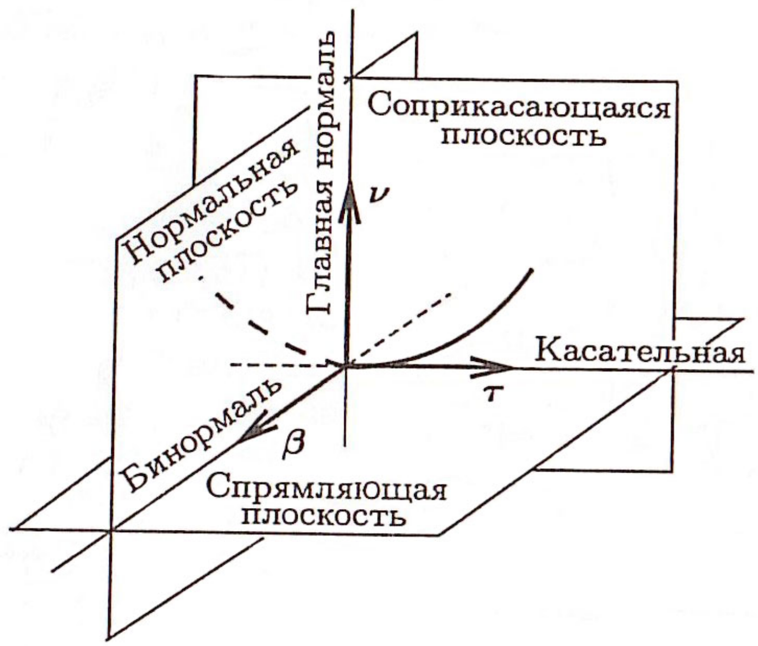

Рис. 2

- Плоскость, проходящую через точку кривой параллельно векторам $\vec{\nu}$ и $\vec{\beta}$, называют нормальной плоскостью (рис. 2)

- Плоскость, проходящую через точку кривой параллельно векторам $\vec{\tau}$ и $\vec{\beta}$, называют спрямляющей плоскостью (рис. 2)

- Объединение трех плоскостей, изображенных на рисунке 2, называют сопровождающим трехгранником Френе.

Расчетные формулы для решения задач

Обозначим через $\vec{r}(t)$ радиус-вектор, ведущий в точку кривой с координатами $\big(x(t);\, y(t);\, z(t)\big)$. В случае плоской кривой считаем, что $z(t) \equiv 0$.

Следующие формулы позволяют находить кривизну, касательный, нормальный и бинормальный векторы для кривой в любой параметризации.

- Формула для вычисления касательного вектора:

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{r}\,'(t)}{\left|\vec{r}\,'(t)\right|} \tag{3}$$

- Формула для вычисления бинормального вектора:

$$\vec{\beta} = \frac{\left[\vec{r}\,'(t),\, \vec{r}\,''(t)\right]}{\left|\left[\vec{r}\,'(t),\, \vec{r}\,''(t)\right]\right|} \tag{4}$$

- Формула для вычисления нормального вектора:

$$\vec{\nu} = \frac{\Big[\left[\vec{r}\,'(t),\, \vec{r}\,''(t)\right],\, \vec{r}\,'(t)\Big]}{\Big|\Big[\left[\vec{r}\,'(t),\, \vec{r}\,''(t)\right],\, \vec{r}\,'(t)\Big]\Big|} \tag{5}$$

- Формулы для вычисления кривизны

$$k = \frac{\left|\left[\vec{r}\,'(t),\, \vec{r}\,''(t)\right]\right|}{\left|\vec{r}\,'(t)\right|^3} \tag{6}$$

  Для плоской кривой, являющейся графиком функции $y = y(x)$, формула (6) принимает вид

$$k = \frac{|y\,''(x)|}{\Big(1 + \big(y'(x)\big)^2\Big)^{\frac{3}{2}}} \tag{7}$$

Примеры решения задач

Решим задачу из письменной экзаменационной контрольной работы 2018-2019 года.

Задача 1 *Найти радиус кривизны кривой*

$$x(t) = (t+1)\cos t + (t+2)\sin t,$$

$$y(t) = (t+1)\sin t - (t+2)\cos t,$$

при $t = 0$.

Решение. Обозначим

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} (t+1)\cos t + (t+2)\sin t \\ (t+1)\sin t - (t+2)\cos t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} \cos t - (t+1)\sin t + \sin t + (t+2)\cos t \\ \sin t + (t+1)\cos t - \cos t + (t+2)\sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}\,''(t) = \begin{pmatrix} -2\sin t - (t+1)\cos t + 2\cos t - (t+2)\sin t \\ 2\cos t - (t+1)\sin t + 2\sin t + (t+2)\cos t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Подставляя $t = 0$, получаем

$$\vec{r}\,'(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad \vec{r}\,''(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\left[\vec{r}\,'(0),\, \vec{r}\,''(0)\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 12\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$$

По формуле (7) находим кривизну при $t = 0$

$$k = \frac{\left|\left[\vec{r}\,'(0),\, \vec{r}\,''(0)\right]\right|}{\left|\vec{r}\,'(0)\right|^3} = \frac{12}{27} = \frac{4}{9}$$

Радиус кривизны

$$R = \frac{1}{k} = \frac{9}{4}$$

Ответ. $2,25$

Решим задачу из письменной экзаменационной контрольной контрольной работы 2017-2018 года.

Задача 2 *Найти кривизну плоской кривой, заданной уравнением*

$$3x^2y + x^3 + y^3 - 15 = 0,$$

в точке $A\,(1;\,2)$.

Доказательство. Найдем в точке $A\,(1;\,2)$ первую и вторую производные функции $y(x)$, заданной неявно уравнением

$$3x^2y + x^3 + y^3 - 15 = 0 \tag{8}$$

С этой целью продифференцируем уравнение (8) по x

$$6xy + 3x^2y'(x) + 3x^2 + 3y^2y'(x) = 0 \tag{9}$$

Подставляя в уравнение (9) $x = 1,\ y = 2,$ получаем

$$12 + 3y'(1) + 3 + 12y'(1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad y'(1) = -1$$

Продифференцируем равенство (9) по x

$$6y + 6xy'(x) + 6xy'(x) + 3x^2y''(x) + 6x + 6y\big(y'(x)\big)^2 + 3y^2y''(x) = 0 \tag{10}$$

Найдем $y''(1),$ подставив в равенство (10) $x = 1,\ y = 2,\ y'(1) = -1,$

$$12 - 6 - 6 + 3y''(1) + 6 + 12 + 12y''(1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad y''(1) = -\frac{6}{5}$$

Теперь по формуле (7) вычисляем кривизну кривой в точке $A\,(1;\,2)$

$$k = \frac{|y\,''(1)|}{\Big(1 + \big(y'(1)\big)^2\Big)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{6}{5}}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{5\sqrt{2}}$$

Ответ. $\dfrac{3}{5\sqrt{2}}$

Решим задачу из письменной экзаменационной контрольной работы 2013-2014 учебного года.

Задача 3 *Найти наибольшее значение кривизны кривой*

$$y = \ln \operatorname{ch} x$$

Решение.

Найдем первую и вторую производные функции $y(x)$

$$y' = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \operatorname{th} x$$

$$y'' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

По формуле (7) вычисляем кривизну кривой

$$k(x) = \frac{|y''(x)|}{\left(1+\left(y'(x)\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}}{\left(1+\operatorname{th}^2 x\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}}{\left(1+\dfrac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\operatorname{ch} x}{\left(\operatorname{ch}^2 x+\operatorname{sh}^2 x\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Чтобы определить наибольшее значение кривизны $k(x)$, найдем производную

$$k'(x) = \frac{\operatorname{sh} x\left(\operatorname{ch}^2 x+\operatorname{sh}^2 x\right)^{\frac{3}{2}} - \operatorname{ch} x\,\dfrac{3}{2}\left(\operatorname{ch}^2 x+\operatorname{sh}^2 x\right)^{\frac{1}{2}} 4\operatorname{sh} x\operatorname{ch} x}{\left(\operatorname{ch}^2 x+\operatorname{sh}^2 x\right)^3} =$$

$$= \frac{\operatorname{sh} x\operatorname{ch}^2 x+\operatorname{sh}^3 x - 6\operatorname{sh} x\operatorname{ch}^2 x}{\left(\operatorname{ch}^2 x+\operatorname{sh}^2 x\right)^{\frac{5}{2}}} = \frac{\operatorname{sh} x\left(\operatorname{sh}^2 x - 5\operatorname{ch}^2 x\right)}{\left(\operatorname{ch}^2 x+\operatorname{sh}^2 x\right)^{\frac{5}{2}}} = -\frac{\operatorname{sh} x\left(4\operatorname{ch}^2 x+1\right)}{\left(\operatorname{ch}^2 x+\operatorname{sh}^2 x\right)^{\frac{5}{2}}}$$

Таким образом, при переходе через $x=0$ производная $k'(x)$ меняет знак с «+» на «−». Следовательно, кривизна $k(x)$ достигает наибольшего значения при $x=0$

$$k_{\max} = k(0) = 1$$

Ответ. 1

Решим задачу из письменной экзаменационной контрольной работы 2016-2017 учебного года.

Задача 4 *Найти уравнение соприкасающейся плоскости пространственной кривой*

$$\mathit{\Gamma} = \{x=\cos^3 t,\ y=\sin^3 t,\ z=\cos 2t,\ t\in\mathbb{R}\}$$

при $t = \dfrac{\pi}{4}$.

Решение. Из определения соприкасающейся плоскости следует, что эта плоскость проходит через заданную точку кривой и перпендикулярна вектору бинормали (см. рис. 2).

Обозначим

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos^3 t \\ \sin^3 t \\ \cos 2t \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} -3\cos^2 t \sin t \\ 3\sin^2 t \cos t \\ -2\sin 2t \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}\,''(t) = \begin{pmatrix} 6\cos t \sin^2 t - 3\cos^3 t \\ 6\sin t \cos^2 t - 3\sin^3 t \\ -4\cos 2t \end{pmatrix}$$

Подставляя $t = \dfrac{\pi}{4}$, получаем

$$\vec{r}\,'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} -\dfrac{3}{2\sqrt{2}} \\ \\ \dfrac{3}{2\sqrt{2}} \\ \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad \vec{r}\,''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{2\sqrt{2}} \\ \\ \dfrac{3}{2\sqrt{2}} \\ \\ 0 \end{pmatrix}$$

Вычислим векторное произведение

$$\left[\vec{r}\,'\left(\frac{\pi}{4}\right), \vec{r}\,''\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \\ -\dfrac{3}{2\sqrt{2}} & \dfrac{3}{2\sqrt{2}} & -2 \\ \\ \dfrac{3}{2\sqrt{2}} & \dfrac{3}{2\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix} = \frac{3}{\sqrt{2}}\,\vec{i} - \frac{3}{\sqrt{2}}\,\vec{j} - \frac{9}{4}\vec{k} = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{\sqrt{2}} \\ \\ -\dfrac{3}{\sqrt{2}} \\ \\ -\dfrac{9}{4} \end{pmatrix}$$

В соответствии с формулой (6) бинормаль коллинеарна этому векторному произведению, а, значит, коллинеарна вектору

$$\begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \\ -3 \end{pmatrix}$$

Отсюда следует, что уравнение соприкасающейся плоскости имеет вид

$$2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y - 3z + D = 0$$

Найдем D, подставляя в уравнение плоскости координаты вектора $\vec{r}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

$$1 - 1 + D = 0$$

Таким образом, $D = 0$, и уравнение соприкасающейся плоскости можно записать в виде

$$2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y - 3z = 0$$

Ответ. $2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y - 3z = 0$

Спасибо за внимание.
Не болейте!