Формула Тейлора

Самарова С.С.

Учебное пособие для дистанционных занятий по дисциплине «Введение в математический анализ»

1 курс

В пособии рассматриваются методы решения задач на разложение функций по формуле Тейлора. В качестве примеров приводятся решения задач из задания для студентов, семестровых и экзаменационных контрольных работ.

Сравнение функций. Символы сравнения

Приведем необходимые теоретические сведения.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в проколотой окрестности точки x_0, причем $g(x) \neq 0$ для всех x из этой окрестности.

Определение 1 *Функцию* $f(x)$ *называют эквивалентной функции* $g(x)$ *при* $x \to x_0$, *если существует предел*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

В этом случае используют обозначение $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$.

Определение 2 *Функцию* $f(x)$ *называют о малым от функции* $g(x)$ *при* $x \to x_0$, *если существует предел*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

В этом случае используют обозначение $f(x) = o\big(g(x)\big)$ при $x \to x_0$.

Символ о малое широко используется при разложении функций по формуле Тейлора и при вычислении пределов и позволяет существенно сократить записи.

В тех случаях, когда не имеет значения, как конкретно выглядит функция $f(x)$, а важно только то, что она обладает свойством

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

всегда удобно заменить ее на $o\big(g(x)\big)$.

Замечание. Понятие эквивалентности функций при $x \to x_0$ и понятие о малого при $x \to x_0$ дословно переносятся на случаи $x \to \infty$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, $x \to x_0 + 0$, $x \to x_0 - 0$.

Техника работы с $o(f(x))$

Проиллюстрируем свойства о малых на следующих примерах.

Задача 1 *Верно ли равенство*

$$o\big(g(x)\big) + o\big(g(x)\big) = o\big(g(x)\big) \quad \textit{при} \quad x \to x_0\,?$$

Решение. Покажем, что это равенство верное. Действительно,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{o\big(g(x)\big) + o\big(g(x)\big)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{o\big(g(x)\big)}{g(x)} + \lim_{x \to x_0} \frac{o\big(g(x)\big)}{g(x)} = 0 + 0 = 0$$

Ответ. Верно.

Задача 2 (задание, §9, 51) *Пусть* $x \to 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $n \geqslant k$. *Показать, что*

1) $o\big(x^n\big) + o\big(x^k\big) = o\big(x^k\big)$;

2) $o\big(x^n\big) \cdot o\big(x^k\big) = o\big(x^{n+k}\big)$.

Решение.

1) Действительно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{o(x^n)+o(x^k)}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{o(x^n)}{x^k}+\lim_{x\to 0}\frac{o(x^k)}{x^k}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{o(x^n)}{x^n}\cdot\lim_{x\to 0}x^{n-k}+0=0$$

2) Действительно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{o(x^n)\cdot o(x^k)}{x^{n+k}}=\lim_{x\to 0}\frac{o(x^n)}{x^n}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{o(x^k)}{x^k}=0$$

Доказано.

Задача 3 (задание, §9, 50(4)) *Верны ли утверждения*

1) $\ln(1+e^x)=o(1)$ *при* $x\to+\infty$;

2) $\ln(1+e^x)=o(1)$ *при* $x\to-\infty$?

Решение.

1) Найдем предел

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{1}=\lim_{x\to+\infty}\ln\Big(e^x\cdot(e^{-x}+1)\Big)=\lim_{x\to+\infty}\Big(x+\ln(e^{-x}+1)\Big)=+\infty$$

Значит, утверждение 1) неверное.

2) Найдем предел

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{1}=\lim_{x\to-\infty}\ln(1+e^x)=0$$

Значит, утверждение 2) верное.

Задача 4 (задание, Т3) *При каких* $x_0\in\mathbb{R}$ *выполнено*

$$x^2-2x+1=o(x^2-3x+2)\quad \text{при}\quad x\to x_0\,?$$

Решение.

Рассмотрим предел

$$\lim_{x\to x_0} \frac{x^2-2x+1}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to x_0} \frac{x-1}{x-2}$$

Предел

$$\lim_{x\to x_0} \frac{x-1}{x-2}$$

равен нулю в том и только в том случае, когда $x_0 = 1$.

Ответ. $x_0 = 1$.

Разложение функций по формуле Тейлора

Теорема 1. Пусть функция $f(x)$ $(n-1)$ раз дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0 и существует конечная производная $f^{(n)}(x_0)$. Тогда для функции $f(x)$ справедливо равенство

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o\big((x-x_0)^n\big) \quad \text{при} \quad x \to x_0$$

Это равенство называют разложением фукнции $f(x)$ по формуле Тейлора до порядка n в точке x_0.

Его также можно записать в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\big((x-x_0)^n\big) \quad \text{при} \quad x \to x_0 \tag{1}$$

Многочлен

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

называют многочленом Тейлора порядка n функции $f(x)$ в точке x_0, а функцию

$$o\big((x-x_0)^n\big)$$

называют остаточным членом порядка n в форме Пеано.

Если $x_0 = 0$, то формула Тейлора (1) принимает вид

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k + o\big(x^n\big) \quad \text{при} \quad x \to 0 \tag{2}$$

и ее называют формулой Маклорена.

Задача 5 (задание, §9, 30(2)) *Представить формулой Маклорена с* $o\big(x^n\big)$ *функцию*

$$f(x) = \sin |x|^3 + e^x$$

Число n *выбрать наибольшим.*

Решение.

Определим, сколько раз можно дифференцировать функцию $f(x)$ в нуле. Для этого выясним сначала, существует ли у $f(x)$ производная в нуле. С этой целью найдем пределы

$$\lim_{x\to+0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to+0} \frac{\sin x^3 + e^x - 1}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+0} \frac{\sin x^3}{x^3} \cdot \lim_{x\to+0} x^2 + \lim_{x\to+0} \frac{e^x-1}{x} = 1\cdot 0 + 1 = 1$$

$$\lim_{x\to-0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to-0} \frac{-\sin x^3 + e^x - 1}{x} =$$

$$= -\lim_{x\to-0} \frac{\sin x^3}{x^3} \cdot \lim_{x\to-0} x^2 + \lim_{x\to-0} \frac{e^x-1}{x} = -1\cdot 0 + 1 = 1$$

Поскольку

$$\lim_{x\to+0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to-0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 1$$

то существует производная функции $f(x)$ в нуле

$$f'(0) = 1$$

При $x \neq 0$, находим

$$f'(x) = \big(\sin|x|^3 + e^x\big)' = \cos|x|^3 \cdot 3|x|^2 \operatorname{sgn} x + e^x = \cos x^3 \cdot 3x^2 \operatorname{sgn} x + e^x$$

Выясним теперь, существует ли вторая производная функции $f(x)$ в нуле. Найдем пределы

$$\lim_{x\to+0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x\to+0} \frac{\cos x^3 \cdot 3x^2 + e^x - 1}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+0} \cos x^3 \cdot \lim_{x\to+0} 3x + \lim_{x\to+0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \cdot 0 + 1 = 1$$

$$\lim_{x\to-0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x\to-0} \frac{-\cos x^3 \cdot 3x^2 + e^x - 1}{x} =$$

$$= -\lim_{x\to-0} \cos x^3 \cdot \lim_{x\to-0} 3x + \lim_{x\to-0} \frac{e^x - 1}{x} = -1 \cdot 0 + 1 = 1$$

Поскольку

$$\lim_{x\to+0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x\to-0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = 1$$

то существует вторая производная функции $f(x)$ в нуле

$$f''(0) = 1$$

При $x \neq 0$, находим

$$f''(x) = \big(\cos x^3 \cdot 3x^2 \operatorname{sgn} x + e^x\big)' = -\sin x^3 \cdot 9x^4 \operatorname{sgn} x + \cos x^3 \cdot 6x \operatorname{sgn} x + e^x$$

Проверим, существует ли третья производная функции $f(x)$ в нуле. Найдем пределы

$$\lim_{x\to+0} \frac{f''(x) - f''(0)}{x} = \lim_{x\to+0} \frac{-\sin x^3 \cdot 9x^4 + \cos x^3 \cdot 6x + e^x - 1}{x} =$$

$$= -\lim_{x\to+0} \frac{\sin x^3}{x^3} \cdot \lim_{x\to+0} 9x^6 + \lim_{x\to+0} 6\cos x^3 + \lim_{x\to+0} \frac{e^x - 1}{x} = -1 \cdot 0 + 6 + 1 = 7$$

$$\lim_{x\to-0} \frac{f''(x) - f''(0)}{x} = \lim_{x\to-0} \frac{\sin x^3 \cdot 9x^4 - \cos x^3 \cdot 6x + e^x - 1}{x} =$$

$$= \lim_{x\to -0} \frac{\sin x^3}{x^3} \cdot \lim_{x\to -0} 9x^6 - \lim_{x\to -0} 6\cos x^3 + \lim_{x\to -0} \frac{e^x - 1}{x} = 1\cdot 0 - 6 + 1 = -5$$

Поскольку

$$\lim_{x\to +0} \frac{f''(x) - f''(0)}{x} \neq \lim_{x\to -0} \frac{f''(x) - f''(0)}{x}$$

то третья производная функции $f(x)$ в нуле не существует.

Значит, мы можем разложить функцию $f(x)$ по формуле Маклорена только до 2-го порядка. Запишем это разложение

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}\, x^2 + o\big(x^2\big) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o\big(x^2\big) \quad \text{при} \quad x \to 0$$

Ответ. $f(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o\big(x^2\big)$ при $x \to 0$

В некоторых задачах на разложение функций по формуле Тейлора полезно иметь в виду следующее утверждение.

Утверждение 1 *Пусть функция* $f(x)$ $(n-1)$ *раз дифференцируема в некоторой окрестности точки* x_0 *и существует конечная производная* $f^{(n)}(x_0)$. *Тогда ее разложение (1) по формуле Тейлора единственно.*

Из утверждения 1 следует, что, если каким-нибудь способом удалось представить функцию $f(x)$ в виде

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + o\big((x-x_0)^n\big) \quad \text{при} \quad x \to x_0,$$

то это и будет ее разложением по формуле Тейлора.

Продемонстрируем, как применяется утверждение 1 на примере решения следующей задачи.

Задача 6 (задание, Т4) *Разложите по формуле Тейлора в точке* $x = 0$ *с точностью до* $o\big(x^5\big)$ *функцию*

$$f(x) = \big(x + x^2 - x^3 + x^4\big)^3$$

Решение.

Представим функцию $f(x)$ в другом виде

$$f(x) = \left(x + x^2 - x^3 + x^4\right)^3 = x^3\left(1 + x - x^2 + x^3\right)^3$$

Поскольку при всех $n > 2$

$$x^n = o\left(x^2\right) \quad \text{при} \quad x \to 0,$$

то выполним умножение, убирая в $o\left(x^2\right)$ все слагаемые со степенями выше, чем x во второй степени

$$\left(1 + x - x^2 + x^3\right)^2 = \left(1 + x - x^2 + o\left(x^2\right)\right)^2 =$$

$$\left(1 + x - x^2 + o\left(x^2\right)\right) \cdot \left(1 + x - x^2 + o\left(x^2\right)\right) = 1 + 2x - x^2 + o\left(x^2\right)$$

Тогда

$$\left(1 + x - x^2 + x^3\right)^3 = \left(1 + 2x - x^2 + o\left(x^2\right)\right) \cdot \left(1 + x - x^2 + o\left(x^2\right)\right) =$$

$$= 1 + 3x + o\left(x^2\right)$$

Следовательно,

$$f(x) = x^3 + 3x^4 + o\left(x^5\right) \quad \text{при} \quad x \to 0$$

В силу единственности разложения по формуле Тейлора мы получили ответ.

Ответ. $f(x) = x^3 + 3x^4 + o\left(x^5\right)$ при $x \to 0$

Разложения основных элементарных функций по формуле Маклорена

Для решения задач, использующих разложения функций по формуле Тейлора, необходимо выучить наизусть следующие основные разложения функций по формуле Маклорена n -го порядка.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o\big(x^n\big) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o\big(x^n\big)$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\big(x^{2n+2}\big) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\big(x^{2n+2}\big)$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\big(x^{2n+1}\big) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\big(x^{2n+1}\big)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\big(x^{2n+2}\big) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\big(x^{2n+2}\big)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o\big(x^{2n+1}\big) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o\big(x^{2n+1}\big)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + o\big(x^n\big) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + o\big(x^n\big)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!} + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^n}{n!} + o\big(x^n\big) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_\alpha^k x^k + o\big(x^n\big),$$

где

$$C_\alpha^0 = 1, \quad C_\alpha^k = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}\ , \ k = 1, 2, \ldots, n$$

При запоминании формул нужно обратить внимание на степени x в о малых. В формулах для синуса, косинуса, гиперболического синуса и гиперболического косинуса степень x в о малых на единицу больше, чем в последнем ненулевом слагаемом.

Примеры решения задач из семестровых и экзаменационных котрольных работ

Задача 7 (экзаменационная контрольная работа 2016/2017) *Функцию*

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$$

разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $x_0 = \dfrac{1}{2}$ *до* $o\big((x-x_0)^n\big)$.

Решение. Введем новую переменную

$$t = x - \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = t + \frac{1}{2}$$

Тогда функция $f(x)$ примет вид

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}} = x^{-\frac{3}{2}} = \left(t + \frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}\,(1+2t)^{-\frac{3}{2}}$$

Если воспользоваться основным разложением

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{n} C_{\alpha}^{k} x^{k} + o\big(x^{n}\big)\,,$$

в которое вместо x подставим $2t$, а вместо α подставим $\left(-\frac{3}{2}\right)$, получим

$$2\sqrt{2}\,(1+2t)^{-\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}\sum_{k=0}^{n} C_{-\frac{3}{2}}^{k}(2t)^{k} + o\big(t^{n}\big)$$

Возвращаясь к исходной переменной x, запишем ответ задачи.

Ответ.

$$f(x) = 2\sqrt{2}\sum_{k=0}^{n} C_{-\frac{3}{2}}^{k}\,2^{k}\left(x - \frac{1}{2}\right)^{k} + o\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^{n}\right),$$

где

$$C_{-\frac{3}{2}}^{0} = 1, \quad C_{-\frac{3}{2}}^{k} = \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}-1\right)\ldots\left(-\frac{3}{2}-k+1\right)}{k!}\,,\ k = 1, 2, \ldots, n$$

Задача 8 (экзаменационная контрольная работа 2005/2006) *Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки* $x_0 = 0$ *до* $o\big(x^n\big)$ *функцию*

$$f(x) = \frac{4x+1}{(2-x)(x+1)^2}$$

Решение. Поскольку функция $f(x)$ является рациональной дробью, то сначала разложим данную рациональную дробь на простейшие дроби, т.е. представим ее в виде

$$\frac{4x+1}{(2-x)(x+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} \tag{3}$$

где A, B, C – числа, которые мы пока ещё не знаем.

Для того, чтобы найти число A, умножим тождество (3) на $(x-2)$

$$\frac{-(4x+1)}{(x+1)^2} = A + \frac{B(x-2)}{x+1} + \frac{C(x-2)}{(x+1)^2}$$

Подставляя $x = 2$, находим

$$A = -1$$

Точно так же можно найти число C. Для этого умножим тождество (3) на $(x+1)^2$

$$\frac{4x+1}{2-x} = \frac{A(x+1)^2}{x-2} + B(x+1) + C$$

Подставляя $x = -1$, находим

$$C = -1$$

Оставшееся слагаемое найдем из формулы (3) вычитанием

$$\frac{B}{x+1} = \frac{4x+1}{(2-x)(x+1)^2} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{4x+1-x^2-2x-1+2-x}{(2-x)(x+1)^2} =$$

$$= \frac{-x^2+x+2}{(2-x)(x+1)^2} = \frac{-(x+1)(x-2)}{(2-x)(x+1)^2} = \frac{1}{x+1}$$

Таким образом,

$$f(x) = \frac{4x+1}{(2-x)(x+1)^2} = -\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{x}{2}} + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-1} + (1+x)^{-1} - (1+x)^{-2}$$

Воспользовавшись для каждого слагаемого основным разложением

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{n} C_{\alpha}^{k} x^{k} + o\big(x^{n}\big)\,,$$

получим

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} C_{-1}^{k}\left(\frac{-x}{2}\right)^{k} + \sum_{k=0}^{n} C_{-1}^{k} x^{k} - \sum_{k=0}^{n} C_{-2}^{k} x^{k} + o\big(x^{n}\big)$$

Приведем подобные члены (при решении задач на разложение по формуле Тейлора это является обязательным)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\left[\,\frac{1}{2}\,C_{-1}^{k}\left(\frac{-1}{2}\right)^{k} + C_{-1}^{k} - C_{-2}^{k}\right] x^{k} + o\big(x^{n}\big),$$

где

$$C_{-1}^{0} = 1, \quad C_{-1}^{k} = \frac{(-1)(-2)(-3)\ldots(-1-k+1)}{k!} = (-1)^{k}\ ,\ k = 1, 2, \ldots, n;$$

$$C_{-2}^{0} = 1, \quad C_{-2}^{k} = \frac{(-2)(-3)(-4)\ldots(-2-k+1)}{k!} = (-1)^{k}(k{+}1)\ ,\ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Следовательно,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\left[\frac{1}{2^{k+1}} + (-1)^{k} - (-1)^{k}(k+1)\right] x^{k} + o\big(x^{n}\big) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left[\frac{1}{2^{k+1}} + (-1)^{k+1}k\right] x^{k} + o\big(x^{n}\big)$$

Ответ.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\left[\frac{1}{2^{k+1}} + (-1)^{k+1}k\right] x^{k} + o\big(x^{n}\big)$$

Задача 9 (экзаменационная контрольная работа 2020/2021) *Разложите по формуле Тейлора в окрестности точки* $x_0 = \dfrac{1}{3}$ *до* $o\big((x-x_0)^{2n}\big)$ *функцию*

$$f(x) = (9x^2 - 6x - 1)\cos^2(1-3x)$$

Решение. Введем новую переменную

$$t = x - \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x = t + \frac{1}{3}$$

Тогда функция $f(x)$ примет вид

$$f(x) = (9x^2 - 6x - 1)\cos^2(1 - 3x) = \big((3x-1)^2 - 2\big)\cos^2(3x-1) =$$

$$= \big(9t^2 - 2\big)\cos^2 3t = \frac{1}{2}\big(9t^2 - 2\big)\,(1 + \cos 6t) = \frac{9t^2}{2} - 1 + \left(\frac{9t^2}{2} - 1\right)\cos 6t$$

Подставляя $x = 6t$ в основное разложение

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o\big(x^{2n+1}\big)$$

получим

$$\cos 6t = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\, 6^{2k}\, t^{2k}}{(2k)!} + o\big(t^{2n+1}\big)$$

Тогда

$$f = \frac{9t^2}{2} - 1 + \left(\frac{9t^2}{2} - 1\right)\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\, 6^{2k}\, t^{2k}}{(2k)!} + o\big(t^{2n+1}\big)$$

Раскроем скобки.

$$f = \frac{9t^2}{2} - 1 + \frac{9}{2}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\, 6^{2k}\, t^{2k+2}}{(2k)!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\, 6^{2k}\, t^{2k}}{(2k)!} + o\big(t^{2n+1}\big)$$

Для того, чтобы получить разложение по формуле Тейлора, приведем подобные члены. С этой целью, изменив переменную суммирования в первой сумме по формуле

$$m = k + 1 \quad \Leftrightarrow \quad k = m - 1,$$

получим

$$f = \frac{9t^2}{2} - 1 + \frac{9}{2}\sum_{m=1}^{n+1} \frac{(-1)^{m-1}\, 6^{2m-2}\, t^{2m}}{(2m-2)!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\, 6^{2k}\, t^{2k}}{(2k)!} + o\big(t^{2n+1}\big)$$

Сделаем одинаковыми пределы суммирования в обеих суммах

$$f = \frac{9t^2}{2} - 1 + \frac{9}{2}\sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^{m-1}\,6^{2m-2}\,t^{2m}}{(2m-2)!} + \frac{9(-1)^n\,6^{2n}\,t^{2n+2}}{2(2n)!} - 1-$$

$$-\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k\,6^{2k}\,t^{2k}}{(2k)!} + o\big(t^{2n+1}\big)$$

Поскольку

$$\frac{9(-1)^n\,6^{2n}\,t^{2n+2}}{2(2n)!} = o\big(t^{2n+1}\big)\,,$$

то

$$f = \frac{9t^2}{2} - 2 + \frac{9}{2}\sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^{m-1}\,6^{2m-2}\,t^{2m}}{(2m-2)!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k\,6^{2k}\,t^{2k}}{(2k)!} + o\big(t^{2n+1}\big)$$

Снова изменяя переменную суммирования в первой сумме с m на k, приводим подобные члены

$$f = \frac{9t^2}{2} - 2 + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{9(-1)^{k-1}\,6^{2k-2}}{2(2k-2)!} - \frac{(-1)^k\,6^{2k}}{(2k)!}\right]\, t^{2k} + o\big(t^{2n+1}\big) =$$

$$= \frac{9t^2}{2} - 2 + \left(\frac{9}{2} + 18\right) t^2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^{k-1}\,6^{2k-2}}{(2k)!}\,[9(2k-1)k + 36]\, t^{2k} + o\big(t^{2n+1}\big) =$$

$$= -2 + 27t^2 + 9\sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^{k-1}\,6^{2k-2}}{(2k)!}(2k^2 - k + 4)\, t^{2k} + o\big(t^{2n+1}\big)$$

Возвращаясь к исходной переменной x, запишем ответ задачи.

Ответ.

$$f(x) = -2 + 27\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + 9\sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^{k-1}\,6^{2k-2}}{(2k)!}(2k^2 - k + 4)\, \left(x - \frac{1}{3}\right)^{2k} +$$

$$+o\left(\left(x - \frac{1}{3}\right)^{2n+1}\right)$$

Задача 10 (семестровая контрольная работа 2009/2010) *Представить формулой Тейлора функцию*

$$y = x\ln(x^2+x)$$

в окрестности точки $x_0 = 2$ *до* $o\big((x-2)^n\big)$

Решение. Вводя новую переменную

$$t = x-2 \quad \Leftrightarrow \quad x = t+2$$

и преобразовывая логарифм произведения функций в сумму логарифмов, получаем

$$y = x\ln(x^2+x) = x\big(\ln x + \ln(x+1)\big) = (t+2)\big(\ln(t+2)+\ln(t+3)\big) =$$

$$= (t+2)\left(\ln 2 + \ln\left(1+\frac{t}{2}\right) + \ln 3 + \ln\left(1+\frac{t}{3}\right)\right)$$

Используя основное разложение

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} + o\big(x^n\big)$$

получим

$$y = (t+2)\left(\ln 6 + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\frac{t}{2}\right)^k + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\frac{t}{3}\right)^k\right) + o\big(t^n\big) =$$

$$= (t+2)\left(\ln 6 + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}\,t^k}{k}\left(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}\right)\right) + o\big(t^n\big)$$

Раскроем скобки.

$$y = 2\ln 6 + t\ln 6 + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}\,t^{k+1}}{k}\left(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}\right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n}\frac{2(-1)^{k-1}\,t^k}{k}\left(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}\right) + o\big(t^n\big)$$

Для того, чтобы получить разложение по формуле Тейлора, приведем подобные члены. С этой целью, изменив переменную суммирования в первой сумме по формуле

$$m = k + 1 \quad \Leftrightarrow \quad k = m - 1,$$

получим

$$y = 2\ln 6 + t\ln 6 + \sum_{m=2}^{n+1} \frac{(-1)^{m-2}\, t^m}{m-1} \left(\frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{3^{m-1}} \right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \frac{2(-1)^{k-1}\, t^k}{k} \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} \right) + o\big(t^n\big)$$

Сделаем одинаковыми пределы суммирования в обеих суммах

$$y = 2\ln 6 + t\ln 6 + \sum_{m=2}^{n} \frac{(-1)^{m}\, t^m}{m-1} \left(\frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{3^{m-1}} \right) + \frac{(-1)^{n+1}\, t^{n+1}}{n} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right) +$$

$$+2t \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \sum_{k=2}^{n} \frac{2(-1)^{k-1}\, t^k}{k} \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} \right) + o\big(t^n\big)$$

Поскольку

$$\frac{(-1)^{n+1}\, t^{n+1}}{n} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right) = o\big(t^n\big)\,,$$

то

$$y = 2\ln 6 + t \left(\ln 6 + \frac{5}{3} \right) + \sum_{m=2}^{n} \frac{(-1)^{m}\, t^m}{m-1} \left(\frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{3^{m-1}} \right) +$$

$$+ \sum_{k=2}^{n} \frac{2(-1)^{k-1}\, t^k}{k} \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} \right) + o\big(t^n\big)$$

Снова изменяя переменную суммирования в первой сумме с m на k, приводим подобные члены

$$y = 2\ln 6 + t \left(\ln 6 + \frac{5}{3} \right) +$$

$$+ \sum_{k=2}^{n} (-1)^k\, t^k \left(\frac{1}{(k-1)\, 2^{k-1}} + \frac{1}{(k-1)\, 3^{k-1}} - \frac{2}{k\, 2^k} - \frac{2}{k\, 3^k} \right) + o\big(t^n\big) =$$

$$= 2\ln 6 + t\left(\ln 6 + \frac{5}{3}\right) + \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k\, t^k}{k(k-1)} \left(\frac{1}{2^{k-1}} + \frac{k+2}{3^k}\right) + o\big(t^n\big)$$

Возвращаясь к исходной переменной x, запишем ответ задачи.

Ответ.

$$y = 2\ln 6 + (x-2)\left(\ln 6 + \frac{5}{3}\right) + \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k\,(x-2)^k}{k(k-1)} \left(\frac{1}{2^{k-1}} + \frac{k+2}{3^k}\right) + o\big((x-2)^n\big)$$

Некоторые важные разложения по формуле Маклорена

В данном разделе мы получим разложения по формуле Маклорена до $o\big(x^6\big)$ следующих функций:

- $y = \operatorname{tg} x$,
- $y = \operatorname{th} x$,
- $y = \arcsin x$,
- $y = \arccos x$,
- $y = \operatorname{arctg} x$,
- $y = \operatorname{arcctg} x$.

1. Использование деления для получения разложения по формуле Маклорена.

Задача 11 (задание, Т5 а)) *Представить формулой Маклорена до* $o\big(x^6\big)$ *функцию*

$$y = tg\, x$$

Решение. Для того, чтобы получить разложение функции

$$y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

до $o\big(x^6\big)$, достаточно воспользоваться основными разложениями функций $\sin x$ и $\cos x$ в виде

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\big(x^6\big)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\big(x^5\big)$$

Как мы увидим далее, функцию $\cos x$ достаточно разложить до $o\big(x^5\big)$, поскольку разложение функции $\sin x$ начинается с x (в первой степени).

Действительно,

$$y = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\big(x^6\big)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\big(x^5\big)} =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\big(x^6\big)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\big(x^5\big)\right)^{-1}$$

Теперь, используя основное разложение

$$(1+t)^{-1} = 1 + (-1)t + \frac{(-1)(-2)t^2}{2!} + \frac{(-1)(-2)(-3)t^3}{3!} + o\big(t^3\big) =$$

$$= 1 - t + t^2 - t^3 + o\big(t^3\big)$$

для

$$t = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

продолжаем

$$y = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\big(x^6\big)\right)\left[1 - \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 - \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^3 + o\big(x^6\big)\right] =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\big(x^6\big)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + o\big(x^5\big)\right) =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\big(x^6\big)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o\big(x^5\big)\right) =$$

$$= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{12} + \frac{5x^5}{24} + o\big(x^6\big) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o\big(x^6\big)$$

Ответ. $\operatorname{tg} x = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + o\big(x^6\big)$

Задача 12 (задание, Т5 г)) *Представить формулой Маклорена до* $o(x^6)$ *функцию*

$$y = th\, x$$

Решение. Поступаем по аналогии с решением задачи 12.

$$y = \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)}{1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)} =$$

$$= \left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)^{-1} =$$

$$= \left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)\right)\left[1 - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^3 + o(x^6)\right] =$$

$$= \left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + o(x^5)\right) =$$

$$= \left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^5)\right) =$$

$$= x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{12} + \frac{5x^5}{24} + o(x^6) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)$$

Ответ. $\operatorname{th} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + o(x^6)$

2. Использование разложения функции $f'(x)$ по формуле Маклорена для получения разложения функции $f(x)$ по формуле Маклорена.

Выпишем в общем виде формулы Маклорена для функций $f(x)$ и $f'(x)$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}\,x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + o(x^n)$$

$$f'(x) = f'(0) + f''(0)x + \frac{f^{(3)}(0)}{2!}\,x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{(n-1)!}\,x^{n-1} + o(x^{n-1}) =$$

$$= \left(f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}\,x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n\right)' + o(x^{n-1})$$

Поэтому, если известно разложение функции $f'(x)$ по формуле Маклорена до $o\big(x^{n-1}\big)$

$$f'(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + o\big(x^{n-1}\big),$$

то разложение функции $f(x)$ по формуле Маклорена до $o\big(x^n\big)$ можно получить по формуле

$$f(x) = f(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2}\, x^2 + \frac{a_2}{3}\, x^3 + \ldots + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + o\big(x^n\big) \tag{4}$$

Задача 13 (задание, Т5 б)) *Представить формулой Маклорена до* $o\big(x^6\big)$ *функцию*

$$y = arctg\, x$$

Решение. Для того, чтобы получить разложение функции $y = \operatorname{arctg} x$ до $o\big(x^6\big)$, разложим сначала ее производную

$$y' = \frac{1}{1+x^2}$$

до $o\big(x^5\big)$.

Воспользовавшись основным разложением

$$(1+t)^{-1} = 1 + (-1)t + \frac{(-1)(-2)}{2}\, t^2 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{6}\, t^2 + o\big(t^3\big) =$$

$$= 1 - t + t^2 - t^3 + o\big(t^3\big)$$

при $t = x^2$ получаем

$$y' = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + o\big(x^6\big) = 1 - x^2 + x^4 + o\big(x^5\big)$$

Отсюда с помощью формулы (4) находим

$$y(x) = y(0) + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o\big(x^6\big) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o\big(x^6\big)$$

Ответ. $\operatorname{arctg} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + o\big(x^6\big)$

Замечание. Разложение функции

$$y = \operatorname{arcctg} x$$

по формуле Маклорена до $o\left(x^6\right)$ легко получается с помощью формулы

$$\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + o\left(x^6\right)$$

Задача 14 (задание, Т5 в)) *Представить формулой Маклорена до* $o\left(x^6\right)$ *функцию*

$$y = arcsin\, x$$

Решение. Поступаем по аналогии с решением задачи 14.

Для того, чтобы получить разложение функции $y = \arcsin x$ до $o\left(x^6\right)$, разложим сначала ее производную

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

до $o\left(x^5\right)$.

Воспользовавшись основным разложением

$$(1+t)^{-\frac{1}{2}} = 1+\left(-\frac{1}{2}\right)t+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2}\,t^2+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{6}\,t^2+o\left(t^3\right) =$$

$$= 1 - \frac{t}{2} + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{2}\,t^2 - \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{6}\,t^2 + o\left(t^3\right) = 1 - \frac{t}{2} + \frac{3}{8}\,t^2 - \frac{5}{16}\,t^3 + o\left(t^3\right)$$

при $t = -x^2$ получаем

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}\,x^4 + \frac{5}{16}\,x^6 + o\left(x^6\right) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}\,x^4 + o\left(x^5\right)$$

Следовательно, по формуле (4) находим

$$y(x) = y(0) + x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o\left(x^6\right) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o\left(x^6\right)$$

Ответ. $\arcsin x = x + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{3x^5}{40} + o\left(x^6\right)$

Замечание. Разложение функции

$$y = \arccos x$$

по формуле Маклорена до $o\left(x^6\right)$ легко получается с помощью формулы

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^5}{40} + o\left(x^6\right)$$

Спасибо за внимание.
Не болейте!