Доктор физико-математических наук, профессор

К. Л. САМАРОВ

МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие по разделу

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

© К. Л. Самаров, 2009

СОДЕРЖАНИЕ

1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ. КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Рассмотрим произвольное конечное множество Ω, состоящее из n элементов $\{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$, и назовем эти элементы *элементарными исходами.*

Определим для каждого элементарного исхода ω_i вероятность $P(\omega_i)$ по формуле

$$P(\omega_i) = \frac{1}{n}.$$

Произвольные подмножества множества Ω назовем *событиями* (*случайными событиями)*.

Рассмотрим произвольное событие A, состоящее из m элементов, и назовем *вероятностью события* A число

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Данное определение вероятности события называют *классическим* определением, число m называют *числом благоприятных исходов,* а число n – *числом всех исходов*.

Вероятность заключена в пределах $0 \le P(A) \le 1$, и чем ближе она к 1, тем больше оснований ожидать, что событие A действительно произойдет.

Множество всех событий обозначим символом F.

Тройку объектов (Ω, F, P) называют *классическим вероятностным пространством.*

2. ОПЕРАЦИИ НАД СЛУЧАЙНЫМИ СОБЫТИЯМИ

На множестве F случайных событий определены операции *суммы, произведения и перехода к противоположному событию*:

- Событие $A + B$ называют *суммой* событий A и B, если происходит хотя бы одно из событий A или B;

- Событие $A \cdot B$ называют *произведением* событий A и B, если происходят оба события A и B;
- Событие $\overline{A}$, состоящее в том, что событие A не происходит, называют *противоположным* к событию A.

3. КОМБИНАТОРНЫЕ ФОРМУЛЫ

Следующие формулы часто используются в задачах, связанных с подсчетом вероятностей:

- *Число перестановок* n различных элементов

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$$

Замечание. Число $0!$ во всех формулах считается равным 1;

- *Число размещений* m различных элементов на n местах $(m \le n)$ (число способов выбрать m элементов из n различных элементов, если *порядок, в котором они выбраны, имеет значение*)

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1);$$

- *Число сочетаний* из n различных элементов по m элементов $(m \le n)$ (число способов выбрать m элементов из n различных элементов, если *порядок, в котором они выбраны, не имеет значения, а важно лишь, какие элементы выбраны)*

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)}{m!}.$$

4. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Рассмотрим на плоскости фигуру U, частью которой является фигура A, и предположим, что точка наугад бросается в фигуру U. Вероятность того, что при этом точка попадет в фигуру A, называется *геометрической вероятностью* и вычисляется по следующей формуле:

$$P(A)=\frac{\text{площадь фигуры } A}{\text{площадь фигуры } U}.$$

5. ВЕРОЯТНОСТЬ СУММЫ ДВУХ СОБЫТИЙ. НЕСОВМЕСТНОСТЬ СОБЫТИЙ

Важным понятием является понятие *несовместности* событий.

События A и B называют *несовместными*, если событие $A\cdot B$ не может произойти.

Теорема о вероятности суммы двух событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$$

Следствие 1. Для *несовместных* событий A и B выполнено соотношение

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

Следствие 2. Для *противоположного* события $\overline{A}$ выполнено соотношение

$$P(\overline{A})=1-P(A)$$

6. УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ. НЕЗАВИСИМОСТЬ СОБЫТИЙ. ВЕРОЯТНОСТЬ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДВУХ СОБЫТИЙ. ФОРМУЛЫ ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ И БАЙЕСА

Условной вероятностью $P(B/A)$ события B при условии A называют вероятность наступления события B, если известно, что событие A *уже произошло*.

Теорема о вероятности произведения двух событий:

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B/A)$$

Независимость событий

События A и B называют *независимыми*, если

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B).$$

Следствие. Для *независимых* событий A и B выполнено соотношение

$$P(B/A)=P(B).$$

Формулы полной вероятности и Байеса

События $H_1, H_2, ..., H_n$, называемые *гипотезами*, образуют *полную группу событий*, если выполнены следующие условия:

- События H_i и H_j несовместны при любых $i \neq j$;
- $H_1 + H_2 + ... + H_n = \Omega$.

В этом случае для любого события A выполнены два соотношения:

- $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A / H_i)$ — *формула полной вероятности*;
- $P(H_k / A) = \dfrac{P(H_k) \cdot P(A / H_k)}{P(A)}$ — *формула Байеса*.

7. СЕРИЯ НЕЗАВИСИМЫХ ИСПЫТАНИЙ БЕРНУЛЛИ. ТЕОРЕМЫ МУАВРА-ЛАПЛАСА И ПУАССОНА

Пусть проведена серия независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна p (схема Бернулли). Тогда вероятность того, что в *серии из* n *испытаний* событие A *появится ровно* k раз, выражается *формулой Бернулли*

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \quad q = 1 - p.$$

При больших значениях n расчеты по формуле Бернулли затруднительны, поэтому используются приближенные формулы.

Нормальное приближение для схемы Бернулли:

- $P_n(k) = \dfrac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2}$, $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$ — *локальная теорема Муавра – Лапласа*;
- $P_n(k_1 \le k \le k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt$, $x_i = \dfrac{k_i - np}{\sqrt{npq}}, i = 1, 2$ — *интегральная теорема Муавра – Лапласа.*

Замечание. В пункте 14 Модуля приводится таблица значений функции

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-t^2/2}\, dt.$$

Для того чтобы с помощью этой таблицы вычислить значения функции $\Phi(x)$, используются следующие свойства:

- если $x \geq 0$, то $\Phi(x) = 0{,}5 + \Phi_0(x)$,
- если $x < 0$, то $\Phi(x) = 0{,}5 - \Phi_0(x)$.

Пуассоновское приближение (теорема Пуассона) для схемы Бернулли

Пусть $n \to \infty$, $p \to 0$, так, что $np \to \lambda$ $(\lambda > 0)$. Тогда для любого фиксированного числа k выполнено соотношение

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

На практике, когда $np \leq 10$ применяют *Пуассоновское* приближение, если же $np > 20$, то применяют *нормальное* приближение.

В пункте 14 Модуля приводится таблица значений функции

$$p_k(\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

В учебниках по теории вероятностей приводятся и другие вероятностные таблицы, используемые при решении различных задач.

8. ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ. НЕЗАВИСИМОСТЬ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Дискретной случайной величиной называют любую функцию, определенную на множестве элементарных исходов и принимающую изолированные числовые значения.

Случайные величины принято обозначать греческими буквами $\xi, \eta, \zeta, \ldots$.

Закон распределения дискретной случайной величины

Случайные величины задают при помощи *закона распределения. Законом распределения дискретной* случайной величины ξ называют таблицу

$$\xi : \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \dots \\ \hline p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & \dots \\ \hline \end{array},$$

в верхней строке которой перечислены *значения*, принимаемые случайной величиной, а в нижней – *вероятности*, с которыми она принимает эти значения.

Таким образом,

$$p_k = P\left(\xi = x_k\right), k = 1,2,3,\dots,$$

причем вероятности $p_1, p_2, \dots$ удовлетворяют соотношению

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots = 1$$

и являются неотрицательными числами.

Числовые характеристики случайных величин

Самыми важными числовыми характеристиками случайной величины являются ее *математическое ожидание* и *дисперсия*.

Математическим ожиданием $M\xi$ дискретной случайной величины ξ называют число

$$M\xi = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + \dots,$$

а дисперсией $D\xi$ дискретной случайной величины ξ называют число

$$D\xi = x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 + x_3^2 \cdot p_3 + \dots - \left(x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + \dots\right)^2.$$

Математическое ожидание является средним взвешенным значением случайной величины, а дисперсия характеризует разброс значений случайной величины относительно ее математического ожидания.

Средним квадратическим отклонением $\sigma(\xi)$ случайной величины ξ называют число $\sigma(\xi) = \sqrt{D\xi}$.

Независимость случайных величин

Случайные величины ξ_1 и ξ_2 называют *независимыми*, если для *любых чисел* x и y события $\{\xi_1 = x\}$ и $\{\xi_2 = y\}$ являются *независимыми* событиями.

Следствие. Если ξ_1 и ξ_2 – *независимые случайные величины*, то

$$P(\xi_1 = x, \xi_2 = y) = P(\xi_1 = x) \cdot P(\xi_2 = y).$$

Свойства математического ожидания и дисперсии:

- Если c – произвольное число, а $\eta = c \cdot \xi$, то

$$M\eta = \mathrm{c} \cdot M\xi,$$
$$D\eta = \mathrm{c}^2 \cdot D\xi.$$

- Если $\xi = \xi_1 + \xi_2$, то $M\xi = M\xi_1 + M\xi_2$.

- Если c – произвольное число, а $\eta = c + \xi$, то $D\eta = D\xi$.

- Если ξ_1 и ξ_2 – *независимые случайные величины*, а $\xi = \xi_1 \cdot \xi_2$, то

$$M\xi = M\xi_1 \cdot M\xi_2.$$

- Если ξ_1 и ξ_2 – *независимые случайные величины*, а $\xi = \xi_1 + \xi_2$, то

$$D\xi = D\xi_1 + D\xi_2.$$

9. ОСНОВНЫЕ ВИДЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

В данном параграфе описываются важные и широко распространенные в приложениях дискретные случайные величины с *биномиальным* законом распределения, *геометрическим* законом распределения и законом распределения *Пуассона*.

- *Биномиальный* закон распределения с параметром p $(0 < p < 1)$ задается следующей таблицей, где использовано обозначение $q = 1 - p$:

ξ :

0	1	...	k	...	n
q^n	$n \cdot p \cdot q^{n-1}$	...	$C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$	...	p^n

Характеристики: $M\xi = n \cdot p$, $D\xi = n \cdot p \cdot q$, $\sigma(\xi) = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$.

- *Геометрический* закон распределения с параметром p $(0 < p < 1)$ задается следующей таблицей, где, как и в предыдущем случае, $q = 1 - p$:

ξ :

1	2	...	k	...
p	$p \cdot q$	...	$p \cdot q^{k-1}$	...

Характеристики: $M\xi = \frac{1}{p}$, $D\xi = \frac{q}{p^2}$, $\sigma(\xi) = \frac{\sqrt{q}}{p}$.

- *Распределение Пуассона* с параметром λ $(\lambda > 0)$ задается следующей таблицей:

ξ :

0	1	...	k	...
$e^{-\lambda}$	$\lambda \cdot e^{-\lambda}$	...	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	...

.

Характеристики: $M\xi = \lambda$, $D\xi = \lambda$, $\sigma(\xi) = \sqrt{\lambda}$.

Замечание. Распределение Пуассона используется в качестве одного из приближений в схеме Бернулли (см. пункт 7 данного Модуля).

10. НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

В отличие от *дискретных случайных величин*, принимающих только изолированные числовые значения, *непрерывные случайные величины* $\xi = \xi(\omega)$ могут принимать значения из произвольного числового промежутка.

Непрерывную случайную величину можно задать с помощью *функции распределения*. *Функцией распределения* случайной величины ξ называют числовую функцию F_ξ, заданную соотношением

$$F_\xi(x) = P\{\ \xi(\omega) \le x\}.$$

Замечание. Нижний индекс ξ у обозначения F_ξ можно не использовать.

Свойства функции распределения:

- $0 \le F_\xi(x) \le 1$ для всех значений x;
- Функция $F_\xi(x)$ не убывает для всех значений x;
- $\lim\limits_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} F_\xi(x) = 1$;
- $P\{x_1 < \xi \le x_2\} = F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1)$ для любых значений $x_1 < x_2$;
- $\lim\limits_{y\to x+0} F_\xi(y) = F_\xi(x)$.

Замечание. Случайная величина ξ *непрерывна* тогда и только тогда, когда $P\{\xi = x\} = 0$ для всех значений x.

Случайную величину ξ можно задать также с помощью функции $f_\xi(x)$, такой, что

- $f_\xi(x) \ge 0$;
- $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)\,dx = 1$;
- $\int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(y)\,dy = F_\xi(x)$ для всех значений x.

Функцию $f_\xi(x)$, удовлетворяющую перечисленным свойствам, называют *плотностью распределения* случайной величины ξ.

Замечание. Нижний индекс ξ у обозначения f_ξ можно не использовать.

Следствие. Если ξ – непрерывная случайная величина, то

$$\int\limits_a^b f_\xi(x)\,dx = F_\xi(b) - F_\xi(a) = P\{a < \xi < b\}.$$

Следствие. Если плотность $f_\xi(x)$ непрерывна в точке x, то

$$\frac{d}{dx} F_\xi(x) = f_\xi(x).$$

Математическим ожиданием $M\xi$ случайной величины ξ называют число

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi}(x)dx.$$

Как и в дискретном случае, математическое ожидание имеет смысл среднего значения случайной величины.

Дисперсией $D\xi$ случайной величины ξ называют число

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{\xi}(x)dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi}(x)dx\right)^2.$$

Дисперсия характеризует разброс значений случайной величины от ее математического ожидания.

Математическое ожидание и дисперсия непрерывных случайных величин обладают теми же свойствами, как и в случае дискретных случайных величин.

Средним квадратическим отклонением $\sigma(\xi)$ случайной величины ξ называют число

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D\xi}.$$

11. ОСНОВНЫЕ ВИДЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

В данном параграфе описываются важные и распространенные в приложениях распределения непрерывных случайных величин: *равномерное* распределение, *показательное (экспоненциальное)* распределение и *нормальное* (*Гауссовское*) распределение.

- *Равномерное* распределение случайной величины ξ на отрезке $[a, b]$ задается плотностью распределения

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < x < a, \\ \dfrac{1}{b-a} & \text{при } a \le x \le b, \\ 0 & \text{при } b < x < +\infty. \end{cases}$$

Функция распределения

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0 & \text{при } -\infty<x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{при } a\le x\le b,\\ 1 & \text{при } b<x<+\infty.\end{cases}$$

Характеристики: $M\xi=\dfrac{a+b}{2}$, $D\xi=\dfrac{(b-a)^2}{12}$, $\sigma(\xi)=\dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$.

- *Показательное* распределение с параметром λ $(\lambda>0)$ случайной величины ξ задается плотностью распределения

$$f_\xi(x)=\begin{cases}0 & \text{при } -\infty<x<0,\\ \lambda\cdot e^{-\lambda x} & \text{при } 0\le x<+\infty.\end{cases}$$

Функция распределения

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0 & \text{при } -\infty<x<0,\\ 1-e^{-\lambda x} & \text{при } 0\le x<+\infty.\end{cases}$$

Характеристики: $M\xi=\dfrac{1}{\lambda}$, $D\xi=\dfrac{1}{\lambda^2}$, $\sigma(\xi)=\dfrac{1}{\lambda}$.

- *Нормальное* распределение с параметрами a, σ $(\sigma>0)$ случайной величины ξ задается плотностью распределения

$$f_\xi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Функция распределения нормально распределенной случайной величины ξ задается формулой

$$F_\xi(x)=0{,}5+\Phi_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right),$$

где символом $\Phi_0(x)$ обозначена функция, с которой мы уже встречались в пункте 7 данного Модуля.

Характеристики: $M\xi=a$, $D\xi=\sigma^2$, $\sigma(\xi)=\sigma$.

Правило трех сигм для нормального распределения:

$$P\{|\xi| > 3\sigma\} = 0{,}0027.$$

Замечание. Нормальное распределение используется в качестве одного из приближений в схеме Бернулли (см. пункт 7 данного Модуля).

12. СОВМЕСТНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДВУХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН. КОВАРИАЦИЯ И КОЭФФИЦИЕНТ КОРРЕЛЯЦИИ

Предположим, что на вероятностном пространстве Ω заданы две случайных величины ξ_1 и ξ_2. Если рассмотреть эти случайные величины, как компоненты *двумерного случайного вектора* $\bar{\xi}=(\xi_1,\xi_2)$, то вероятность $P\{\bar{\xi}\in D\}$ попадания случайного вектора $\bar{\xi}$ в какую-нибудь область D на плоскости можно вычислить, зная *двумерную плотность* $f_{\bar{\xi}}(x,y)$ (*плотность совместного распределения случайных величин* ξ_1 и ξ_2) по формуле

$$P\{\bar{\xi}\in D\}=\iint_D f_{\bar{\xi}}(x,y)\,dxdy.$$

В случае, когда случайные величины ξ_1 и ξ_2 *независимы,* плотность их совместного распределения является *произведением их плотностей*, т.е.

$$f_{\bar{\xi}}(x,y)=f_{\xi_1}(x)\cdot f_{\xi_2}(y),$$

где через $f_{\xi_1}(x)$ и $f_{\xi_2}(x)$ обозначены плотности случайных величин ξ_1 и ξ_2, соответственно.

Рассмотрим теперь случайную величину $\eta=\xi_1\cdot\xi_2$ (*произведение* случайных величин ξ_1 и ξ_2) и введем следующее важное понятие.

Ковариацией случайных величин ξ_1 и ξ_2 называется число, определяемое по формуле

$$\operatorname{cov}(\xi_1,\xi_2)=M(\xi_1\cdot\xi_2)-M\xi_1\cdot M\xi_2.$$

Ковариация обладает следующими свойствами:

1. $\operatorname{cov}(\xi,\xi)=D\xi$,

2. $\operatorname{cov}(\xi_1,\xi_2)=\operatorname{cov}(\xi_2,\xi_1)$,

3. $\operatorname{cov}(k\xi_1,\xi_2)=k\operatorname{cov}(\xi_2,\xi_1)$, где k – произвольное число.

Коэффициент корреляции $r(\xi_1,\xi_2)$ случайных величин ξ_1 и ξ_2, вычисляемый по формуле

$$r(\xi_1,\xi_2)=\frac{\operatorname{cov}(\xi_1,\xi_2)}{\sqrt{D\xi_1\cdot D\xi_2}},$$

определяет степень зависимости этих случайных величин и обладает следующими свойствами:

1. $|r(\xi_1,\xi_2)|\le 1$;

2. Если случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы, то $r(\xi_1,\xi_2)=0$;

3. Если $\xi_2=a\xi_1+b$, где a и b – произвольные числа, то $|r(\xi_1,\xi_2)|=1$.

Если коэффициент корреляции двух случайных величин равен нулю, то эти случайные величины называются *некоррелированными.*

Замечание. Если случайные величины являются некоррелированными, то они *не обязаны удовлетворять условию независимости*.

13. ПРИМЕРЫ

Пример 13.1. Четыре карточки с буквами «А, А, М, М» хорошо перемешивают и выкладывают в ряд случайным образом. Найти вероятность того, что получится слово «МАМА».

Решение 1. Воспользуемся классическим определением вероятности. Для этого сначала подсчитаем число n всех исходов. Поскольку число всех исходов является числом перестановок из 4-х элементов, то

$$n=P_4=4!=24.$$

Теперь подсчитаем число m благоприятных исходов. При составлении слова «МАМА» первую карточку (буква «М») можно выбрать двумя способами. Вторую карточку (буква «А») также можно выбрать двумя способами. После этого выбора уже не остается. Поэтому число благоприятных исходов

$$m = 2 \cdot 2 = 4.$$

Следовательно,

$$P = \frac{m}{n} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}.$$

Решение 2. Воспользуемся понятием условной вероятности. Для этого введем следующие события A_1, A_2, A_3, A_4:

A_1 – «На первой карточке написана буква М»;

A_2 – «На второй карточке написана буква А»;

A_3 – «На третьей карточке написана буква М»;

A_4 – «На четвертой карточке написана буква А».

В задаче требуется найти вероятность P события $A_1 A_2 A_3 A_4$. Для того чтобы найти эту вероятность, заметим, что

$$P(A_1) = \frac{2}{4}, \quad P(A_2/A_1) = \frac{2}{3}, \quad P(A_3/A_1 A_2) = \frac{1}{2}, \quad P(A_4/A_1 A_2 A_3) = 1.$$

В соответствии со свойствами условной вероятности получаем:

$$P = P(A_1 A_2 A_3 A_4) = P(A_1 A_2 A_3) P(A_4/A_1 A_2 A_3) = P(A_1 A_2) P(A_3/A_1 A_2) P(A_4/A_1 A_2 A_3) =$$
$$= P(A_1) P(A_2/A_1) P(A_3/A_1 A_2) P(A_4/A_1 A_2 A_3) = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

Ответ: $\frac{1}{6}$.

Пример 13.2. Четыре человека, среди которых двое знакомых, случайным образом рассаживаются в ряд, состоящий из шести стульев. Какова вероятность того, что знакомые окажутся сидящими рядом?

Решение. Воспользуемся классическим определением вероятности. Поскольку число всех исходов является числом размещений из 6 элементов по 4 (4 человека рассаживаются на 6 стульев), то

$$n = A_6^4 = \frac{6!}{2!} = 360.$$

Теперь подсчитаем число благоприятных исходов. С этой целью рассмотрим двух знакомых. Для их размещения существует 5 пар стульев, стоящих рядом, причем на каждой из этих пар стульев знакомых можно менять местами. Кроме этого на свободные 4 стула нужно посадить оставшихся двух людей. Следовательно,

$$m = 5 \cdot 2 \cdot A_4^2 = \frac{10 \cdot 4!}{2!} = 120.$$

Таким образом,

$$P = \frac{m}{n} = \frac{120}{360} = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $\frac{1}{3}$.

Пример 13.3. Из группы, состоящей из 4 студенток и 7 студентов, случайным образом отбираются 5 человек. Какова вероятность того, что среди отобранных людей окажется ровно 2 студентки?

Решение. Воспользуемся классическим определением вероятности. Всего в группе 11 человек, а отбираются из них 5 человек, следовательно, число всех исходов

$$n = C_{11}^5.$$

Подсчитаем число благоприятных исходов. Среди отобранных 5 людей должно быть 2-е студентки и 3 студента. Из 4-х студенток группы можно выбрать 2-х студенток при помощи C_4^2 способов, а из 7 студентов группы можно выбрать 3-х студентов при помощи C_7^3 способов. Поэтому число благоприятных исходов

$$m = C_4^2 \cdot C_7^3.$$

Следовательно,

$$P = \frac{m}{n} = \frac{C_4^2 \cdot C_7^3}{C_{11}^5} = \frac{4! \cdot 7! \cdot 5! \cdot 6!}{2! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 11!} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{2 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11} = \frac{5}{11}.$$

Ответ: $\frac{5}{11}$.

Пример 13.4. Из урны, в которой находятся 5 красных, 2 синих и 4 желтых шара, наудачу, *без возвращения в урну* извлекаются:

1. 7 шаров.

Найти вероятность того, что среди этих шаров окажется ровно 3 красных.

2. 2 шара.

Найти вероятность того, что:

а) это будут желтые шары;

б) эти шары будут одного цвета;

в) эти шары будут разного цвета;

г) среди этих шаров будет хотя бы один красный.

3. 3 шара.

Найти вероятность того, что:

а) эти шары будут одного цвета;

б) эти шары будут разных цветов;

в) один шар, взятый из них наудачу, окажется желтым.

4. 2 шара.

Найти вероятность того, что это красные шары, если известно, что шары оказались одного цвета.

Решение.

1. Воспользуемся классическим определением вероятности. Поскольку в урне находятся 11 шаров, а извлечь нужно 7 шаров, то число всех исходов

$$n = C_{11}^{7}.$$

Теперь подсчитаем число благоприятных исходов. Заметим, что для каждого благоприятного исхода нужно выбрать 3 шара из 5 красных шаров и 4 шара из 6 шаров другого цвета. Поэтому

$$m = C_5^3 \cdot C_6^4.$$

Следовательно,

$$P=\frac{m}{n}=\frac{C_5^3\cdot C_6^4}{C_{11}^7}=\frac{5!\cdot 6!\cdot 7!\cdot 4!}{3!\cdot 2!\cdot 4!\cdot 2!\cdot 11!}=\frac{4\cdot 5\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{2\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11}=\frac{5}{11}.$$

Ответ: $\frac{5}{11}$.

2. а) Введем следующие события: $Ж_1$ – «Первый извлеченный шар желтого цвета», $Ж_2$ – «Второй извлеченный шар желтого цвета». В задаче требуется найти вероятность P события $Ж_1Ж_2$.

Для того чтобы найти эту вероятность, заметим, что

$$P(Ж_1)=\frac{4}{11},\ \ P(Ж_2/Ж_1)=\frac{3}{10}.$$

Воспользовавшись формулой для вероятности произведения двух событий, получим:

$$P(Ж_1Ж_2)=P(Ж_1)P(Ж_2/Ж_1)=\frac{4}{11}\cdot\frac{3}{10}=\frac{6}{55}.$$

Ответ: $\frac{6}{55}$.

б) Введем следующие события:

$Ж_1$ – «Первый извлеченный шар желтого цвета»;

$Ж_2$ – «Второй извлеченный шар желтого цвета»;

C_1 – «Первый извлеченный шар синего цвета»;

C_2 – «Второй извлеченный шар синего цвета»;

K_1 – «Первый извлеченный шар красного цвета»;

K_2 – «Второй извлеченный шар красного цвета».

В задаче требуется найти вероятность P события $Ж_1Ж_2+C_1C_2+K_1K_2$.

Для того чтобы найти эту вероятность, заметим, что события $Ж_1Ж_2$, C_1C_2 и K_1K_2 несовместные. Следовательно,

$$P(Ж_1Ж_2+C_1C_2+K_1K_2)=P(Ж_1Ж_2)+P(C_1C_2)+P(K_1K_2).$$

С другой стороны, по формуле для вероятности произведения двух событий

$$P(Ж_1Ж_2)=P(Ж_1)P(Ж_2/Ж_1)=\frac{4}{11}\cdot\frac{3}{10}=\frac{6}{55},$$

$$P(C_1C_2)=P(C_1)P(C_2/C_1)=\frac{2}{11}\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{55},$$

$$P(K_1K_2)=P(K_1)P(K_2/K_1)=\frac{5}{11}\cdot\frac{4}{10}=\frac{10}{55}.$$

Таким образом,

$$P=P(Ж_1Ж_2+C_1C_2+K_1K_2)=\frac{6}{55}+\frac{1}{55}+\frac{10}{55}=\frac{17}{55}.$$

Ответ: $\frac{17}{55}$.

в) Введем событие A – «2 извлеченных шара разного цвета». Противоположным к этому событию будет событие $\overline{A}$ – «2 извлеченных шара одинакового цвета». В соответствии с решением задачи **б)** справедливо соотношение:

$$\overline{A}=Ж_1Ж_2+C_1C_2+K_1K_2.$$

Следовательно,

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-P(Ж_1Ж_2+C_1C_2+K_1K_2)=1-\frac{17}{55}=\frac{38}{55}.$$

Ответ: $\frac{38}{55}$.

г) Введем событие B – «Среди извлеченных 2-х шаров имеется хотя бы один красный». Противоположным к этому событию будет событие $\overline{B}$ – «Цвет 2-х извлеченных шаров отличается от красного». Найдем вероятность события $\overline{B}$. Поскольку из 11 шаров, находящихся в урне, 6 шаров имеют цвет, который отличается от красного, то

$$P(\overline{B})=\frac{6}{11}\cdot\frac{5}{10}=\frac{3}{11}.$$

Следовательно,

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{3}{11}=\frac{8}{11}.$$

Ответ: $\frac{8}{11}$.

3. а) Введем следующие события:

$Ж_1$ – «Первый извлеченный шар желтого цвета»;

$Ж_2$ – «Второй извлеченный шар желтого цвета»;

$Ж_3$ – «Третий извлеченный шар желтого цвета»;

C_1 – «Первый извлеченный шар синего цвета»;

C_2 – «Второй извлеченный шар синего цвета»;

C_3 – «Третий извлеченный шар синего цвета»;

K_1 – «Первый извлеченный шар красного цвета»;

K_2 – «Второй извлеченный шар красного цвета»;

K_3 – «Третий извлеченный шар красного цвета».

Введем теперь событие A – «Все 3 извлеченных шара имеют одинаковый цвет».

В задаче требуется найти вероятность события A.

Для того чтобы найти эту вероятность, заметим, что:

$$A = Ж_1Ж_2Ж_3 + C_1C_2C_3 + K_1K_2K_3.$$

Поскольку события $Ж_1Ж_2Ж_3$, $C_1C_2C_3$ и $K_1K_2K_3$ несовместные, то

$$\begin{aligned} P(A) &= P(Ж_1Ж_2Ж_3 + C_1C_2C_3 + K_1K_2K_3) = \\ &= P(Ж_1Ж_2Ж_3) + P(C_1C_2C_3) + P(K_1K_2K_3) \end{aligned}$$

С другой стороны

$$P(Ж_1Ж_2Ж_3) = \frac{4}{11}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9} = \frac{24}{990},$$

$$P(C_1C_2C_3) = \frac{2}{11}\cdot\frac{1}{10}\cdot 0 = 0,$$

$$P(K_1K_2K_3) = \frac{5}{11}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9} = \frac{60}{990}.$$

Следовательно,

$$P(A) = \frac{24}{990} + 0 + \frac{60}{990} = \frac{84}{990} = \frac{14}{165}.$$

Ответ: $\frac{14}{165}$.

б) Воспользуемся классическим определением вероятности. Поскольку из 11 шаров извлекается 3 шара, то число всех исходов

$$n = C_{11}^3.$$

Найдем число благоприятных исходов. В каждом благоприятном исходе красный шар можно выбрать 5 способами, синий шар – 2 способами, а желтый шар – 4 способами. Поэтому

$$m = 5 \cdot 2 \cdot 4.$$

Следовательно, искомая вероятность

$$P = \frac{m}{n} = \frac{5 \cdot 2 \cdot 4}{C_{11}^3} = \frac{5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3! \cdot 8!}{11!} = \frac{5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}{9 \cdot 10 \cdot 11} = \frac{8}{33}.$$

Ответ: $\frac{8}{33}$.

в) Решим задачу с помощью формулы полной вероятности.

Для этого введем событие A и гипотезы H_1, H_2, H_3, H_4:

A – «Среди извлеченных 3-х шаров оказался желтый шар»;

H_1 – «Все 3 извлеченных из урны шара оказались желтыми»;

H_2 – «Среди извлеченных 3-х шаров оказалось 2 желтых шара и 1 шар другого цвета»;

H_3 – «Среди извлеченных 3-х шаров оказался 1 желтый шар и 2 шара другого цвета»;

H_4 – «Среди извлеченных 3-х шаров нет желтых шаров».

Теперь необходимо найти вероятности гипотез, а также вероятности события A при условии каждой из гипотез.

Поскольку до извлечения шаров в урне находилось 11 шаров (4 желтых шара и 7 шаров другого цвета), то, с помощью классического определения вероятности, получаем:

$$P(H_1)=\frac{C_4^3}{C_{11}^3}=\frac{4}{11}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}=\frac{4}{165},\quad P(A/H_1)=1,$$

$$P(H_2)=\frac{C_4^2\cdot C_7^1}{C_{11}^3}=\frac{4}{11}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9}\cdot 3=\frac{42}{165},\quad P(A/H_2)=\frac{2}{3},$$

$$P(H_3)=\frac{C_4^1\cdot C_7^2}{C_{11}^3}=\frac{4}{11}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot 3=\frac{84}{165},\quad P(A/H_3)=\frac{1}{3},$$

$$P(H_4)=\frac{C_7^3}{C_{11}^3}=\frac{7}{11}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}=\frac{35}{165},\quad P(A/H_4)=0.$$

На всякий случай проверим, что сумма вероятностей гипотез равна 1 (гипотезы должны образовывать полную группу событий):

$$\sum_{i=1}^{4}P(H_i)=\frac{4+42+84+35}{165}=1.$$

Таким образом, гипотезы действительно образуют полную группу, и можно воспользоваться формулой полной вероятности:

$$P(A)=\sum P(H_i)\cdot P(A/H_i)=\frac{4}{165}\cdot 1+\frac{42}{165}\cdot\frac{2}{3}+\frac{84}{165}\cdot\frac{1}{3}+\frac{35}{165}\cdot 0=\frac{4+28+28}{165}=\frac{60}{165}=\frac{4}{11}.$$

Ответ: $\frac{4}{11}$.

4. Введем следующие события:

$Ж_1$ – «Первый извлеченный шар желтого цвета»;

$Ж_2$ – «Второй извлеченный шар желтого цвета»;

C_1 – «Первый извлеченный шар синего цвета»;

C_2 – «Второй извлеченный шар синего цвета»;

K_1 – «Первый извлеченный шар красного цвета»;

K_2 – «Второй извлеченный шар красного цвета»;

A – «Оба извлеченных шара имеют одинаковый цвет»;

B – «Оба извлеченных шара красного цвета».

Учитывая несовместность событий K_1K_2, $Ж_1Ж_2$ и C_1C_2, а также применяя теорему о вероятности произведения двух событий, находим вероятность события A

$$P(A) = P(K_1K_2 + Ж_1Ж_2 + C_1C_2) = P(K_1K_2) + P(Ж_1Ж_2) + P(C_1C_2) =$$

$$= P(K_1)\cdot P(K_2/K_1) + P(Ж_1)\cdot P(Ж_2/Ж_1) + P(C_1)\cdot P(C_2/C_1) =$$

$$= \frac{5}{11}\cdot\frac{4}{10} + \frac{4}{11}\cdot\frac{5}{10} + \frac{2}{11}\cdot\frac{1}{10} = \frac{20}{110} + \frac{2}{110} + \frac{12}{110} = \frac{34}{110} = \frac{17}{55}.$$

В задаче требуется найти вероятность $P(B/A)$. Прежде всего заметим, что

$$P(A/B) = 1\,.$$

Тогда по теореме о вероятности произведения двух событий получим

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B)\cdot P(A/B)}{P(A)} = \frac{P(K_1K_2)\cdot P(A/B)}{P(A)} = \frac{\frac{20}{110}\cdot 1}{\frac{34}{110}} = \frac{10}{17}.$$

Ответ: $\frac{10}{17}$.

Пример 13.5. В урне находятся 5 красных и 8 синих шаров. Один шар наудачу извлекается из урны и *возвращается в неё* 4 раза. Найти вероятность того, что при извлечении:

а) красный шар появится ровно 3 раза;

б) красный шар появится не менее 2-х раз.

Решение. Поскольку перед каждым извлечением одного шара из урны в ней находятся 13 шаров, из которых 5 красных, то вероятность каждого извлечения красного шара $p = 5/13$.

Таким образом, для решения задачи можно воспользоваться схемой независимых испытаний Бернулли.

Тогда в случае **а)** получаем:

$$P_4(3) = C_4^3\cdot p^3\cdot(1-p) = \frac{4!}{3!\,\cdot\,1!}\cdot\left(\frac{5}{13}\right)^3\cdot\frac{8}{13} = \frac{4000}{28561} \approx 0{,}14.$$

Ответ: $0{,}14$.

В случае **б)**:

$$P_4(k \ge 2) = P_4(2) + P_4(3) + P_4(4) = 1 - P_4(k < 2) = 1 - P_4(0) - P_4(1) =$$
$$= 1 - C_4^0 \cdot p^0 \cdot (1-p)^4 - C_4^1 \cdot p \cdot (1-p)^3 \approx 1 - (0{,}62)^4 - 4 \cdot 0{,}38 \cdot (0{,}62)^3 = 0{,}49.$$

Ответ: $0{,}49$.

Пример 13.6. Из урны, содержащей 15 шаров (7 синих и 8 желтых), наудачу извлекаются 4 шара. Рассматривается случайная величина ξ, значения которой равны количеству синих шаров, оказавшихся среди извлеченных шаров.

Построить закон распределения этой случайной величины и найти её математическое ожидание.

Решение. Случайной величины ξ принимает значения $0, 1, 2, 3, 4$. Найдем вероятности, с которыми принимаются эти значения:

$$p_0 = P(\xi{=}0) = \frac{C_8^4}{C_{15}^4} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15} = \frac{10}{195},$$

$$p_1 = P(\xi{=}1) = \frac{C_7^1 \cdot C_8^3}{C_{15}^4} = \frac{7 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15} = \frac{56}{195},$$

$$p_2 = P(\xi{=}2) = \frac{C_7^2 \cdot C_8^2}{C_{15}^4} = \frac{84}{195},$$

$$p_3 = P(\xi{=}3) = \frac{C_7^3 \cdot C_8^1}{C_{15}^4} = \frac{40}{195},$$

$$p_4 = P(\xi{=}4) = \frac{C_7^4}{C_{15}^4} = \frac{5}{195}.$$

Для проверки правильности вычислений найдем сумму этих вероятностей:

$$\sum_{k=0}^{4} p_k = \frac{10 + 56 + 84 + 40 + 5}{195} = \frac{195}{195} = 1.$$

Таким образом, в вычислениях вероятностей ошибок нет, и мы можем построить закон распределения:

x_k	0	1	2	3	4
p_k	$\frac{10}{195}$	$\frac{56}{195}$	$\frac{84}{195}$	$\frac{40}{195}$	$\frac{5}{195}$

Теперь можно найти математическое ожидание случайной величины:

$$M\xi = \sum_{k=0}^{4} x_k p_k = \frac{0\cdot 10 + 1\cdot 56 + 2\cdot 84 + 3\cdot 40 + 4\cdot 5}{195} = \frac{364}{195}.$$

Пример 13.7. Дискретная случайная величина X, математическое ожидание которой $M(X) = 3{,}7$, распределена по закону

x_k	-6	-1	2	5	10
p_k	0,1	p_2	0,2	p_4	0,2

Требуется:

а) найти p_2 и p_4;

б) построить график функции распределения $y = F(x)$;

в) вычислить дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Решение.

а) Воспользовавшись условиями

$$\sum_{i=1}^{5} p_i = 1, \quad MX = \sum_{i=1}^{5} x_i p_i = 3{,}7,$$

составим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 0{,}1 + p_2 + 0{,}2 + p_4 + 0.2 = 1, \\ -6\cdot 0{,}1 - 1\cdot p_2 + 2\cdot 0{,}2 + 5\cdot p_4 + 10\cdot 0{,}2 = 3{,}7. \end{cases}$$

Далее получаем

$$\begin{cases} p_2 + p_4 = 0{,}5 \\ -p_2 + 5p_4 = 1{,}9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_2 + p_4 = 0{,}5 \\ 6p_4 = 2{,}4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_2 = 0{,}1 \\ p_4 = 0{,}4 \end{cases}.$$

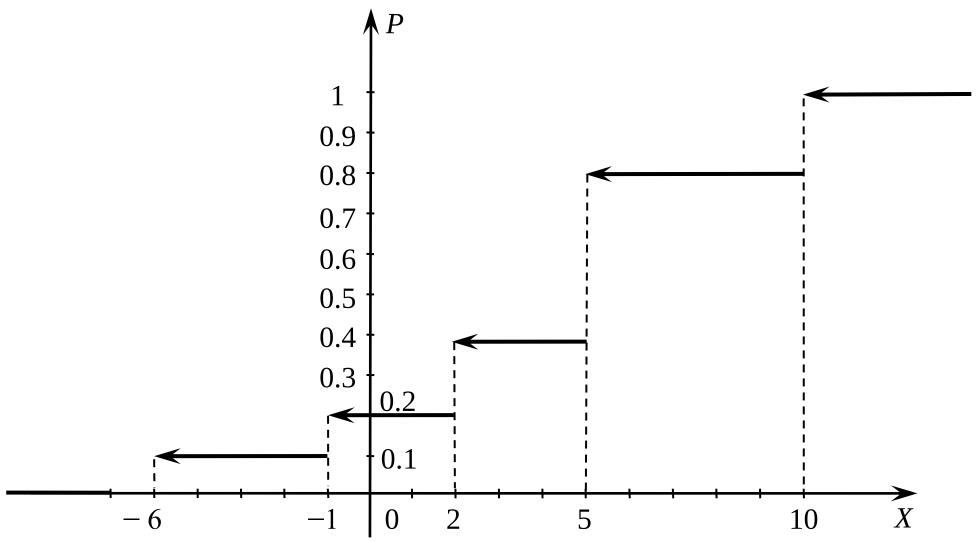
б) Построим график функции распределения случайной величины, воспользовавшись свойством

$$F(x) = F(a) + P(a \le X < x).$$

В результате возникает таблица:

при $-\infty < x \le -6$	$F(x) = 0;$
при $-6 < x \le -1$	$F(x) = F(-6) + P(-6 \le X < -1) = 0 + P(X = -6) = 0{,}1;$
при $-1 < x \le 2$	$F(x) = F(-1) + P(-1 \le X < 2) = 0{,}1 + P(X = -1) = 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}2;$
при $2 < x \le 5$	$F(x) = F(2) + P(2 \le X < 5) = 0{,}2 + P(X = 2) = 0{,}2 + 0{,}2 = 0{,}4;$
при $5 < x \le 10$	$F(x) = F(5) + P(5 \le X < 10) = 0{,}4 + P(X = 5) = 0{,}4 + 0{,}4 = 0{,}8;$
при $10 < x \le +\infty$	$F(x) = F(10) + P(10 \le X < +\infty) = 0{,}8 + P(X = 10) = 0{,}8 + 0{,}2 = 1,$

и искомый график имеет следующий вид:



в) Вычислим дисперсию случайной величины по формуле

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X).$$

Для этого сначала вычислим $M(X^2)$:

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 p_i = 36 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}2 + 25 \cdot 0{,}4 + 100 \cdot 0{,}2 = 34{,}5.$$

По условию задачи $M(X) = 3.7$, следовательно,

$$D(X) = 34{,}5 - (3{,}7)^2 = 34{,}5 - 13{,}69 = 20{,}81,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{20{,}81} = 4{,}56\,.$$

Пример 13.8. Плотность распределения случайной величины имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad -\infty < x < 0, \\ k \cdot (6 - x) \ \text{при} \quad 0 \le x \le 6, \\ 0 \quad \text{при} \quad 6 < x < +\infty. \end{cases}$$

Найти:

а) параметр k;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$;

г) вероятность события $2 < X < 5$.

Решение. а) Воспользовавшись свойствами плотности распределения, получим:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 = k\int\limits_{0}^{6}(6 - x)dx = k\left(6x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^6 = 18k\,.$$

Следовательно, $k = \dfrac{1}{18}$, причем

$$f(x) = \begin{cases} 0\,, & -\infty < x < 0, \\ \dfrac{6 - x}{18}, & 0 \le x \le 6, \\ 0\,, & 6 < x < +\infty. \end{cases} \quad .$$

б) Построим график функции распределения $F(x)$, воспользовавшись свойством

$$F(x) = F(a) + P(a \le X < x) = F(a) + \int\limits_a^x f(x)dx\,.$$

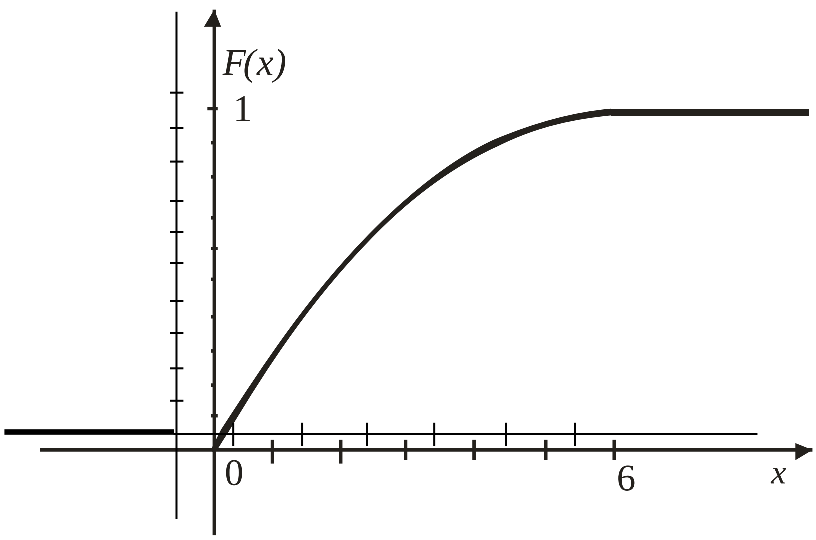
В результате возникает таблица:

при $-\infty < x \le 0$	$F(x) = 0$,
при $0 < x \le 6$	$F(x) = F(0) + \int\limits_0^x f(x)dx = 0 + \int\limits_0^x \frac{6-x}{18}dx =$ $= -\frac{1}{18}\int\limits_0^x (6-x)d(6-x) = -\frac{(6-x)^2}{36}\Bigg\vert_0^x = -\frac{(6-x)^2}{36} + 1$,
при $6 < x < +\infty$	$F(x) = F(6) + \int\limits_6^x f(x)dx = 1 + \int\limits_6^x 0dx = 1$.

Следовательно,

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ -\infty < x < 0, \\ 1 - \dfrac{(6-x)^2}{36}, \ 0 \le x \le 6, \\ 1, \ 6 < x < +\infty. \end{cases}$$

а график функции распределения имеет вид:



в) Вычислим математическое ожидание и дисперсию:

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x) = \int\limits_0^6 x \cdot \frac{6-x}{18}dx = \frac{1}{18}\int\limits_0^6 (6x - x^2)dx = \left(\frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{54}\right)\Bigg\vert_0^6 = 6 - \frac{216}{54} = 6 - 4 = 2,$$

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)dx-M^2(X)=\int\limits_0^6 x^2\cdot\frac{6-x}{18}dx-4=$$

$$=\frac{1}{18}\int\limits_0^6(6x^2-x^3)dx=\left(\frac{x^3}{9}-\frac{x^4}{72}\right)\Bigg|_0^6=24-\frac{1296}{72}=24-18=6.$$

г) Найдем вероятность события $2<X<5$:

$$P(2<X<5)=F(5)-F(2)=\left(1-\frac{1}{36}\right)-\left(1-\frac{16}{36}\right)=-\frac{1}{36}+\frac{16}{36}=\frac{15}{36}.$$

Пример 13.9. На запуск двигателя тратится в среднем 2,5 попытки. Считая, что вероятность запуска двигателя в каждой попытке одинакова, найти вероятность запуска двигателя не более, чем за 3 попытки.

Решение. Пусть случайная величина X равна числу попыток запуска двигателя. Тогда X может принимать значения 1, 2,…. с вероятностями

$$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p,$$

где p – вероятность запуска двигателя в каждой попытке.

Случайная величина X имеет геометрическое распределение с параметром p, причем

$$M(X)=\frac{1}{p}=2{,}5.$$

Следовательно,

$$p=0{,}4;\quad q=1-p=0{,}6.$$

Далее получаем

$$P(X\le 3)=P(1)+P(2)+P(3)=p\cdot q^0+p\cdot q+p\cdot q^2=p(1+q+q^2)=$$
$$=0{,}4\cdot(1+0{,}6+0{,}36)=0{,}784.$$

Пример 13.10. Случайная величина X имеет биномиальное распределение с математическим ожиданием $M(X)=2{,}4$ и дисперсией $D(X)=0{,}96$. Найти вероятность события $X<3$.

Решение. Поскольку у биномиального распределения

$$M(X) = np\,,\; D(X) = npq\,,$$

то возникает система уравнений:

$$\begin{cases} np = 2{,}4 \\ npq = 0{,}96 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = \dfrac{0{,}96}{2{,}4} = 0{,}4 = \dfrac{2}{5} \\ p = 1 - q = 1 - 0{,}4 = 0{,}6 = \dfrac{3}{5} \\ n = \dfrac{2{,}4}{p} = \dfrac{2{,}4}{0{,}6} = 4 \end{cases}.$$

Искомую вероятность $P(X < 3)$ находим с помощью формулы Бернулли:

$$P(X<3) = P_4(k<3) = 1 - P_4(k \ge 3) =$$
$$= 1 - P_4(3) - P_4(4) = 1 - C_4^3 p^3 q - C_4^4 p^4 q^0 =$$
$$= 1 - 4\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot \frac{2}{5} - \left(\frac{3}{5}\right)^4 = 1 - \frac{216}{625} - \frac{81}{625} = \frac{328}{625} = 0{,}5248.$$

Пример 13.11. Для случайной величины *X*, имеющей распределение Пуассона, вероятность события $X = 0$ равна 0,4. Найти вероятность события $X > 2$.

Решение. Поскольку

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

то

$$P(X=0) = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} = 0{,}4 \Leftrightarrow -\lambda = \ln(0{,}4) \Leftrightarrow \lambda = 0{,}92\,.$$

Поэтому

$$P(X>2) = P(k>2) = 1 - P(k \le 2) = 1 - (P(0) + P(1) + P(2)) =$$

$$= 1 - \left(\frac{(0{,}92)^0}{0!} e^{-0{,}92} + \frac{0{,}92}{1!} e^{-0{,}92} + \frac{(0{,}92)^2}{2!} e^{-0{,}92} \right) =$$
$$= 1 - (1 + 0{,}92 + 0{,}42)\cdot e^{-0{,}92} = 1 - 2{,}34 \cdot 0.4 = 0{,}06.$$

Пример 13.12. Случайная величина *X* равномерно распределена в интервале $(a,\, b)$, причем $a = 3$ и $M(X) = 2\sqrt{3}\cdot\sigma(X)$. Найти вероятность события $X < 7$.

Решение. Для равномерного распределения в интервале $(a,\ b)$ математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение имеют следующий вид:

$$M(X)=\frac{a+b}{2},\quad \sigma(X)=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Далее получаем:

$$\frac{3+b}{2}=2\sqrt{3}\cdot\frac{b-3}{2\sqrt{3}} \Rightarrow 3+b=2b-6,\quad b=9.$$

Таким образом, рассматриваемый интервал – это интервал $(3,\ 9)$, а функция распределения имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<3,\\ \dfrac{x-3}{6}, & 3\le x\le 9,\\ 1, & x>9.\end{cases}$$

Поэтому

$$P(X<7)=P(-\infty<X<7)=F(7)-F(-\infty)=\frac{7-3}{6}-0=\frac{2}{3}=0{,}67.$$

Пример 13.13. Случайная величина X имеет показательное распределение, причем $2M(X)=D(X)$. Найти вероятность события $2<X<4$.

Решение. С помощью формул

$$M(X)=\frac{1}{\lambda}\quad \text{и}\quad D(X)=\frac{1}{\lambda^2}$$

из соотношения $2M(X)=D(X)$ получаем:

$$\frac{2}{\lambda}=\frac{1}{\lambda^2}\Leftrightarrow 2=\frac{1}{\lambda}\Leftrightarrow \lambda=0{,}5.$$

Следовательно, функция распределения имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-e^{-0.5x}, & x\ge 0.\end{cases}$$

Поэтому

$$P(2<x<4)=F(4)-F(2)=(1-e^{-2})-(1-e^{-1})=e^{-1}-e^{-2}=0,37-0,14=0,23.$$

Пример 13.14. Методами статистики установлено, что рост призывников в ряды вооруженных сил имеет нормальное распределение с параметрами $a=171,3$, $\sigma=13,2$. Третий рост призывников соответствует интервалу (167 см, 173 см). Найти ожидаемое число призывников третьего роста из 1000 человек.

Решение. Воспользовавшись формулой

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi_0\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi_0\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),$$

а также таблицей значений функции Лапласа

$$\Phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt,$$

получим

$$P(167<X<173)=\Phi_0\left(\frac{173-171,3}{13,2}\right)-\Phi_0\left(\frac{167-171,3}{13,2}\right)=$$
$$=\Phi_0(0,13)+\Phi_0(0,33)=0,0517+0,1293=0,181.$$

Тогда ожидаемое число призывников третьего роста

$$n=1000\cdot P(167<X<173)=1000\cdot 0,181=181.$$

Ответ: 181 человек.

14. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ТАБЛИЦЫ

Т а б л и ц а 14.1. Значения функции Лапласа $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-t^2/2}\, dt$

x	Сотые доли									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	03133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	04946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	04985	0,4985	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990

Т а б л и ц а 14.2. Значения функции u_α**, определяемой равенством**

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{u_\alpha}^{+\infty} e^{-t^2/2}\, dt$$

α	0,001	0,005	0,010	0,015	0,020	0,025	0,030	0,035	0,040	0,045	0,050
u_α	3,0902	2,5758	2,3263	2,1701	2,0537	1,9600	1,8808	1,8119	1,7507	1,6954	1,6449

Т а б л и ц а 14.3. Значения функции $p_k(\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

k \ λ	**0,1**	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**
0	0,90484	0,81873	0,74082	0,67032	0,60653	0,54881	0,49659	0,44933	0,40657
1	0,09048	0,16375	0,22225	0,26813	0,30327	0,32929	0,34761	0,35946	0,36591
2	0,00452	0,01638	0,03334	0,05363	0,07582	0,09879	0,12166	0,14379	0,16466
3	0,00015	0,00109	0,00333	0,00715	0,01264	0,01976	0,02839	0,03834	0,04940
4		0,00006	0,00025	0,00072	0,00158	0,00296	0,00497	0,00767	0,01112
5			0,00002	0,00006	0,00016	0,00036	0,00070	0,00123	0,00200
6					0,00001	0,0004	0,00008	0,00016	0,00030
7							0,00001	0,00002	0,00004

k \ λ	**1,0**	**2,0**	**3,0**	**4,0**	**5,0**
0	0,36788	0,13534	0,04979	0,01832	0,00674
1	0,36788	0,27067	0,14936	0,07326	0,03369
2	0,18394	0,27067	0,22404	0,14653	0,08422
3	0,06131	0,18045	0,22404	0,19537	0,14037
4	0,01533	0,09022	0,16803	0,19537	0,17547
5	0,00307	0,03609	0,10082	0,15629	0,17547
6	0,00051	0,01203	0,05041	0,10419	0,14622
7	0,00007	0,00344	0,02160	0,05954	0,10445
8	0,00001	0,00086	0,00810	0,02977	0,06528
9		0,00019	0,00270	0,01323	0,03627
10		0,00004	0,00081	0,00529	0,01813
11		0,00001	0,00022	0,00193	0,00824
12			0,00006	0,00064	0,00343
13			0,00001	0,00020	0,00132
14				0,00006	0,00047
15				0,00002	0,00016
16					0,00005
17					0,00001

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Операции над случайными событиями;
2. Классическое определение вероятности;
3. Геометрическое определение вероятности;
4. Теорема о вероятности суммы двух событий;
5. Условная вероятность, независимость событий;
6. Формула полной вероятности;
7. Формула Байеса;
8. Закон распределения дискретной случайной величины;
9. Функция распределения и плотность непрерывной случайной величины;
10. Числовые характеристики случайных величин и их свойства;
11. Основные законы распределения дискретных случайных величин;
12. Основные распределения непрерывных случайных величин;
13. Совместное распределение двух случайных величин, ковариация и коэффициент корреляции;

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. На книжной полке в случайном порядке стоят 20 книг, из которых 7 – детективы. Найти вероятность того, что все детективы стоят рядом.
2. В равносторонний треугольник со стороной 1 наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что эта точка попала внутрь вписанного в треугольник круга.
3. Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0,8, а вторым – 0,9. Найти вероятность поражения цели при одновременном выстреле обоих стрелков.
4. Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0,8, а вторым – 0,9. Выстрел производится стрелком, выбранным наугад. Найти вероятность того, что цель будет поражена.
5. Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0,8, а вторым – 0,9. Выстрел производится стрелком, выбранным наугад. Найти вероятность того, что стрелял первый стрелок, если цель поражена.
6. Устройство состоит из 4 элементов, каждый из которых во время работы может выйти из строя с вероятностью 0,2. Считая, что элементы выходят из строя независимо друг от друга, найти вероятность того, что во время работы устройства отказали ровно 2 элемента.
7. Дискретная случайная величина ξ распределена по следующему закону:

x_i	1,3	1,8	2,3	2,8
p_i	0,1	0,5	0,2	0,2

   Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ.

8. Функция распределения непрерывной случайной величины ξ имеет вид

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < x \le 1, \\ \dfrac{x^2-1}{15} & \text{при } 1 < x \le 4, \\ 1 & \text{при } 4 < x < +\infty. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$ случайной величины ξ и построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

9. Для случайной величины ξ, описанной в задаче 8, найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

10. Совместное распределение случайных величин ξ_1, ξ_2 задано формулами

$$P\{\xi_1=-1,\xi_2=-1\}=P\{\xi_1=1,\xi_2=1\}=\frac{1}{8}, \quad P\{\xi_1=-1,\xi_2=0\}=\frac{1}{12},$$
$$P\{\xi_1=-1,\xi_2=1\}=\frac{7}{24}, \quad P\{\xi_1=1,\xi_2=-1\}=\frac{5}{24}, \quad P\{\xi_1=1,\xi_2=0\}=\frac{1}{6}.$$

Найти ковариацию и коэффициент корреляции случайных величин ξ_1 и ξ_2.

ЛИТЕРАТУРА

Основная:

1. Бочаров П.П., Печинкин А.В. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие. – М.: Физматлит, 2005.
2. Кибзун А.И., Горяинова Е.Р., Наумов А.В., Сиротин А.Н. Теория вероятностей и математическая статистика. Базовый курс с примерами и задачами: Учебное пособие. – М.: Физматлит, 2002.
3. Колемаев В.А., Калинина В.Н. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник. – М.: ИНФРА-М, 2002.
4. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций./Под ред. Свешникова А.А. – СПб.: Издательство «Лань», 2006.

Дополнительная:

5. Бородин А.Н. Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики. – СПб.: Издательство «Лань», 2006.
6. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебник. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001.
7. Общий курс высшей математики для экономистов. Учебник. / Под ред. В.И.Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2001.
8. Сборник задач по высшей математике для экономистов: Учебное пособие. / Под ред. В.И.Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2004.
9. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. – СПб.: Издательство «Лань», 2006.