Доктор физико-математических наук, профессор

К. Л. САМАРОВ

МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие по разделу

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

СОДЕРЖАНИЕ

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

1. Классификация систем массового обслуживания

В каждую *систему массового обслуживания* (СМО) поступает *входящий поток заявок* на обслуживание. Результатом работы СМО является *выходящий поток* обслуженных заявок.

- *Потоком событий* называется последовательность однородных событий, происходящих в какие-то, вообще говоря, *случайные* моменты времени.
- Если в СМО *одновременно* может обслуживаться несколько заявок, то СМО называется *многоканальной*, в противном случае СМО называется *одноканальной.*
- Как одноканальные СМО, так и многоканальные СМО делятся на СМО *с отказами и* СМО *с очередью (ожиданием)*.
- В СМО *с отказами* заявка, поступившая в момент, когда все каналы обслуживания заняты, получает «отказ» в обслуживании и покидает СМО.
- В СМО *с очередью* заявка, поступившая в момент, когда все каналы обслуживания заняты, становится в очередь из заявок, ожидающих обслуживания. Как только один из каналов обслуживания освобождается, к обслуживанию принимается *одна из заявок*, стоящих в очереди.
- СМО *с очередью* различаются по *принципу построения* (*дисциплине*) очереди.
- Принципом построения очереди называется схема, в соответствии с которой заявки из очереди *выбираются* на обслуживание. Чаще всего при этом используется:

1. *Случайный* выбор заявки из очереди;
2. Выбор заявки из очереди в зависимости от её *приоритета*;
3. Выбор заявки в зависимости от *порядка* её поступления в очередь.

В третьем случае заявки из очереди могут обслуживаться, как по схеме: «Первым пришел – первым обслуживаешься», так и по схеме: «Последним пришел – первым обслуживаешься».

- СМО *с очередью* делятся также на СМО с *неограниченным ожиданием* и СМО с *ограниченным ожиданием*.
- В СМО *с неограниченным ожиданием* каждая заявка, поступившая в СМО, рано или поздно будет обслужена.
- В СМО *с ограниченным ожиданием* на пребывание заявок в очереди накладываются различного рода ограничения. Эти ограничения могут касаться, например, *длины очереди, времени пребывания заявки в очереди, общего времени пребывания заявки в СМО* и т.п. В частности, в СМО с ограниченным временем пребывания в очереди, заявка, израсходовавшая лимит времени пребывания в очереди, покидает СМО.

2. Простейший поток событий и его свойства

Поток событий называется *простейшим потоком событий*, если он обладает следующими свойствами *стационарности*, *отсутствия последействия* и *ординарности*:

1. Поток событий называется *стационарным*, если вероятность появления одного или нескольких событий на *участке времени длины* T зависит только от длины T этого участка и не зависит от того, в каком месте оси времени этот участок располагается.
2. Поток событий называется потоком *с отсутствием последействия* (*без последействия*), если события, составляющие поток, появляются в случайные моменты времени *независимо друг от друга*.
3. Поток событий называется *ординарным,* если события, составляющие поток, *происходят поодиночке*, а не парами, тройками и т.д.

Замечание. Поток, в котором события происходят через *равные* промежутки времени, *не является простейшим потоком событий*!

- *Интенсивностью* (*плотностью*) потока событий называется среднее число событий, происходящих в единицу времени.

Замечание. Простейший поток событий обладает *постоянной интенсивностью*.

Замечание. В дальнейшем изложении будем предполагать, что все потоки событий *являются простейшими потоками*, не оговаривая этого особо.

Простейший поток событий близко связан с *распределением Пуассона* (см. Модуль 7). Действительно, справедливо следующее

Утверждение 1. Вероятность того, что на отрезке времени длины T произойдет ровно k событий из простейшего потока с интенсивностью λ, выражается формулой Пуассона

$$P_k = \frac{(\lambda T)^k}{k!} e^{-\lambda T}, k = 0,1,\ldots .$$

Утверждение 2. Длина отрезка времени между последовательными событиями из простейшего потока событий с интенсивностью λ является случайной величиной, распределенной по *показательному (экспоненциальному)* закону с параметром λ (см. Модуль 7).

Замечание. Напомним, что плотность показательного распределения определяется по формуле

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < t < 0, \\ \lambda \cdot e^{-\lambda t} & \text{при } 0 \le t < +\infty. \end{cases}$$

3. Показатели эффективности СМО

Рассмотрим сначала СМО *с отказами*.

Важнейшими показателями эффективности СМО с отказами являются следующие параметры:

1. *Абсолютная пропускная способность* системы;
2. *Относительная пропускная способность* системы.

- *Абсолютной пропускной способностью* СМО называется среднее число заявок, которое может обслужить система за единицу времени.

- *Относительной пропускной способностью* СМО называется средняя доля поступивших заявок, обслуживаемая системой, т.е. отношение среднего числа заявок, которое может обслужить система за единицу времени, к среднему числу заявок, поступивших в систему за это время.

В некоторых практических задачах используются и другие показатели эффективности СМО с отказами, например, *среднее число занятых каналов, среднее относительное время простоя системы, среднее относительное время простоя отдельного канала и т.п.*

Перейдем теперь к СМО *с ожиданием*.

В качестве показателей эффективности СМО *с неограниченным ожиданием* применяются следующие параметры:

1. *Среднее число заявок в очереди;*
2. *Среднее число обслуживаемых заявок;*
3. *Среднее время ожидания заявки в очереди;*
4. *Среднее время обслуживания заявки.*

Поскольку в СМО *с неограниченным ожиданием* каждая заявка, в конце концов, обслуживается, то для таких систем *абсолютная пропускная способность* совпадает *с интенсивностью входящего потока заявок.*

У СМО *с ограниченным ожиданием* в качестве показателей эффективности используются как показатели эффективности СМО с отказами, так и показатели эффективности СМО с неограниченным ожиданием.

При исследовании многоканальных систем в дополнение к перечисленным выше показателям эффективности используются параметры, описывающие каждый из каналов.

4. Расчет показателей эффективности одноканальной СМО с отказами

Список используемых терминов и обозначений

№	Термин	Обозначение
1	Интенсивность входящего потока заявок	λ

2	Интенсивность выходящего потока обслуженных заявок	μ
3	Приведенная интенсивность потока заявок	ρ
4	Среднее время обслуживания заявки	$\bar{t}_{\text{serv}}$
5	Относительная пропускная способность СМО	q
6	Абсолютная пропускная способность СМО	A
7	Вероятность того, что заявка будет обслужена	P_{serv}
8	Вероятность того, что заявка получит отказ	P_{otk}

Постановка задачи

Параметры λ и μ известны.

Требуется найти $\bar{t}_{\text{serv}}$, ρ, q, A, P_{serv}, P_{otk}.

Формулы для расчетов

В теории массового обслуживания доказывается, что показатели эффективности одноканальной СМО с отказами вычисляются по следующим формулам:

$$\bar{t}_{\text{serv}} = \frac{1}{\mu}, \tag{4.1}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}, \tag{4.2}$$

$$q = \frac{1}{\rho + 1}, \tag{4.3}$$

$$A = \lambda q, \tag{4.4}$$

$$P_{\text{serv}} = q, \tag{4.5}$$

$$P_{\text{otk}} = 1 - P_{\text{serv}}. \tag{4.6}$$

5. Расчет показателей эффективности многоканальной СМО с отказами

Список используемых терминов и обозначений

№	Термин	Обозначение
1	Число каналов обслуживания	$n \ (n > 1)$
2	Интенсивность входящего потока заявок	λ
3	Интенсивность потока обслуженных заявок, выходящего *из одного канала*	μ

4	Приведенная интенсивность потока заявок	ρ
5	Вероятность того, что занято 0, 1, …, n каналов, соответственно	$p_0, p_1, ..., p_n$
6	Относительная пропускная способность СМО	q
7	Абсолютная пропускная способность СМО	A
8	Вероятность того, что заявка будет обслужена	P_{serv}
9	Вероятность того, что заявка получит отказ	P_{otk}
10	Среднее число занятых каналов	$\bar{k}$

Постановка задачи

Параметры n, λ и μ известны.

Требуется найти ρ, $p_0, p_1, ..., p_n$, P_{otk}, q, A, P_{serv}, $\bar{k}$.

Формулы для расчетов

Приведенная интенсивность потока заявок вычисляется по формуле

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}. \tag{5.1}$$

Вероятности $p_0, p_1, ..., p_n$ вычисляются по *формулам Эрланга*:

$$\begin{cases} p_0 = \left(\sum\limits_{k=0}^{k=n} \dfrac{\rho^k}{k!} \right)^{-1}, \\ p_k = \dfrac{\rho^k}{k!} \cdot p_0, \ k = 1, 2, ..., n. \end{cases} \tag{5.2}$$

Поскольку заявка получает отказ, если все каналы обслуживания заняты, то

$$P_{\text{otk}} = p_n = \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0 . \tag{5.3}$$

Кроме того,

$$q = 1 - P_{\text{otk}} = 1 - \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0 , \tag{5.4}$$

$$A = \lambda q = \lambda \left(1 - \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0 \right), \tag{5.5}$$

$$P_{\text{serv}} = 1 - P_{\text{otk}} = q , \tag{5.6}$$

$$\bar{k} = \frac{A}{\mu} = \rho \cdot \left(1 - \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0\right). \qquad (5.7)$$

6. Расчет показателей эффективности одноканальной СМО с ограниченной очередью

Список используемых терминов и обозначений

№	Термин	Обозначение
1	Длина очереди	$m \ (m > 0)$
2	Интенсивность входящего потока заявок	λ
3	Интенсивность выходящего потока обслуженных заявок	μ
4	Приведенная интенсивность потока заявок	ρ
5	Вероятность того, что СМО свободна и может обслужить заявку	p_0
6	Вероятность того, что СМО занята, а в очереди нет заявок	p_1
7	Вероятности того, что СМО занята, а в очереди находятся $1, 2, ..., m$ заявок, соответственно	$p_2, ..., p_{m+1}$
8	Относительная пропускная способность СМО	q
9	Абсолютная пропускная способность СМО	A
10	Вероятность того, что заявка будет обслужена	P_{serv}
11	Вероятность того, что заявка получит отказ	P_{otk}
12	Среднее число заявок, стоящих в очереди	$\bar{r}$
13	Среднее число заявок в СМО (обслуживаемых и стоящих в очереди)	$\bar{k}$
14	Среднее время ожидания заявки в очереди	$\bar{t}_{\text{wait}}$
15	Среднее время пребывания заявки в СМО	$\bar{t}_{\text{СМО}}$

Постановка задачи

Параметры m, λ и μ известны.

Требуется найти ρ, p_0, p_1, $p_2, ..., p_{m+1}$, q, A, P_{serv}, P_{otk}, $\bar{r}$, $\bar{k}$, $\bar{t}_{\text{wait}}$, $\bar{t}_{\text{СМО}}$.

Формулы для расчетов

Приведенная интенсивность потока заявок вычисляется, как и в предыдущих параграфах, по формуле

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}. \tag{6.1}$$

Вероятности $p_0, p_1, ..., p_{m+1}$ вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{cases} p_0 = \begin{cases} \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}, \rho \neq 1, \\ \dfrac{1}{m+2}, \quad \rho = 1, \end{cases} \\ p_k = \rho^k \cdot p_0, \ k = 1,2,\ldots,m+1. \end{cases} \tag{6.2}$$

Поскольку заявка получает отказ, если СМО занята, а в очереди находятся m заявок, то

$$P_{\text{otk}} = p_{m+1}, \tag{6.3}$$

Далее получаем

$$q = P_{\text{serv}} = 1 - P_{\text{otk}} = 1 - p_{m+1}, \tag{6.4}$$

$$A = \lambda q\,. \tag{6.5}$$

Кроме того, справедливы формулы

$$\bar{r} = \begin{cases} \dfrac{\rho^2\left[1-\rho^m(m+1-m\rho)\right]}{\left(1-\rho^{m+2}\right)(1-\rho)}, \ \rho \neq 1, \\ \dfrac{m(m+1)}{2(m+2)}, \quad \rho = 1, \end{cases}, \tag{6.6}$$

$$\bar{k} = \bar{r} + 1 - p_0, \tag{6.7}$$

$$\bar{t}_{\text{wait}} = \frac{\bar{r}}{\lambda}, \tag{6.8}$$

$$\bar{t}_{\text{СМО}} = \frac{\bar{r}}{\lambda} + \frac{q}{\mu}. \tag{6.9}$$

7. Расчет показателей эффективности одноканальной СМО с неограниченной очередью

Список используемых терминов и обозначений

№	Термин	Обозначение
1	Длина очереди	∞
2	Интенсивность входящего потока заявок	λ
3	Интенсивность выходящего потока обслуженных заявок	μ
4	Приведенная интенсивность потока заявок	ρ

5	Вероятность того, что СМО свободна и может обслужить заявку	p_0
6	Вероятность того, что СМО занята, а в очереди нет заявок	p_1
7	Вероятности того, что СМО занята, а в очереди находятся $1,...,m,...$ заявок, соответственно	$p_2,..., p_{m+1},...$
8	Относительная пропускная способность СМО	q
9	Абсолютная пропускная способность СМО	A
10	Вероятность того, что заявка будет обслужена	P_{serv}
11	Вероятность того, что заявка получит отказ	P_{otk}
12	Среднее число заявок, стоящих в очереди	$\bar{r}$
13	Среднее число заявок в СМО (обслуживаемых и стоящих в очереди)	$\bar{k}$
14	Среднее время ожидания заявки в очереди	$\bar{t}_{\text{wait}}$
15	Среднее время пребывания заявки в СМО	$\bar{t}_{\text{СМО}}$

Постановка задачи

Параметры λ и μ известны.

Требуется найти ρ, p_0, p_1, $p_2,..., p_{m+1}$, q, A, P_{serv}, P_{otk}, $\bar{r}$, $\bar{k}$, $\bar{t}_{\text{wait}}$, $\bar{t}_{\text{СМО}}$.

Формулы для расчетов

Приведенная интенсивность потока заявок вычисляется, как и в предыдущих параграфах, по формуле

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1. \tag{7.1}$$

Если в формулах (1.6.2) – (1.6.9) перейти к пределу при $m \to \infty$, то мы получим следующие формулы:

$$\begin{cases} p_0 = 1 - \rho \\ p_k = \rho^k \cdot p_0, \ k = 1,2,... \end{cases} \tag{7.2}$$

В случае очереди бесконечной длины каждая заявка, в конце концов, будет обслужена. Следовательно,

$$P_{\text{otk}} = 0, \tag{7.3}$$

$$q = 1 = P_{\text{serv}}, \tag{7.4}$$

$$A=\lambda. \tag{7.5}$$

Кроме того, справедливы формулы

$$\bar{r}=\frac{\rho^2}{1-\rho}, \tag{7.6}$$

$$\bar{k}=\frac{\rho}{1-\rho}, \tag{7.7}$$

$$\bar{t}_{\text{wait}}=\frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)}, \tag{7.8}$$

$$\bar{t}_{\text{СМО}}=\frac{1}{\mu(1-\rho)}. \tag{7.9}$$

8. Примеры

Пример 8.1. На вход многоканальной СМО с отказами поступает поток заявок, интенсивность которого составляет 11 заявок/час. Среднее время обслуживания одной заявки 0,15 часа. Каждая заявка приносит доход 130 руб., а содержание одного канала обходится в 122 руб./час. Найти оптимальное число каналов СМО.

Решение. Воспользовавшись данными из условия задачи и обозначениями, принятыми в пункте 5., проведем следующие вычисления:

$$\lambda=11 \text{ заявок/час},$$

$$\mu=\frac{1}{0{,}15}=6{,}67 \text{ заявок/час},$$

$$\rho=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{11}{6{,}667}=1{,}65.$$

Из условия задачи также вытекает, что в случае, если СМО имеет n каналов, то она приносит доход $D=D(n)$, который можно определить по формуле

$$D=130\cdot A-122\cdot n,$$

где $A = A(n)$ − абсолютная пропускная способность СМО.

В случае, когда число каналов $n = 1$, из формул (5.2) и (5.5) получаем

$$p_0 = (1+\rho)^{-1} = (1+1{,}65)^{-1} = 0{,}38 ,$$

$$A = \lambda\left(1-\rho \cdot p_0\right) = 11\cdot(1-1{,}65 \cdot 0{,}38) = 4{,}1 ,$$

$$D = 130\cdot A - 122\cdot n = 130\cdot 4{,}1 - 122 = 411 \text{ руб./час.}$$

При $n = 2$

$$p_0 = \left(1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}\right)^{-1} = \left(1+1{,}65+\frac{1{,}65^2}{2}\right)^{-1} = 0{,}25 ,$$

$$A = \lambda\left(1-\frac{\rho^2}{2!}\cdot p_0\right) = 11\cdot\left(1-\frac{1{,}65^2}{2}\cdot 0{,}25\right) = 7{,}26$$

$$D = 130\cdot A - 122\cdot n = 130\cdot 7{,}26 - 122\cdot 2 = 699{,}8 \text{ руб./час.}$$

При $n = 3$

$$p_0 = \left(1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\frac{\rho^3}{3!}\right)^{-1} = \left(1+1{,}65+\frac{1{,}65^2}{2}+\frac{1{,}65^3}{6}\right)^{-1} = 0{,}21 ,$$

$$A = \lambda\left(1-\frac{\rho^3}{3!}\cdot p_0\right) = 11\cdot\left(1-\frac{1{,}65^3}{6}\cdot 0{,}21\right) = 9{,}27 ,$$

$$D = 130\cdot A - 122\cdot n = 130\cdot 9{,}27 - 122\cdot 3 = 839{,}1 \text{ руб./час.}$$

При $n = 4$

$$p_0 = \left(1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\frac{\rho^3}{3!}+\frac{\rho^4}{4!}\right)^{-1} = \left(1+1{,}65+\frac{1{,}65^2}{2}+\frac{1{,}65^3}{6}+\frac{1{,}65^4}{24}\right)^{-1} = 0{,}20 ,$$

$$A = \lambda\left(1-\frac{\rho^4}{4!}\cdot p_0\right) = 11\cdot\left(1-\frac{1{,}65^4}{24}\cdot 0{,}2\right) = 10{,}32 ,$$

$$D = 130\cdot A - 122\cdot n = 130\cdot 10{,}32 - 122\cdot 4 = 853{,}6 \text{ руб./час.}$$

При $n = 5$

$$p_0=\left(1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\frac{\rho^3}{3!}+\frac{\rho^4}{4!}+\frac{\rho^5}{5!}\right)^{-1}=\left(1+1{,}65+\frac{1{,}65^2}{2}+\frac{1{,}65^3}{6}+\frac{1{,}65^4}{24}+\frac{1{,}65^5}{120}\right)^{-1}=0{,}19\,,$$

$$A=\lambda\left(1-\frac{\rho^5}{5!}\cdot p_0\right)=11\cdot\left(1-\frac{1{,}65^5}{120}\cdot 0{,}19\right)=10{,}79\ ,$$

$$D=130\cdot A-122\cdot n=130\cdot 10{,}79-122\cdot 5=792{,}7\ \text{руб./час.}$$

Сравнивая доходы, поступающие от СМО в случаях $n=1,2,3,4,5$, замечаем, что при увеличении числа каналов от одного до четырех доход растет и при $n=4$ становится наибольшим. Это значение и является оптимальным.

Ответ. Оптимальным является наличие в СМО 4-х каналов.

Пример 8.2. К пункту мойки автомашин, рассчитанному на одну автомашину, подъезжает в среднем 5 машин в час. Процесс мойки одной автомашины занимает в среднем 15 минут. Рядом с пунктом мойки расположена площадка для ожидающих мойки автомашин, вмещающая 3 автомашины. Если площадка занята, то приезжающие для мойки автомашины уезжают в другие пункты мойки. Определить показатели эффективности этой СМО.

Решение. Данная СМО является одноканальной СМО с очередью на 3 заявки. Интенсивность входящего потока заявок

$$\lambda=5\ \text{заявок/час.}$$

Интенсивность выходящего потока обслуженных заявок

$$\mu=\frac{60}{15}=4\ \text{заявок/час.}$$

Приведенная интенсивность

$$\rho=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{5}{4}=1{,}25.$$

Воспользовавшись далее формулами (6.2) – (6.9), получим

$$p_0=\frac{1-\rho}{1-\rho^5}=0{,}12\ ,$$

$$p_4 = \rho^4 \cdot p_0 = 0,29 \ ,$$

$$P_{\text{otk}} = p_4 = 0,29 \,,$$

$$q = P_{\text{serv}} = 1 - P_{\text{otk}} = 1 - p_4 = 1 - 0,29 = 0,71 \ ,$$

$$A = \lambda q = 5 \cdot 0,71 = 3,55 \,.$$

$$\bar{r} = \frac{\rho^2 \left[1 - \rho^3 (4 - 3\rho)\right]}{\left(1 - \rho^5\right)(1 - \rho)} = \frac{1,25^2 \cdot \left[1 - 1,25^3 (4 - 3 \cdot 1,25)\right]}{\left(1 - 1,25^5\right) \cdot (1 - 1,25)} = 1,57 \ ,$$

$$\bar{k} = \bar{r} + 1 - p_0 = 1,57 + 1 - 0,12 = 2,45 \,,$$

$$\bar{t}_{\text{wait}} = \frac{\bar{r}}{\lambda} = \frac{1,57}{5} = 0,31 \,,$$

$$\bar{t}_{\text{СМО}} = \frac{\bar{r}}{\lambda} + \frac{q}{\mu} = \bar{t}_{\text{wait}} + \frac{q}{\mu} = 0,31 + \frac{0,71}{4} = 0,49 \,.$$

Этот расчет и завершает решение задачи.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что называется потоком событий?
2. Какой поток событий называется простейшим потоком?
3. Что называется интенсивностью потока событий?
4. Какая СМО называется многоканальной СМО?
5. Как классифицируются СМО?
6. Что называется абсолютной пропускной способностью СМО?
7. Что называется относительной пропускной способностью СМО?
8. Что называется приведенной интенсивностью потока заявок?
9. В чем состоит схема расчета показателей эффективности одноканальной СМО с отказами?
10. В чем состоит схема расчета показателей эффективности многоканальной СМО с отказами?
11. В чем состоит схема расчета показателей эффективности одноканальной СМО с ограниченной очередью?
12. В чем состоит схема расчета показателей эффективности одноканальной СМО с неограниченной очередью?

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Дан простейший поток событий, интенсивность которого составляет 15 событий в минуту.

Найти:

1.1. Среднюю длину отрезка времени между последовательными событиями.

1.2. Вероятность того, что интервал времени между последовательными событиями составит от 8 до 12 секунд.

2. Ателье по ремонту бытовой техники имеет четырехканальную телефонную линию. Интенсивность потока входящих телефонных звонков составляет 0,4 вызовов в минуту. Средняя продолжительность разговора сотрудника ателье с клиентом по телефону равна 4 минутам.

Найти:

2.1. Вероятность того, что в телефонной линии занято ровно 3 канала:

2.2. Вероятность того, что клиент не смог соединиться с ателье;

2.3. Относительную пропускную способность этой СМО;

2.4. Абсолютную пропускную способность этой СМО;

2.5. Среднее число занятых каналов.

ЛИТЕРАТУРА

Основная:

1. Вентцель Е.С. Исследование операций: Задачи, принципы, методология. Учебное пособие - М.: Дрофа, 2004.
2. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. – М.: КомКнига, 2005.
3. Колемаев В.А., Калинина В.Н. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник. – М.: ИНФРА-М, 2002.
4. Оуэн Г. Теория игр. – М.: Вузовская книга, 2004.

Дополнительная:

5. Афанасьев М.Ю., Багриновский К.А., Матюшок В.М. Прикладные задачи исследования операций. Учебное пособие. – М.: ИНФРА-М, 2006.
6. Ивницкий В.А. Теория сетей массового обслуживания. – М.: Физматлит, 2004.
7. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебник. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001.
8. Протасов И.Д. Теория игр и исследование операций. Учебное пособие. – М.: Гелиос АРВ, 2006.
9. Таха Х.А. Введение в исследование операций. – М.: ВИЛЬЯМС, 2007.