Доктор физико-математических наук, профессор

К. Л. САМАРОВ

МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие по разделу

ЧИСЛОВЫЕ И СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

СОДЕРЖАНИЕ

ЧИСЛОВЫЕ СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

1. Сходимость числового ряда. Необходимый признак сходимости ряда

Рассмотрим числовую последовательность $\{a_n\}$ $n=1,2,\ldots$.

- Выражение $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется числовым рядом, а последовательность $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ называется последовательностью частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

- Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется сходящимся, если существует конечный предел последовательности его частичных сумм $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, в противном случае ряд называется расходящимся.

- Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то число S называется его суммой.

- Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (необходимый признак сходимости ряда).

- Если $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ или этот предел не существует, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{100n+5}.$$

Решение. Воспользуемся необходимым признаком сходимости:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{100n+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{100+\frac{5}{n}} = \frac{1}{50} \neq 0 \ .$$

Следовательно, ряд расходится.

2. Ряды с неотрицательными членами

- Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – ряды с неотрицательными членами. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, а $a_n \le b_n$ для всех значений n, начиная с некоторого номера, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Если же ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится (признак сравнения).

- Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – ряды с положительными членами. Если существует конечный предел $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$, то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно (признак эквивалентности).

- Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – ряд с положительными членами. Если $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится при $q < 1$, расходится при $q > 1$ (признак Даламбера), а для $q = 1$ признак ответа не дает.

- Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – ряд с неотрицательными членами. Если $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится при $q < 1$, расходится при $q > 1$ (признак Коши), а для $q = 1$ признак ответа не дает.

- Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \le 1$.

- Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – ряд с неотрицательными членами. Если существует неотрицательная монотонно убывающая функция $f(x)$ такая, что $f(n)=a_n$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится или расходится одновременно с интегралом $\int_1^{\infty} f(x)dx$ (интегральный признак Коши).

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^5+1}} .$$

Решение. Рассмотрим сходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

и воспользуемся признаком эквивалентности:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n \cdot n^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{n^5+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^{\frac{5}{2}}}{n^{\frac{5}{2}}\sqrt{1+\frac{1}{n^5}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n^5}}} = 2 \ne 0 .$$

Следовательно, исходный ряд сходится.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} .$$

Решение. По признаку Даламбера

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1} n!}{(n+1)!\, n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e > 1.$$

Следовательно, ряд расходится.

Пример 4. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n}{5^n+3}.$$

Решение. По признаку Даламбера

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot 2^{n+1}\cdot(5^n+3)}{(5^{n+1}+3)\cdot n\cdot 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot 2\cdot(5^n+3)}{(5\cdot 5^n+3)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2\left(1+\frac{3}{5^n}\right)}{5+\frac{3}{5^n}} = \frac{2}{5} < 1.$$

Следовательно, ряд сходится.

3. Ряды с членами произвольного знака

- Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, члены которого могут иметь произвольные знаки, называется абсолютно сходящимися, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится.

- Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется условно сходящимся, если он сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится.

- Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, члены которого являются знакочередующимися. Если при $n \to \infty$ последовательность чисел $\{|a_n|\}$ монотонно стремится к нулю, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Другими словами, если, начиная с некоторого номера, выполнено соотношение $|a_n| > |a_{n+1}|$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится (признак Лейбница сходимости знакочередующихся рядов).

- Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, члены которого являются знакочередующимися, сходится в соответствии с признаком Лейбница, то остаток ряда $r_n = S - S_n$ удовлетворяет соотношению

$$|r_n| = |S - S_n| < |a_n|.$$

Пример 5. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi n}{2^n}.$$

Решение. Поскольку $\cos \pi n = (-1)^n$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$. Воспользуемся для исследования сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ признаком Коши:

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2} < 1 .$$

Следовательно, исходный ряд сходится абсолютно.

Пример 6. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2 + 4}}.$$

Решение. Исследуем сначала на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2 + 4}}.$$

Для этого рассмотрим расходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$$

и воспользуемся признаком эквивалентности:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{n^2+4}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{2}{3}}}{n^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{1+\frac{4}{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{4}{n^2}}}=1\neq 0.$$

Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ расходится, т.е. абсолютной сходимости у исходного ряда нет.

Перейдем к исследованию условной сходимости. Поскольку исходный ряд является знакочередующимся, удовлетворяет условию

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2+4}}=0,$$

а члены ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+4}}$$

монотонно убывают, то исходный ряд удовлетворяет признаку сходимости Лейбница.

Таким образом, исходный ряд сходится условно.

4. Степенные ряды. Ряды Тейлора. Ряды Маклорена

- Ряд вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n$ называется степенным рядом.

- Значения x, для которых степенной ряд сходится, составляют область сходимости степенного ряда.

- Число R, которое можно вычислить по формуле

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

или по формуле

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}},$$

называется радиусом сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$.

- Если $R>0$, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ сходится для всех значений x, принадлежащих интервалу $(x_0-R,\ \ x_0+R)$, и расходится для всех значений x, таких, что $|x-x_0|>R$.

- Интервал $(x_0-R,\ \ x_0+R)$ называется интервалом сходимости степенного ряда.

- В концах интервала сходимости $x=x_0-R$ и $x=x_0+R$ требуется специальное исследование ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ на сходимость.

- Если $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ называется рядом Тейлора функции $f(x)$ в окрестности точки x_0.

- Степенной ряд вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ называется рядом Маклорена.

- В следующей таблице представлены ряды Маклорена для элементарных функций:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad |\boldsymbol{x}| < \infty;$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad |\boldsymbol{x}| < \infty;$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad |\boldsymbol{x}| < \infty;$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |\boldsymbol{x}| < \mathbf{1};$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n},\quad |\,\boldsymbol{x}\,|<\mathbf{1}.$$

Пример 7. Разложить функцию $f(x)=\operatorname{arctg}2x$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=0$ и найти область сходимости ряда.

Решение. Заметим, что

$$(\operatorname{arctg}2x)'=\frac{2}{1+4x^2}$$

и воспользуемся разложением функции $\frac{1}{1-t}$ в ряд Маклорена:

$$\frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty}t^n=1+t+t^2+\ldots,\quad |t|<1.$$

Произведя в этой формуле замену переменного $t=-4x^2$, получим

$$\frac{2}{1+4x^2}=2\cdot\left(1-4x^2+16x^4-64x^6+\ldots\right)=2\sum_{n=0}^{\infty}(-4)^n x^{2n}.$$

Поэтому

$$\operatorname{arctg}2x=\int_0^x\frac{2dx}{1+4x^2}=2\int_0^x\left(1-4x^2+16x^4-64x^6+\ldots..\right)dx=$$

$$=\left(2x-\frac{8x^3}{3}+\frac{32x^5}{5}-\frac{128x^7}{7}+\ldots\right)\Bigg|_0^x=2x-\frac{8x^3}{3}+\frac{32x^5}{5}-\frac{128x^7}{7}+\ \ldots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}2\cdot(-4)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}2\cdot(-4)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

сходится в области $4x^2<1$. Следовательно, область сходимости исходного ряда имеет вид: $|x|<\frac{1}{2}$.

Пример 8. Разложить функцию $f(x)=\frac{x}{x-3}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=7$ и найти область сходимости ряда.

Решение. Преобразуем сначала функцию $f(x)$ к другому виду:

$$f(x)=\frac{x}{x-3}=\frac{x-3+3}{x-3}=1+\frac{3}{x-7+4}==1+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-7}{4}}.$$

Совершив в разложении

$$\frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty}t^n$$

замену переменного

$$t=-\frac{x-7}{4},$$

получим искомое разложение функции $f(x)$ в ряд:

$$f(x)=1+\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-7}{4}\right)^n.$$

Найдем область сходимости этого ряда:

$$|t|<1\Leftrightarrow\left|\frac{x-7}{4}\right|<1\Leftrightarrow|x-7|<4\Leftrightarrow 3<x<11.$$

Пример 9. Вычислить значение $\cos 0{,}8$ с точностью $0{,}001$.

Решение. Воспользовавшись разложением функции $\cos x$ в ряд Маклорена, получаем

$$\cos 0{,}8=1-\frac{(0{,}8)^2}{2!}+\frac{(0{,}8)^4}{4!}-\frac{(0{,}8)^6}{6!}+\ \ldots.$$

Поскольку это знакочередующийся ряд, удовлетворяющий признаку Лейбница, то можно оценить остатки этого ряда. Так как

$$\frac{(0,8)^6}{6!} = 0,00036 < 0,001,$$

то, с искомой точностью,

$$\cos 0,8 = 1 - 0.32 + 0,0171 = 0,697.$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что такое числовой ряд?
2. Что такое сумма числового ряда?
3. Как определяется понятие сходимости числового ряда?
4. В чем состоит необходимый признак сходимости числового ряда?
5. В чем состоит признак сравнения для числовых рядов?
6. В чем состоит признак эквивалентности для числовых рядов?
7. В чем состоит признак Даламбера?
8. В чем состоит признак Коши?
9. В чем состоит интегральный признак Коши?
10. В чем состоит признак Лейбница?
11. Что такое абсолютная сходимость числового ряда?
12. Что такое условная сходимость числового ряда?
13. Что называется степенным рядом?
14. Что такое область сходимости степенного ряда?
15. Каким свойством обладает область сходимости степенного ряда?
16. Как найти радиус сходимости степенного ряда?
17. Что называется рядом Тейлора?
18. Что называется рядом Маклорена?

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

А. Исследовать на сходимость ряды:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+1}$;

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^n}$.

Б. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{\sqrt{n}}$;

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$.

В. Разложить в ряд Маклорена функцию:

5. $f(x) = \frac{x^3}{1+9x^2}$

и найти радиус сходимости полученного ряда.

ЛИТЕРАТУРА

Основная:

1. Ахтямов А.М. Математика для социологов и экономистов: Учебное пособие./Под ред. Беклемишева Д.В. – М.: Физматлит, 2005.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Сборник задач по высшей математике: Учебное пособие. – М.: Физматлит, 2001.
3. Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М., Фридман М.Н. Высшая математика для экономистов: Учебник для вузов. – М.: ЮНИТИ, 2003.
4. Натансон И.П. Краткий курс высшей математики. – СПб.: Издательство «Лань», 2005.

Дополнительная:

5. Егоров А.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. – М.: Физматлит, 2005.
6. Романко В.К. Курс дифференциальных уравнеий и вариационного исчисления. – М.: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2006.
7. Сборник задач по высшей математике для экономистов: Учебное пособие. / Под ред. В.И.Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2004.
8. Щипачев В.С. Задачник по высшей математике. – М.: Высшая школа, 2000.
9. Шипачев В.С. Высшая математика. – М.: Высшая школа, 2002.