Доктор физико-математических наук, профессор

К. Л. САМАРОВ

МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие по разделу

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

СОДЕРЖАНИЕ

1 Матрицы и определители ………………………………………………… 3

1.1 Матрицы и операции над ними ……………………………...... 3

1.2 Определители и их свойства …………………………………….. 5

1.3 Обратная матрица ……………………………………………….... 10

2 Системы линейных алгебраических уравнений ………………………. 13

2.1 Основные понятия и определения ………………………………. 13

2.2 Решение систем линейных алгебраических уравнений по формулам Крамера ………………………………………………………. 15

2.3 Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса (случай однозначной разрешимости) ……………………… 16

2.4 Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса (общий случай). Ранг матрицы. Теорема Кронекера-Капелли ……………………………………………………………….. 20

2.5 Собственные значения и собственные векторы матрицы ……….... 23

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ …………………………………….. 31

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ………………………. 32

ЛИТЕРАТУРА ……………………………………………………………... 34

1. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1.1. Матрицы и операции над ними

- Матрицей называется квадратная или прямоугольная таблица, заполненная числами. Эти числа называются элементами матрицы.
- Элементы матрицы, расположенные по горизонталям, образуют строки матрицы.
- Элементы матрицы, расположенные по вертикалям, образуют столбцы матрицы.
- Строки нумеруются слева направо, начиная с номера 1, столбцы нумеруются сверху вниз, начиная с номера 1.
- Матрица A, имеющая m строк и n столбцов, называется матрицей размера m на n и обозначается $A_{m\times n}$.
- Элемент $a_{i\,j}$ матрицы $A=\{a_{i\,j}\}$ стоит на пересечении i - ой строки и j - го столбца.
- Транспонированием матрицы $A=\{a_{i\,j}\}$ называется операция, результатом которой является матрица $A^T=\{a_{j\,i}\}$.
- Каждую матрицу можно умножить на любое число, причем, если k – число, то $k\cdot A=\{k\cdot a_{i\,j}\}$.
- Матрицы одного и того же размера $A_{m\times n}$ и $B_{m\times n}$ можно складывать, причем $A_{m\times n}+B_{m\times n}=\{a_{i\,j}+b_{i\,j}\}$.
- Операция сложения матриц обладает свойствами $A+B=B+A$, $A+(B+C)=(A+B)+C$.
- Матрицы $A_{m\times n}$ и $B_{n\times k}$ можно перемножать, причем $A_{m\times n}\cdot B_{n\times k}=C_{m\times k}$, где $c_{i\,j}=\sum\limits_{s=1}^{n}a_{is}\cdot b_{s\,j}$.
- Операция умножения матриц обладает свойствами $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$, $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$.

- В общем случае $A\cdot B \neq B\cdot A$.

Пример 1.1.1. Выполнить действия над матрицами

$$5\cdot\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ 2 & 4 & -3\end{pmatrix}^T - 3\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & -3\\ 10 & 7\end{pmatrix}.$$

Решение.

$$5\cdot\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ 2 & 4 & -3\end{pmatrix}^T - 3\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & -3\\ 10 & 7\end{pmatrix} = 5\cdot\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 4\\ 0 & -3\end{pmatrix} - 3\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & -3\\ 10 & 7\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}15 & 10\\ -5 & 20\\ 0 & -15\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3 & -6\\ -12 & 9\\ -30 & -21\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12 & 4\\ -17 & 29\\ -30 & -36\end{pmatrix}.$$

Пример 1.1.2. Можно ли перемножить матрицы

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 5 & 0\\ -4 & 3\end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix}5 & 7\\ 10 & 1\\ 4 & 8\end{pmatrix}?$$

Решение. Умножение указанных матриц осуществить невозможно, так как число столбцов первого сомножителя не равно числу строк второго сомножителя.

Пример 1.1.3. Выполнить действия над матрицами

$$\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 4 & 2 & 0\\ -5 & 6 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2 & 4\\ 3 & 0 & -5\end{pmatrix}^T.$$

Решение.

$$\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 4 & 2 & 0\\ -5 & 6 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2 & 4\\ 3 & 0 & -5\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 4 & 2 & 0\\ -5 & 6 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 0\\ 4 & -5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}13 & -1\\ 0 & 12\\ -13 & -20\end{pmatrix}.$$

1.2 Определители и их свойства

- Квадратная матрица размера n на n называется матрицей n-го порядка.
- Для квадратных матриц можно ввести понятие определителя.
- Определитель матрицы 1-го порядка (a_{11}) вычисляется по формуле

$$\Delta = \left| a_{11} \right| = a_{11}.$$

- Определитель матрицы 2-го порядка

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

вычисляется по формуле

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

- Определитель матрицы n - го порядка при n >1 (определитель n - го порядка) можно вычислить с помощью разложения по любой строке (любому столбцу) матрицы по формуле

$$\Delta = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \end{vmatrix} = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij} \ ,$$

где символами A_{ij} обозначены объекты, называемые алгебраическими дополнениями. Алгебраические дополнения A_{ij} вычисляются по формулам

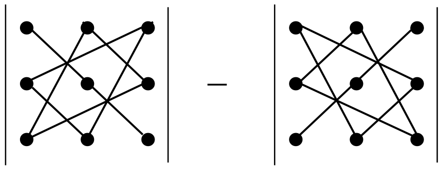
$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij},$$

где символами M_{ij} обозначены определители $(n-1)$ порядка, называемые минорами и полученные из исходного определителя вычеркиванием i - ой строки и j - го столбца.

- Вычисление определителей 3-го порядка с помощью разложения по любой строке (столбцу) приводит к формуле:

$$\Delta = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{22} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} \,,$$

для запоминания которой можно использовать способ треугольников

$\Delta = +$  ,

или способ Саррюса

$$\Delta = \left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{matrix} \right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} .$$

$$- \quad - \quad - \qquad + \quad + \quad +$$

- Определитель с нулевой строкой (столбцом) равен нулю.
- Если у матрицы умножить любую строку (любой столбец) на какое-либо число, то определитель матрицы умножится на это число.
- Определитель не меняется при транспонировании матрицы.
- Определитель меняет знак при перестановке любых двух строк (столбцов) матрицы.
- Определитель матрицы с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю.
- Определитель не меняется, если к какой-нибудь строке прибавить любую другую строку, умноженную на любое число. Аналогичное утверждение справедливо и для столбцов.
- Главной диагональю квадратной матрицы называется диагональ, ведущая из левого верхнего угла матрицы в правый нижний угол.
- Побочной диагональю квадратной матрицы называется диагональ, ведущая из левого нижнего угла матрицы в правый верхний угол.
- Квадратная матрица называется треугольной, если все ее элементы, расположенные ниже или выше главной диагонали, равны нулю.
- Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов, расположенных на ее главной диагонали:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}.$$

Пример 1.2.1. Вычислить определитель матрицы 1-го порядка (-2).

Решение.

$$\Delta = \left| -2 \right| = -2.$$

Пример 1.2.2. Вычислить определитель матрицы 2-го порядка

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 15 + 8 = 23.$$

Пример 1.2.3. Вычислить определитель матрицы 3-го порядка

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение 1 (способ треугольников).

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & -3 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 40 + 27 + 12 - 12 - 15 = -26.$$

Решение 2 (способ Саррюса).

$$\Delta = \left| \begin{matrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & -3 \\ -3 & -2 & 1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \\ -3 & -2 \end{matrix} \quad = \quad 2 + 27 - 40 + 12 - 12 - 15 = -26.$$

Решение 3 (разложение по 2-ой строке).

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & -3 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -5 \cdot 11 + 14 + 3 \cdot 5 = -55 + 14 + 15 = -26.$$

Пример 1.2.4. Вычислить определитель 4-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

Решение 1 (разложение по столбцу). Для вычисления определителя разложим его по одному из столбцов. Третий столбец для этого наиболее удобен, поскольку именно в 3-м столбце находятся два нуля:

$$\Delta = a_{13} \cdot A_{13} + a_{23} \cdot A_{23} + a_{33} \cdot A_{33} + a_{43} \cdot A_{43} = a_{13} \cdot A_{13} + a_{23} \cdot A_{23} =$$

$$= -1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -\left(-8 + 2 - 40 + 5\right) - 3 \cdot \left(25 + 4 - 2 + 10\right) =$$

$$= 41 - 111 = -70.$$

Решение 2 (приведение к треугольному виду). Для вычисления определителя приведем его к треугольному виду. С этой целью, не изменяя определителя, преобразуем его так, чтобы элементы, расположенные в первом столбце под главной диагональю, стали равными нулю. Для этого сначала к третьей строке прибавим первую строку, а затем из четвертой строки вычтем удвоенную первую строку:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Преобразуем теперь полученный определитель к виду, в котором элементы, расположенные во втором столбце под главной диагональю, равны нулю. Для этого сначала из третьей строки вычтем вторую строку, умноженную на 7, а затем к четвертой строке прибавим удвоенную вторую строку:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -22 & -27 \\ 0 & -2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -22 & -27 \\ 0 & 0 & 8 & 13 \end{vmatrix}.$$

Преобразуем теперь полученный определитель к виду, в котором элемент, расположенный в третьем столбце под главной диагональю, равен нулю. Для этого сначала умножим четвертую строку на 11, а сам определитель разделим на 11:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -22 & -27 \\ 0 & 0 & 8 & 13 \end{vmatrix} = \frac{1}{11} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -22 & -27 \\ 0 & 0 & 88 & 143 \end{vmatrix}.$$

Прибавим теперь к четвертой строке третью строку, умноженную на 4:

$$\Delta = \frac{1}{11} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -22 & -27 \\ 0 & 0 & 88 & 143 \end{vmatrix} = \frac{1}{11} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -22 & -27 \\ 0 & 0 & 0 & 35 \end{vmatrix}.$$

Полученная матрица имеет треугольный вид. Поэтому

$$\Delta = \frac{1}{11} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -22 & -27 \\ 0 & 0 & 0 & 35 \end{vmatrix} = \frac{1}{11} \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-22) \cdot 35 = -70 .$$

1.3 Обратная матрица

- Квадратная матрица, на главной диагонали которой стоят числа 1, а все остальные элементы равны 0, обозначается символом E и называется единичной матрицей.

- Единичная матрица обладает следующим свойством:

$$A \cdot E = E \cdot A = A.$$

- Пусть A – квадратная матрица. Если существует квадратная матрица A^{-1}, обладающая свойством

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E, \tag{1.3.1}$$

то она называется обратной матрицей к матрице A.

- Обратная матрица A^{-1} квадратной матрицы A существует тогда и только тогда, когда определитель матрицы A не равен 0.

- Обратную матрицу можно вычислить по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\left(\overline{A}\right)^T, \tag{1.3.2}$$

где символом $\overline{A}$ обозначена матрица, состоящая из алгебраических дополнений A_{ij} к элементам a_{ij} матрицы A. Эта матрица называется присоединенной матрицей матрицы A.

- Если матрицу A привести преобразованиями строк к единичной матрице E, то теми же преобразованиями матрица E приведется к обратной матрице:

$$\left(A \middle| E\right) \to \left(E \middle| A^{-1}\right).$$

Пример 1.3.1. Существует ли обратная матрица к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}?$$

Если да, то найти ее и проверить выполнение соотношения (1.3.1).

Решение. Вычислим сначала определитель матрицы A:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0 .$$

Поскольку определитель равен 0, то обратная матрица не существует.

Пример 1.3.2. Существует ли обратная матрица к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} ?$$

Если да, то найти ее и проверить выполнение соотношения (1.3.1).

Решение. Вычислим сначала определитель матрицы A:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -10 - 4 = -14 \neq 0 .$$

Поскольку определитель отличен от 0, то обратная матрица существует. Найдем ее по формуле (1.3.1):

$$A^{-1} = -\frac{1}{14} \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \frac{5}{14} & \frac{4}{14} \\ \frac{1}{14} & -\frac{2}{14} \end{pmatrix} .$$

Сделаем проверку выполнения соотношения (1.3.1):

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{5}{14} & \frac{4}{14} \\ \frac{1}{14} & -\frac{2}{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E ,$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{5}{14} & \frac{4}{14} \\ \frac{1}{14} & -\frac{2}{14} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E .$$

Пример 1.3.3. Существует ли обратная матрица к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -6 \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & 7 & -4 \end{pmatrix} ?$$

Если да, то найти ее и проверить выполнение соотношения (1.3.1).

Решение. Найдем сначала алгебраические дополнения A_{ij} к элементам a_{ij}, расположенным в первой строке матрицы A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} = -12,\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 4,\ A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = -5.$$

Теперь удобно найти определитель матрицы A:

$$\Delta = a_{11}\cdot A_{11} + a_{12}\cdot A_{12} + a_{13}\cdot A_{13} = 5\cdot(-12) + 4\cdot 4 - 6\cdot(-5) = -14 \neq 0.$$

Далее получаем

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} = -26;\ A_{22} = \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 4;\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = -19;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 18;\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -6;\ A_{33} = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 11.$$

Составив присоединенную матрицу

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} -12 & 4 & -5 \\ -26 & 4 & -19 \\ 18 & -6 & 11 \end{pmatrix},$$

получим

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\left(\overline{A}\right)^T = -\frac{1}{14}\begin{pmatrix} -12 & -26 & 18 \\ 4 & 4 & -6 \\ -5 & -19 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12}{14} & \frac{26}{14} & -\frac{18}{14} \\ -\frac{4}{14} & -\frac{4}{14} & \frac{6}{14} \\ \frac{5}{14} & \frac{19}{14} & -\frac{11}{14} \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку выполнения соотношения (1.3.1):

$$A\cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -6 \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & 7 & -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{12}{14} & \frac{26}{14} & -\frac{18}{14} \\ -\frac{4}{14} & -\frac{4}{14} & \frac{6}{14} \\ \frac{5}{14} & \frac{19}{14} & -\frac{11}{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E,$$

$$A^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix} \frac{12}{14} & \frac{26}{14} & -\frac{18}{14} \\ -\frac{4}{14} & -\frac{4}{14} & \frac{6}{14} \\ \frac{5}{14} & \frac{19}{14} & -\frac{11}{14} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 4 & -6 \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & 7 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=E\,.$$

2. Системы линейных алгебраических уравнений

2.1 Основные понятия и определения

- Системой линейных алгебраических уравнений называется система

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases}$$

- Систему линейных алгебраических уравнений можно представить в матричной форме

$$A\cdot\overline{x}=\overline{b}\,, \qquad (2.1.1)$$

где

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \overline{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \overline{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

- Система уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, в противном случае система несовместна.
- Если матрица A является квадратной и имеет обратную матрицу, то система уравнений имеет единственное решение

$$\overline{x}=A^{-1}\overline{b}\,. \qquad (2.1.2)$$

Пример 2.1.1. С помощью вычисления обратной матрицы решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1-5x_2=b_1, \\ 4x_1+3x_2=b_2, \end{cases}$$

для произвольных значений b_1, b_2. Найти числовой ответ в случаях

а) $b_1 = 0, b_2 = 26$; б) $b_1 = 9, b_2 = 31$.

Решение. Если ввести обозначения

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

то рассматриваемую систему можно записать в матричном виде (2.1.1). Проверим, что матрица A является обратимой. Действительно, поскольку определитель матрицы A

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 20 = 26 \neq 0,$$

то матрица A имеет обратную матрицу A^{-1}, и решение системы

$$\bar{x} = A^{-1} \cdot \bar{b}.$$

Найдем теперь обратную матрицу A^{-1}. Так как присоединенная матрица к матрице A имеет вид

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix},$$

то, в соответствии с (1.3.2) обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{26} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{26} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\text{а) } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{26} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 26 \end{pmatrix} = \frac{1}{26} \begin{pmatrix} 130 \\ 52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{26} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 31 \end{pmatrix} = \frac{1}{26} \begin{pmatrix} 182 \\ 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2.2 Решение систем линейных алгебраических уравнений по формулам Крамера

- В случае, когда матрица A является квадратной и имеет обратную матрицу, решение системы уравнений можно найти по формулам Крамера:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta},$$

где Δ_j - определители, полученные из определителя Δ матрицы A заменой j – го столбца столбцом свободных членов.

- Если $\Delta = 0$ и все определители $\Delta_j = 0$, то система имеет бесконечно много решений.

- Если $\Delta = 0$, а хотя бы один из определителей $\Delta_j \neq 0$, то система не имеет решений.

Пример 2.2.1. С помощью формул Крамера решить систему

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 13, \\ 4x + 3y - z = 7, \\ x - 2y + 5z = 15. \end{cases}$$

Решение. Вычислим сначала определитель Δ и определители Δ_j для всех значений $j = 1, 2, 3$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 30 - 24 + 1 - 9 - 4 + 20 = 14 \neq 0,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 13 & -1 & 3 \\ 7 & 3 & -1 \\ 15 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 195 - 42 + 15 - 135 - 26 + 35 = 42,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 13 & 3 \\ 4 & 7 & -1 \\ 1 & 15 & 5 \end{vmatrix} = 70 + 130 - 13 - 21 + 30 - 260 = -14,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 13 \\ 4 & 3 & 7 \\ 1 & -2 & 15 \end{vmatrix} = 90 - 140 - 7 - 39 + 28 + 60 = 28.$$

Поэтому

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{42}{14} = 3, \ \ y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-14}{14} = -1, \ \ z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{28}{14} = 2.$$

2.3 Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса (случай однозначной разрешимости)

- Рассмотрим систему из n уравнений с n неизвестными. Если равносильными преобразованиями эту систему удается привести к виду

$$\begin{cases} c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \ldots + c_{1n}y_n = d_1, \\ \qquad\quad c_{22}y_2 + \ldots + c_{2n}y_n = d_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad c_{nn}y_n = d_n, \end{cases} \tag{2.3.1}$$

то в случае, когда определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix} = c_{11} \cdot c_{22} \cdot \ldots \cdot c_{nn} \neq 0,$$

(случай однозначной разрешимости) можно, решая сначала последнее уравнение системы, затем предпоследнее уравнение и т.д. (обратный ход), один за другим найти все неизвестные.

- Описанная схема решения систем линейных алгебраических уравнений и составляет основу метода последовательного исключения неизвестных Гаусса.

Пример 2.3.1. С помощью метода последовательного исключения неизвестных Гаусса решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -15, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 20, \\ 7x_1 + 4x_2 - 5x_3 = - \ \ 6. \end{cases}$$

Решение. Удобнее всего исключить неизвестную x_3 из первого и третьего уравнений, воспользовавшись тем, что во втором уравнении системы коэффициент при неизвестном x_3 равен 1. С этой целью к первому уравнению системы прибавим второе уравнение, умноженное на 3, а к третьему уравнению прибавим второе уравнение, умноженное на 5. Получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 11x_1 - x_2 = 45, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 20, \\ 22x_1 - 6x_2 = 94. \end{cases}$$

Исключим теперь переменную x_1 из третьего уравнения. Для этого из третьего уравнения предыдущей системы вычтем первое уравнение, умноженное на 2. Получим систему уравнений

$$\begin{cases} 11x_1 - x_2 = 45, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 20, \\ -4x_2 = 4, \end{cases}$$

которую для наглядности удобно записать в виде (2.3.1):

$$\begin{cases} x_3 + 3x_1 - 2x_2 = 20, \\ 11x_1 - x_2 = 45, \\ -4x_2 = 4. \end{cases}$$

Из третьего уравнения находим значение неизвестной $x_2 = -1$ (обратный ход). Подставляя значение x_2 во второе уравнение, найдем значение неизвестной x_1:

$$11x_1 + 1 = 45, \quad x_1 = 4\,.$$

Осталось значения x_1 и x_2 подставить в первое уравнение:

$$12+2+x_3=20, \quad x_3=6.$$

Ответ: $x_1 = 4, x_2 = -1, x_3 = 6.$

Замечание. Решение примера 2.3.1. можно осуществить в матричной форме. Для этого представим исходную систему уравнений в форме *расширенной матрицы*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -3 & -15 \\ 3 & -2 & 1 & 20 \\ 7 & 4 & -5 & -6 \end{array}\right),$$

где слева от вертикальной черты записана матрица системы A, а справа – столбец свободных членов $\bar{b}$.

Производя над строками расширенной матрицы операции, описанные в решении примера, получаем

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -3 & -15 \\ 3 & -2 & 1 & 20 \\ 7 & 4 & -5 & -6 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 11 & -1 & 0 & 45 \\ 3 & -2 & 1 & 20 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 11 & -1 & 0 & 45 \\ 3 & -2 & 1 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 11 & 0 & 0 & 44 \\ 3 & -2 & 1 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1=4 \\ x_2=-1 \\ x_3=-6 \end{pmatrix}.$$

Пример 2.3.2. С помощью метода последовательного исключения неизвестных Гаусса решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2-4x_3+2x_4=-1, \\ 5x_1+4x_2+3x_3+6x_4=45, \\ 3x_1-2x_2-\ x_3\ +4x_4=25, \\ 4x_1+7x_2\qquad\ -2x_4=-9, \end{cases}$$

осуществляя при каждой операции над строками расширенной матрицы контроль правильности вычислений.

Решение. Составим расширенную матрицу этой системы и запишем для контроля правильности вычислений в каждой строке справа суммы всех элементов строки (контрольные суммы):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -4 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & 3 & 6 & 45 \\ 3 & -2 & -1 & 4 & 25 \\ 4 & 7 & 0 & -2 & -9 \end{array}\right)\begin{array}{c} 2 \\ 63 \\ 29 \\ 0 \end{array}.$$

Будем вычислять контрольные суммы до проведения каждой операции над строками расширенной матрицы, а также после проведения операции. Совпадение контрольных сумм свидетельствует о правильности расчетов. Воспользовавшись сначала третьей строкой матрицы, получим

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -4 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & 3 & 6 & 45 \\ 3 & -2 & -1 & 4 & 25 \\ 4 & 7 & 0 & -2 & -9 \end{array}\right)\begin{array}{c} 2 \\ 63 \\ 29 \\ 0 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -10 & 11 & 0 & -14 & -101 \\ 14 & -2 & 0 & 18 & 120 \\ 3 & -2 & -1 & 4 & 25 \\ 4 & 7 & 0 & -2 & -9 \end{array}\right)\begin{array}{c} -114 \\ 150 \\ 29 \\ 0 \end{array}.$$

Используем теперь четвертую строку матрицы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -10 & 11 & 0 & -14 & -101 \\ 14 & -2 & 0 & 18 & 120 \\ 3 & -2 & -1 & 4 & 25 \\ 4 & 7 & 0 & -2 & -9 \end{array}\right)\begin{array}{c} -114 \\ 150 \\ 29 \\ 0 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -38 & -38 & 0 & 0 & -38 \\ 50 & 61 & 0 & 0 & 39 \\ 11 & 12 & -1 & 0 & 7 \\ 4 & 7 & 0 & -2 & -9 \end{array}\right)\begin{array}{c} -114 \\ 150 \\ 29 \\ 0 \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 50 & 61 & 0 & 0 & 39 \\ -11 & -12 & 1 & 0 & -7 \\ 4 & 7 & 0 & -2 & -9 \end{array}\right)\begin{array}{c} 3 \\ 150 \\ -29 \\ 0 \end{array}.$$

Воспользуемся теперь первой строкой матрицы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 50 & 61 & 0 & 0 & 39 \\ -11 & -12 & 1 & 0 & -7 \\ 4 & 7 & 0 & -2 & -9 \end{array}\right)\begin{array}{c} 3 \\ 150 \\ -29 \\ 0 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 11 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & -13 \end{array}\right)\begin{array}{c} 3 \\ 0 \\ 4 \\ -12 \end{array}$$

Теперь воспользуемся второй строкой матрицы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 11 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & -13 \end{array}\right)\begin{array}{c} 3 \\ 0 \\ 4 \\ -12 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & -13 \end{array}\right)\begin{array}{c} 3 \\ 0 \\ 4 \\ -12 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -10 \end{array}\right)\begin{array}{c} 3 \\ 0 \\ 4 \\ -12 \end{array}.$$

Остается лишь разделить на (– 2) четвертую строку матрицы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -10 \end{array}\right)\begin{array}{c} 3 \\ 0 \\ 4 \\ -12 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)\begin{array}{c} 3 \\ 0 \\ 4 \\ 6 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 3 \\ x_4 = 5 \end{array}\right).$$

2.4 Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса (общий случай). Ранг матрицы. Теорема Кронекера-Капелли

- Рассмотрим систему из m уравнений с n неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (2.4.1)$$

Равносильными преобразованиями и переобозначением неизвестных

$$(x_1, x_2, ..., x_n) \to (y_1, y_2, ..., y_n)$$

эту систему всегда можно привести к одному из следующих двух типов:

$$\textbf{1)} \quad \begin{cases} y_1 + c_{1r+1}y_{r+1} + ... + c_{1n}y_n = d_1, \\ y_2 + c_{2r+1}y_{r+1} + ... + c_{2n}y_n = d_2, \\ \ldots \\ y_r + c_{rr+1}y_{r+1} + ... + c_{rn}y_n = d_r, \quad (0 \le r < m) \\ 0 = d_{r+1}, \\ \ldots \\ 0 = d_m. \end{cases} \qquad (2.4.2)$$

$$\textbf{2)} \quad \begin{cases} y_1 + c_{1m+1}y_{m+1} + ... + c_{1n}y_n = d_1, \\ y_2 + c_{2m+1}y_{m+1} + ... + c_{2n}y_n = d_2, \\ ... \\ y_m + c_{mm+1}y_{m+1} + ... + c_{mn}y_n = d_m. \end{cases} \qquad (2.4.3)$$

- В первом случае, если хотя бы одно из чисел $d_{r+1}, d_{r+2}, ..., d_m$ отлично от нуля, то система решений не имеет.

- Если же в первом случае все числа $d_{r+1}, d_{r+2}, ..., d_m$ равны нулю, то система имеет бесконечно много решений.

- Во втором случае, если $n > m$, то система имеет бесконечно много решений.

- Если же во втором случае $n = m$, то система имеет единственное решение, причем этот случай совпадает со случаем однозначной разрешимости, рассмотренном в пункте **2.3**.

- В первом случае говорят, что *ранг* матрицы $A_{m \times n}$ равен r $(0 \le r < m)$.

- Во втором случае говорят, что *ранг* матрицы $A_{m \times n}$ равен m.

- В системе (2.4.2) переменные $y_1, ..., y_r$ называются *базисными*, а переменные $y_{r+1}, ..., y_n$ называются *свободными*.

- В системе (2.4.3) переменные $y_1, ..., y_m$ называются *базисными*, а переменные $y_{m+1}, ..., y_n$ называются *свободными*.

- Теорема Кронекера-Капелли утверждает, что система уравнений (2.4.1) имеет решение тогда и только тогда, когда ранг её расширенной матрицы совпадает с рангом матрицы $A_{m \times n}$.

Пример 2.4.1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 6. \end{cases}$$

Решение. Исключим неизвестную x_1 из второго и третьего уравнений, воспользовавшись первым уравнением системы. С этой целью из второго уравнения вычтем первое уравнение, умноженное на 2, а из третьего уравнения вычтем первое уравнение, умноженное на 3. Получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -4, \\ -x_2 - 2x_3 = 9, \\ -2x_2 - 4x_3 = 18. \end{cases}$$

Вычитая из третьего уравнения второе уравнение, умноженное на 2, получим систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -4, \\ -x_2 - 2x_3 = 9, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Прибавляя к первому уравнению удвоенное второе уравнение и меняя знак во втором уравнении, получим

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 14, \\ x_2 + 2x_3 = -9. \end{cases}$$

Следовательно, $x_1 = x_3 + 14,\ x_2 = -2x_3 - 9$.

Ответ. $x_1 = t + 14, x_2 = -2t - 9, x_3 = t$, где t – любое число.

Замечание. В описанном решении примера 2.4.1 неизвестные x_1 и x_2 являются базисными, а неизвестная x_3 является свободной. Ранг матрицы исходной системы равен 2, ранг расширенной матрицы также равен 2.

Пример 2.4.2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 8x_2 + x_4 = 1. \end{cases}$$

Решение. Исключим сначала неизвестную x_1 из второго уравнения системы. Для этого вычтем из второго уравнения первое уравнение, умноженное на 3:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 2, \\ -x_2 - 3x_3 + x_4 = -5. \end{cases}$$

Теперь исключим неизвестную x_2 из первого уравнения системы. Для этого к первому уравнению прибавим второе уравнение, умноженное на 3:

$$\begin{cases} x_1 - 8x_3 + 3x_4 = -13, \\ -x_2 - 3x_3 + x_4 = -5. \end{cases}$$

Остается лишь поменять знаки во втором уравнении:

$$\begin{cases} x_1 - 8x_3 + 3x_4 = -13, \\ x_2 + 3x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$$

Следовательно, $x_1 = 8x_3 - 3x_4 - 13,\ x_2 = -3x_3 + x_4 + 5.$

Ответ. $x_1 = 8t_1 - 3t_2 - 13,\ x_2 = -3t_1 + t_2 + 5,\ x_3 = t_1,\ x_4 = t_2$, где t_1, t_2 – произвольные числа.

Замечание. В описанном решении примера 2.4.2 неизвестные x_1 и x_2 являются базисными, а неизвестные x_3 и x_4 являются свободными. Ранг матрицы исходной системы равен 2, ранг расширенной матрицы также равен 2.

2.5 Собственные значения и собственные векторы матрицы

- Рассмотрим квадратную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

ненулевой столбец

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},$$

который в дальнейшем будем называть вектором-столбцом, и некоторое число λ. Вектор-столбец $\overline{x}$ называется собственным вектором матрицы A, соответствующим собственному значению λ, если этот вектор является решением системы уравнений

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},$$

которую можно записать в виде

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{21}-\lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn}-\lambda)x_n = 0. \end{cases} \qquad (2.5.1)$$

- Необходимым условием существования ненулевого решения системы (2.5.1) является равенство нулю определителя

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21}-\lambda & \dots & a_{21} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.5.2)$$

- Соотношение (2.5.2) является уравнением n-го порядка относительно неизвестной λ, которое называется характеристическим уравнением.
- Корни характеристического уравнения называются характеристическими числами матрицы A.
- После нахождения корней характеристического уравнения ищутся соответствующие им собственные векторы, являющиеся ненулевыми решениями системы уравнений (2.5.1).
- Если вектор $\overline{x}$ является собственным вектором с собственным значением λ, то и любой другой вектор $k\overline{x}$, где k - произвольное число, отличное от 0, является собственным с тем же собственным значением.

Пример 2.5.1. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$(1-\lambda)(4-\lambda) - 4 = 0, \quad \lambda^2 - 5\lambda = 0,$$
$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 5.$$

Рассмотрим сначала характеристический корень $\lambda_1 = 0$ и найдем соответствующий ему собственный вектор. Для этого решим систему уравнений

$$\begin{pmatrix} 1-0 & 2 \\ 2 & 4-0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

которую можно записать в виде

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 = 0. \end{cases} \qquad (2.5.3)$$

Полученная система эквивалентна уравнению $x_1 = -2x_2$, и, если неизвестную x_1 выбрать в качестве базисной неизвестной, а неизвестную x_2 – в качестве свободной, то решение системы уравнений (2.5.3) можно представить в виде

$$\{x_1 = -2t, x_2 = t\},$$

где t – любое число, не равное 0. Таким образом,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \neq 0,$$

а вектор

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

является искомым собственным вектором.

Рассмотрим теперь характеристический корень $\lambda_1 = 5$ и найдем соответствующий ему собственный вектор. Для этого решим систему уравнений

$$\begin{pmatrix} 1-5 & 2 \\ 2 & 4-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

которую можно записать в виде

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 - x_2 = 0. \end{cases} \qquad (2.5.4)$$

Полученная система эквивалентна уравнению $2x_1 = x_2$, и, если неизвестную x_1 выбрать в качестве свободной неизвестной, а неизвестную x_2 – в качестве базисной, то решение системы уравнений (2.5.4) можно представить в виде

$$\{x_1 = t, x_2 = 2t\},$$

где t – любое число, не равное 0. Таким образом,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, t \neq 0,$$

а вектор

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

является искомым собственным вектором.

Ответ. Векторы

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

являются собственными с собственными значениями 0 и 5 соответственно.

Пример 2.5.2. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 6 & -2 \\ 0 & 3-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$(1-\lambda)(3-\lambda)(-4-\lambda)=0,$$
$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = -4.$$

Рассмотрим сначала характеристический корень $\lambda_1 = 1$ и найдем соответствующий ему собственный вектор. Для этого решим систему уравнений

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 6 & -2 \\ 0 & 3-1 & 5 \\ 0 & 0 & -4-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

которую можно записать в виде

$$\begin{cases} 6x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_2 + 5x_3 = 0, \\ \quad\quad -5x_3 = 0. \end{cases} \tag{2.5.5}$$

Решение системы уравнений (2.5.5) можно представить в виде

$$\{x_1 = t, x_2 = 0, x_3 = 0\},$$

где t – любое число, не равное 0. Таким образом,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

а вектор

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

является искомым собственным вектором.

Рассмотрим теперь характеристический корень $\lambda_2 = 3$ и найдем соответствующий ему собственный вектор. Для этого решим систему уравнений

$$\begin{pmatrix} 1-3 & 6 & -2 \\ 0 & 3-3 & 5 \\ 0 & 0 & -4-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

которую можно записать в виде

$$\begin{cases} -2x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 0, \\ 5x_3 = 0, \\ -7x_3 = 0. \end{cases} \tag{2.5.6}$$

Решение системы уравнений (2.5.6) можно представить в виде

$$\{x_1 = 3t,\ x_2 = t,\ x_3 = 0\},$$

где t – любое число, не равное 0. Таким образом,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

а вектор

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

является искомым собственным вектором.

Осталось рассмотреть характеристический корень $\lambda_3 = -4$ и найти соответствующий ему собственный вектор. Для этого решим систему уравнений

$$\begin{pmatrix} 1+4 & 6 & -2 \\ 0 & 3+4 & 5 \\ 0 & 0 & -4+4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

которую можно записать в виде

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 0, \\ \qquad 7x_2 + 5x_3 = 0, \\ \qquad\qquad 0 = 0. \end{cases} \qquad (2.5.7)$$

Преобразуем систему (2.5.7) к более удобному виду. Для этого исключим из рассмотрения третье уравнение, а к первому уравнению, умноженному на 5, прибавим второе уравнение, умноженное на 2. В результате получим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} 25x_1 + 44x_2 = 0, \\ \quad 7x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases} \qquad (2.5.8)$$

В системе (2.5.8) неизвестную x_2 можно выбрать в качестве свободной неизвестной, а неизвестные x_1 и x_3 – в качестве базисных неизвестных. Тогда решение системы (2.5.8) можно представить в виде

$$\left\{ x_1 = -\frac{44}{25}t,\ x_2 = t,\ x_3 = -\frac{7}{5}t \right\},$$

где t – любое число, не равное 0. Таким образом,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{44}{25}t \\ t \\ -\frac{7}{5}t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -\frac{44}{25} \\ 1 \\ -\frac{7}{5} \end{pmatrix},$$

а вектор

$$\begin{pmatrix} -\frac{44}{25} \\ 1 \\ -\frac{7}{5} \end{pmatrix}$$

является искомым собственным вектором. Пропорциональный этому вектору вектор, например

$$\begin{pmatrix} 44 \\ -25 \\ 35 \end{pmatrix}$$

так же является собственным с тем же собственным значением.

Ответ. Векторы

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 44 \\ -25 \\ 35 \end{pmatrix}$$

являются собственными с собственными значениями 1, 3 и -4 соответственно.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Можно ли складывать матрицы разного размера?
2. Как осуществляется операция умножения матрицы на число?
3. По какому правилу производится умножение матриц?
4. Что называется минором элемента квадратной матрицы?
5. Что называется алгебраическим дополнением элемента квадратной матрицы?
6. По какой формуле вычисляется определитель квадратной матрицы второго порядка?
7. По какой формуле вычисляется определитель квадратной матрицы третьего порядка?
8. Что называется обратной матрицей?
9. Для каких матриц существуют обратные?
10. Что называется теоремой Кронекера-Капелли?
11. Что такое формулы Крамера для решения систем линейных уравнений?
12. Для каких систем решение можно найти, используя формулы Крамера?
13. Какова схема решения систем линейных уравнений методом Гаусса?
14. Что называется базисной переменной?
15. Что называется свободной переменной?
16. Что называется собственным вектором матрицы?
17. Что называется собственным значением матрицы?
18. Что называется рангом матрицы?

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Выполнить действия

$$2\cdot\begin{pmatrix}0 & -7 & 3\\ 2 & 1 & 4\\ 3 & 0 & 5\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}1 & 8 & 1\\ 5 & -3 & -2\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}.$$

2. Транспонировать матрицу

$$\begin{pmatrix}-1 & 2 & 4 & 0\\ 3 & 7 & 8 & 1\\ 0 & 1 & -3 & 5\end{pmatrix}.$$

3. Выполнить действие

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

4. Вычислить определитель матрицы

$$\begin{pmatrix}3 & 4 & 1\\ -3 & -2 & 1\\ -3 & -4 & 0\end{pmatrix}.$$

5. Решить систему уравнений методом Крамера

$$\begin{cases}2x_1+2x_2+3x_3=1,\\ 2x_1+x_2+7x_3=-4,\\ x_1+x_2+x_3=1.\end{cases}$$

6. Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3-2x_4=6,\\ 2x_1-x_2-2x_3-3x_4=8,\\ 3x_1+2x_2-x_3+2x_4=4,\\ 2x_1-3x_2+2x_3+x_4=-8.\end{cases}$$

7. Найти обратную матрицу к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 9 \end{pmatrix},$$

воспользовавшись формулой,

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \left(\overline{A} \right)^T$$

где символом Δ обозначен определитель матрицы A, а символ $\bar{A}$ – присоединенная матрица к матрице

8. Найти с помощью преобразования строк обратную матрицу к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

воспользовавшись схемой

$$(A|E) \rightarrow (E|A^{-1}),$$

где символом E обозначена единичная матрица.

9. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

10. Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

в зависимости от параметра α

ЛИТЕРАТУРА

Основная:

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учебник для вузов. – М.: Физматлит, 2006.
2. Боревич З.И. Определители и матрицы. - СПб.: Издательство «Лань», 2004.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Сборник задач по высшей математике: Учебное пособие. – М.: Физматлит, 2001.
4. Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М., Фридман М.Н. Высшая математика для экономистов: Учебник для вузов. - М.: ЮНИТИ, 2003.

Дополнительная:

5. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Шишкин А.А. Линейная алгебра в вопросах и задачах: Учебное пособие. – М.: Физматлит, 2002.
6. Натансон И.П. Краткий курс высшей математики. - СПб.: Издательство «Лань», 2005.
7. Сборник задач по высшей математике для экономистов: Учебное пособие / Под ред. В.И.Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2004.
8. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. - СПб.: Издательство «Лань», 2006.
9. Шипачев В.С. Высшая математика. - М.: Высшая школа, 2002.