Доктор физико-математических наук, профессор

К. Л. САМАРОВ

МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие по разделу

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

СОДЕРЖАНИЕ

1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1.1 Таблица интегралов. Свойства интегралов

Вычисление неопределенных интегралов основано на использовании таблицы интегралов:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ (n \neq -1);$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C;$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C;$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$$

$$\int \sin ax\, dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C;$$

$$\int \cos ax\, dx = \frac{1}{a}\sin ax + C;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a}\operatorname{tg} ax + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a}\operatorname{ctg} ax + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C;$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C;$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C;$$

а также на использовании следующего свойства

$$\int \left(c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)\right) dx = c_1 \int f_1(x) dx + c_2 \int f_2(x) dx \quad ,$$

где c_1 и c_2 – произвольные числа.

Пример 1. Вычислить интеграл

$$I = \int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^7}} + \frac{4}{x} \right) dx .$$

Решение.

$$I = \int x^{-\frac{7}{3}} dx + 4\int \frac{dx}{x} = \frac{x^{-\frac{4}{3}}}{\left(-\frac{4}{3}\right)} + 4\ln|x| + C = -\frac{3}{4\sqrt[3]{x^4}} + 4\ln|x| + C .$$

1.2 Интегрирование подстановкой (заменой переменной)

Если $F(x)$ – произвольная первообразная функции $f(x)$, то

$$\int f(u(x)) \cdot u'(x) dx = \int f(u(x))\, du(x) = \int f(u)\, du = F(u(x)) + C .$$

Пример 2. Вычислить интеграл

$$I = \int \frac{x \ dx}{\sqrt[5]{8x^2 - 7}} .$$

Решение.

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{\sqrt[5]{8x^2 - 7}} = \frac{1}{16}\int \left(8x^2 - 7\right)^{-\frac{1}{5}} \cdot d\left(8x^2 - 7\right) =$$

$$= \frac{1}{16} \cdot \frac{\left(8x^2 - 7\right)^{\frac{4}{5}}}{\left(\frac{4}{5}\right)} + C = \frac{5}{64} \cdot \left(8x^2 - 7\right)^{\frac{4}{5}} .$$

1.3 Интегрирование по частям

Если подынтегральную функцию можно представить в виде $\int u dv$, где

$$u = u(x), \ v = v(x),$$

то

$$\int u dv = uv - \int v du .$$

Пример 3. Вычислить интеграл

$$I = \int (3x+5)\sin(4x-7)dx$$

и сделать проверку дифференцированием.

Решение. Воспользуемся методом интегрирования по частям:

$$u = 3x+5 \Rightarrow du = 3dx, \quad \sin(4x-7)dx = dv \Rightarrow v = -\frac{1}{4}\cos(4x-7) \ .$$

Далее получаем

$$I = -\frac{3x+5}{4}\cos(4x-7) + \frac{3}{4}\int \cos(4x-7)dx =$$

$$= -\frac{(3x+5)}{4}\cos(4x-7) + \frac{3}{16}\int \cos(4x-7)d(4x-7) =$$

$$= -\frac{(3x+5)}{4}\cos(4x-7) + \frac{3}{16}\sin(4x-7) + C.$$

Сделаем проверку:

$$\left(-\frac{3x+5}{4}\cos(4x-7) + \frac{3}{16}\sin(4x-7) + C\right)' =$$

$$= -\frac{3}{4}\cos(4x-7) - \frac{3x+5}{4}\left(-\sin(4x-7)\right)\cdot 4 + \frac{3}{16}\cos(4x-7)\cdot 4 =$$

$$= -\frac{3}{4}\cos(4x-7) + (3x+5)\cdot\sin(4x-7) + \frac{3}{4}\cos(4x-7) = (3x+5)\cdot\sin(4x-7)$$

Получена подынтегральная функция, значит все сделано верно.

Пример 4. Вычислить интеграл

$$I = \int x\ln 2x dx.$$

Решение. Воспользуемся методом интегрирования по частям:

$$u = \ln 2x \Rightarrow du = \frac{1}{2x}\cdot 2dx = \frac{dx}{x}, \quad xdx = dv \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}.$$

Далее получаем

$$I=\ln 2x\cdot\frac{x^2}{2}-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x}=\frac{x^2\ln 2x}{2}-\frac{1}{2}\int xdx=\frac{x^2\ln 2x}{2}-\frac{x^2}{4}+C.$$

1.4 Вычисление интегралов от рациональных дробей. Метод неопределенных коэффициентов

Вычисление интеграла $\int R(x)dx$ от правильной рациональной дроби

$$R(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}\quad (m<n)$$

осуществляется при помощи разложения дроби $R(x)$ в сумму простейших дробей вида

$$\frac{A}{x-a},\quad \frac{B}{(x-b)^k},\quad \frac{Cx+D}{x^2+px+q},\quad \frac{Ex+F}{(x^2+px+q)^k}\quad \left(p^2-4q<0\right),$$

коэффициенты A, B, C, D, E, F которых можно вычислить, используя метод неопределенных коэффициентов, что будет показано на примерах.

Вычисление интеграла $\int R(x)dx$ от неправильной рациональной дроби

$$R(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}\quad (m\ge n)$$

осуществляется сначала при помощи выделения целой части рациональной дроби $R(x)$, например, методом деления многочленов «в столбик»

$$R(x)=S_{m-n}(x)+\frac{Q_l(x)}{Q_n(x)}\quad (m>n,\, l<n),$$

а затем при помощи разложения полученной правильной дроби

$$Q(x)=\frac{Q_l(x)}{Q_n(x)}\quad (l<n)$$

в сумму простейших дробей.

Пример 5. Вычислить интеграл

$$I=\int \frac{5x+4}{x^3-4x^2-21x}dx .$$

Решение. Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби:

$$\frac{5x+4}{x^3-4x^2-21x}=\frac{5x+4}{x(x+3)(x-7)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{x-7}=$$

$$=\frac{A(x+3)(x-7)+Bx(x-7)+Cx(x+3)}{x(x+3)(x-7)}.$$

Следовательно,

$$5x+4=A(x+3)(x-7)+Bx(x-7)+Cx(x+3).$$

Для определения коэффициентов A,B и C подставим в это соотношение значения $x=0$, $x=-3$ и $x=7$ соответственно:

$$4=-21A\Rightarrow A=-\frac{4}{21};$$

$$-11=30B\Rightarrow B=-\frac{11}{30};$$

$$39=70C\Rightarrow C=\frac{39}{70}.$$

В результате получаем

$$I=-\frac{4}{21}\int\frac{dx}{x}-\frac{11}{30}\int\frac{d(x+3)}{x+3}+\frac{39}{70}\int\frac{d(x-7)}{x-7}=$$

$$=-\frac{4}{21}\ln|x|-\frac{11}{30}\ln|x+3|+\frac{39}{70}\ln|x-7|+C.$$

Пример 6. Вычислить интеграл

$$I=\int\frac{(x-5)\ dx}{x^3-6x^2+9x}.$$

Решение. Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби:

$$\frac{x-5}{x^3-6x^2+9x}=\frac{x-5}{x(x-3)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{(x-3)^2}=\frac{A(x-3)^2+Bx(x-3)+Cx}{x(x-3)^2}.$$

Следовательно,

$$x-5=A(x-3)^2+Bx(x-3)+Cx.$$

Для определения коэффициентов A, B и C подставим в это соотношение значения $x=0$, $x=3$ и, например, $x=1$ соответственно:

$$-5=9A \Rightarrow A=-\frac{5}{9};$$

$$-2=3C \Rightarrow C=-\frac{2}{3};$$

$$-4=16A-2B+C.$$

Из последнего соотношения можно найти коэффициент B:

$$B=\frac{1}{2}(-16A-C+4)=\frac{1}{2}\left(\frac{80}{9}+\frac{2}{3}+4\right)=\frac{61}{9}.$$

Поэтому

$$I=-\frac{5}{9}\int\frac{dx}{x}+\frac{61}{9}\int\frac{d(x+3)}{x+3}-\frac{2}{3}\int\frac{d(x+3)}{(x+3)^2}=-\frac{5}{9}\ln|x|+\frac{61}{9}\ln|x+3|+\frac{2}{3(x+3)}+C.$$

Пример 7. Вычислить интеграл

$$I=\int\frac{(x-2)\ \ dx}{x^3+6x^2+10x}.$$

Решение. Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби:

$$\frac{x-2}{x^3+6x^2+10x}=\frac{x-2}{x(x^2+6x+10)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+6x+10}.$$

Следовательно,

$$x-2=A(x^2+6x+10)+Bx^2+Cx=(A+B)x^2+(6A+C)x+10A.$$

Далее получаем

$$-2=10A \Rightarrow A=-\frac{1}{5},$$

$$A+B=0 \Rightarrow B=-A=\frac{1}{5},$$

$$6A+C=1 \Rightarrow C=1-6A=1+\frac{6}{5}=\frac{11}{5}.$$

Поэтому

$$I=-\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x}+\frac{1}{5}\int\frac{(x+11)dx}{(x^2+6x+10)}=$$

$$=-\frac{1}{5}\ln|x|+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+6x+10)}{(x^2+6x+10)}+\frac{1}{5}\int\frac{8dx}{(x^2+6x+10)}=$$

$$=-\frac{1}{5}\ln|x|+\frac{1}{10}\ln(x^2+6x+10)+\frac{8}{5}\int\frac{dx}{(x+3)^2+1}=$$

$$=-\frac{1}{5}\ln|x|+\frac{1}{10}\ln(x^2+6x+10)+\frac{8}{5}\operatorname{arctg}(x+3)+C.$$

1.5 Вычисление интегралов, содержащих иррациональные выражения

Пример 8. Вычислить интеграл

$$I=\int\frac{(x-9)\ dx}{\sqrt{x^2-8x+5}}.$$

Решение. Заметив, что

$$\left(x^2-8x+5\right)'=2x-8,$$

выделим в числителе подынтегральной функции производную от квадратного трехчлена и разобьем интеграл на 2 слагаемых

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{(2x-8)-10}{\sqrt{x^2-8x+5}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(2x-8)\ dx}{\sqrt{x^2-8x+5}}-\frac{10}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-8x+5}}=\frac{1}{2}I_1-5I_2.$$

Далее получаем

$$I_1=\int\frac{(2x-8)\ dx}{\sqrt{x^2-8x+5}}=\int\left(x^2-8x+5\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot d\left(x^2-8x+5\right)=2\left(x^2-8x+5\right)^{\frac{1}{2}}+C_1\ ,$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 8x + 5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 8x + 16 - 11}} = \int \frac{d(x-4)}{\sqrt{(x-4)^2 - 11}} = ,$$

$$= \ln\left| x - 4 + \sqrt{(x-4)^2 - 11} \right| + C_2$$

$$I = \frac{1}{2} I_1 - 5I_2 = \left(x^2 - 8x + 5\right)^{\frac{1}{2}} - 5\ln\left| x - 4 + \sqrt{(x-4)^2 - 11} \right| + C .$$

Пример 9. Вычислить интеграл

$$I = \int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2 - 4}} .$$

Решение.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2 - 4}} = \int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{x^2\left(5 - \frac{4}{x^2}\right)}} = \int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{5 - \frac{4}{x^2}}} = -\int \frac{d\frac{1}{x}}{\sqrt{5 - \frac{4}{x^2}}} =$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{d\left(\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{5 - \left(\frac{2}{x}\right)^2}} = -\frac{1}{2} \arcsin \frac{2}{x\sqrt{5}} + C .$$

Пример 10. Вычислить интеграл

$$I = \int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x}} .$$

Решение. Совершим замену переменного вида

$$\sqrt[3]{x} = t .$$

Тогда

$$x = t^3 \Rightarrow dx = 3t^2 dt \Rightarrow I = 3\int \frac{t^2 dt}{1+t} = 3\int \frac{(t^2 - 1 + 1)dt}{1+t} = 3\int \frac{(t^2 - 1)dt}{1+t} + 3\int \frac{1 \cdot dt}{1+t} =$$

$$= 3\int (t-1)dt + 3\ln|t| = \frac{3t^2}{2} - 3t + 3\ln|t| + C = \frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2} - 3\sqrt[3]{x} + 3\ln\left|\sqrt[3]{x}\right| + C.$$

1.6 Вычисление интегралов, содержащих тригонометрические выражения

Пример 11. Вычислить интеграл

$$\int \cos^5 x \cdot \sin^6 x \, dx$$

Решение.

$$\int \cos^5 x \cdot \sin^6 x \, dx = \int \cos^4 x \cdot \sin^6 x \cdot \cos x \, dx =$$

$$= \int (1 - \sin^2 x)^2 \cdot \sin^6 x \cdot d(\sin x) = \int (1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x) \cdot \sin^6 x \cdot d(\sin x) =$$

$$= \int (\sin^6 x - 2\sin^8 x + \sin^{10} x) \cdot d(\sin x) = \frac{\sin^7 x}{7} - \frac{2\sin^9 x}{9} + \frac{\sin^{11} x}{11} + C.$$

2. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

2.1 Формула Ньютона-Лейбница

Если $F(x)$ – произвольная первообразная функции $f(x)$, то выполнено следующее соотношение

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

2.2 Замена переменной в определенном интеграле

Если в определенном интеграле $\int_a^b f(x)\,dx$ сделать замену переменной

$$x = x(t);\ x(t = \alpha) = a,\ x(t = \beta) = b,$$

то будет выполнено соотношение:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x(t)) \cdot x'(t)dt.$$

Пример 12. Вычислить определенный интеграл

$$I=\int\limits_0^4 \frac{xdx}{\sqrt{2x+1}+1}.$$

Решение. Сделаем в интеграле замену переменной

$$\sqrt{2x+1}+1=t.$$

Тогда значению $x=0$ будет соответствовать значение $t=2$, а значению $x=4$ – значение $t=4$.

Далее получаем

$$\sqrt{2x+1}=t-1,\ 2x+1=(t-1)^2,\ x=\frac{(t-1)^2-1}{2}=\frac{t^2-2t}{2},\ dx=(t-1)dt\ ,$$

$$I=\int\limits_2^4 \frac{\left(t^2-2t\right)\cdot(t-1)}{2t}dt=\frac{1}{2}\int\limits_2^4 (t-2)(t-1)dt=\frac{1}{2}\int\limits_2^4 (t^2-3t+2)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{3}-\frac{3t^2}{2}+2t\right)\Bigg|_2^4=\frac{1}{2}\left(\frac{64}{3}-24+8\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{8}{3}-6+4\right)=\frac{7}{3}.$$

2.3 Формула интегрирования по частям для определенного интеграла

Для определенного интеграла формула интегрирования по частям имеет вид

$$\int\limits_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int\limits_a^b vdu.$$

Пример 13. Вычислить определенный интеграл

$$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (3x+10)\cdot\sin xdx.$$

Решение. Воспользуемся методом интегрирования по частям:

$$I=-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (3x+10)d\cos x=-(3x+10)\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos xdx=$$

$$= -\left(\frac{3\pi}{2} + 10\right) \cdot \cos\frac{\pi}{2} + 10 \cdot \cos 0 + 3\sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 10 + 3 = 13.$$

3. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

3.1 Площадь плоской фигуры, ограниченной линиями, заданными явно

Площадь плоской фигуры, ограниченной линиями

$$x = a,\ x = b\ (a \le b),\ y = f_1(x),\ y = f_2(x) \quad \left(f_1(x) \le f_2(x)\right),$$

вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)\,dx\,.$$

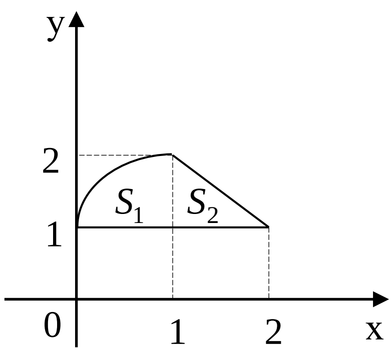
Пример 14. Построить схематический чертеж и найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = 1 + 2x - x^2, \quad y = 3 - x, \quad y = 1.$$

Решение. Найдем сначала точки пересечения линий:

$$1 + 2x - x^2 = 3 - x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 2 \Leftrightarrow y_1 = 2,\ y_2 = 1;$$

$$1 + 2x - x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x_3 = 0,\ x_4 = 2 \Leftrightarrow y_3 = y_4 = 1.$$



Далее получаем (см. рисунок):

$$S = S_1 + S_2 = \int_0^1 (1 + 2x - x^2 - 1)\,dx + \int_1^2 (3 - x - 1)\,dx =$$

$$=\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1+\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2=\left(1-\frac{1}{3}\right)+(4-2)-(2-\frac{1}{2})=\frac{7}{6}.$$

3.2 Площадь фигуры на плоскости, ограниченной кривой, заданной параметрически

Площадь S фигуры на плоскости, ограниченной замкнутой кривой, заданной параметрическими соотношениями

$$x=x(t),\ y=y(t) \quad \left(t_1\le t\le t_2\right),$$

пробегаемой при возрастании параметра t против хода часовой стрелки и оставляющей рассматриваемую фигуру слева от себя, вычисляется с помощью любой из следующих трех формул:

$$S=-\int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt\,,$$

$$S=\int_{t_1}^{t_2} x(t)y'(t)dt\,,$$

$$S=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left(x(t)y'(t)-x(t)y'(t)\right)dt\,.$$

3.3 Объем тела с известными площадями поперечных сечений

Объём тела с площадью поперечного сечения

$$S=S(t) \quad (a\le t\le b)$$

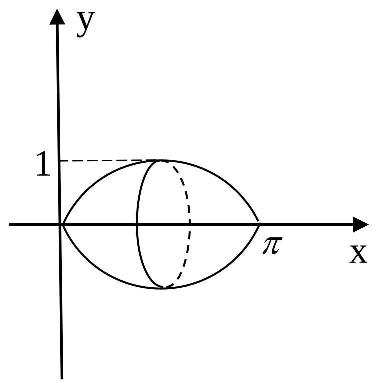
вычисляется по формуле

$$V=\int_a^b S(t)dt\,.$$

Пример 15. Найти объем тела, образованного вращением полуволны синусоиды $y=\sin x$ $(0\le x\le\pi)$ вокруг оси OX.

Решение. Сечение тела плоскостью x = const является кругом с радиусом $r=\sin x$ и площадью (см. рисунок)

$$S = \pi r^2 = \pi \sin^2 x.$$



Следовательно,

$$V = \pi \int_0^\pi \sin^2 x dx = \pi \int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \pi \cdot \frac{x}{2} \Bigg|_0^\pi - \frac{\pi}{4} \sin 2x \Bigg|_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}.$$

Пример 16. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси Oy фигуры, ограниченной кривыми

$$y = -x^2 + 4x, \quad y = 0.$$

Решение. Решая относительно x уравнение $-x^2 + 4x = y$, находим пределы изменения x при каждом значении y:

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-y}.$$

Парабола $y = -x^2 + 4x$ пересекает ось Ox в точках $x = 0, x = 4$, ее вершина имеет координаты $(x = 2, y = 4)$, а ветви направлены вниз. Сечение рассматриваемого тела вращения плоскостью $y = const$ существует для $0 \le y \le 4$ и при $0 \le y < 4$ является круговым кольцом, внешний радиус которого равен $2 + \sqrt{4-y}$, а внутренний радиус равен $2 - \sqrt{4-y}$. При $y = 4$ внутренний и внешний радиусы кольца совпадают, и кольцо вырождается в окружность. Поэтому площадь сечения $S(y)$ равна

$$S(y) = \pi\left[\left(2+\sqrt{4-y}\right)^2 - \left(2-\sqrt{4-y}\right)^2\right] = 8\pi\sqrt{4-y}\,.$$

Отсюда вытекает, что объем тела вращения относительно оси Oy равен

$$V = \int_0^4 S(y)dy = 8\pi\int_0^4 \sqrt{4-y}dy = -8\pi\int_0^4 \sqrt{4-y}d(4-y)\,.$$

Если теперь сделать замену $z = 4-y$, то мы получим

$$V = -8\pi\int_0^4 \sqrt{4-y}d(4-y) = -8\pi\int_4^0 \sqrt{z}d(z) = 8\pi\int_0^4 \sqrt{z}d(z) = 8\pi\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4 = \frac{128}{3}\pi\,.$$

3.4 Длина дуги отрезка кривой на плоскости, заданной явно

Длина дуги отрезка гладкой кривой на плоскости, заданной соотношением

$$y = y(x) \quad (a \le x \le b)\,,$$

вычисляется по формуле

$$s = \int_a^b \sqrt{1+y'^2(x)}dx\,.$$

Пример 17. Найти длину дуги кривой

$$y = \ln\cos x, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{6}.$$

Решение. Воспользовавшись формулой для длины дуги кривой, заданной явной функцией, получим

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1+y'^2(x)}dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1+\left(\frac{-\sin x}{\cos x}\right)^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{\cos^2 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{d(\sin x)}{1-\sin^2 x} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{1-t^2}.$$

Последний интеграл (неопределенный) входит в таблицу интегралов, поэтому

$$s=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{1-t^2}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

3.5 Длина дуги отрезка кривой на плоскости, заданной параметрически

Длина дуги отрезка гладкой кривой на плоскости, заданной параметрическими соотношениями

$$x=x(t),\ y=y(t)\quad \left(t_1\le t\le t_2\right),$$

вычисляется по формуле

$$s=\int\limits_{t_1}^{t_2}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt.$$

3.6 Длина дуги отрезка кривой в пространстве, заданной параметрически

Длина дуги отрезка гладкой кривой в пространстве, заданной параметрическими соотношениями

$$x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)\quad \left(t_1\le t\le t_2\right),$$

вычисляется по формуле

$$s=\int\limits_{t_1}^{t_2}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt.$$

Пример 18. Найти длину дуги плоской кривой, заданной параметрическими формулами

$$x=\cos t+t\sin t,\quad y=\sin t-t\cos t,\quad 0\le t\le 2\pi.$$

Решение. Поскольку

$$x'(t)=(\cos t+t\sin t)'=-\sin t+\sin t+t\cos t=t\cos t,$$

$$y'(t)=(\sin t-t\cos t)'=\cos t-\cos t+t\sin t=t\sin t,$$

то

$$s=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{(t\cos t)^2+(t\sin t)^2}dt=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{t^2}dt=\int\limits_0^{2\pi}tdt=\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^{2\pi}=2\pi^2.$$

3.7 Площадь поверхности, образованной вращением кривой вокруг оси Ox

Площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox гладкой кривой

$$y=y(x)\quad (a\le x\le b)\ ,$$

вычисляется по формуле

$$P=2\pi\int\limits_a^b|y|\sqrt{1+y'^2(x)}dx\,.$$

Пример 19. Найти площадь поверхности, образованной при вращении вокруг оси Ox кривой

$$y=3+\sqrt{4-x^2},\quad -2\le x\le 2.$$

Решение. Поскольку

$$y'(x)=-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}},$$

то

$$P=2\pi\int\limits_{-2}^{2}|y|\sqrt{1+y'^2(x)}dx=2\pi\int\limits_{-2}^{2}\left(3+\sqrt{4-x^2}\right)\sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2}}dx=$$

$$=2\pi\int\limits_{-2}^{2}\left(3+\sqrt{4-x^2}\right)\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}dx=4\pi\left[\int\limits_{-2}^{2}\left(\frac{3}{\sqrt{4-x^2}}+1\right)dx\right]=$$

$$=4\pi\left[\left.3\arcsin\frac{x}{2}\right|_{-2}^{2}+\left.x\right|_{-2}^{2}\right]=4\pi(3\pi+4).$$

3.8 Площадь поверхности, образованной вращением кривой вокруг оси Oy

Площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Oy гладкой кривой

$$x = x(y) \quad (a \le y \le b) ,$$

вычисляется по формуле

$$P = 2\pi \int_a^b |x| \sqrt{1 + x'^2(y)}\, dy .$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что называется первообразной функции?
2. Каким свойством обладают первообразные одной и той же функции?
3. Что называется неопределенным интегралом?
4. Какими свойствами обладают неопределенные интегралы?
5. Что такое интегрирование подстановкой?
6. Что такое интегрирование по частям?
7. Что называется простейшей дробью?
8. Как выделить целую часть рациональной дроби?
9. Как разложить дробь на простейшие?
10. Как вычислить интеграл от рациональной дроби?
11. Что такое определенный интеграл?
12. Какими свойствами обладает определенный интеграл?
13. Что такое формула Ньютона-Лейбница?
14. Как осуществляется замена переменной в определенном интеграле?
15. Как осуществляется интегрирование по частям в определенном интеграле?
16. Как найти площадь плоской фигуры, ограниченной линиями, заданными явно?
17. Как найти площадь плоской фигуры, ограниченной кривой, заданной параметрически?
18. Как найти объем тела с известными площадями поперечных сечений?
19. Как найти длину дуги отрезка кривой, заданной явно?
20. Как найти длину дуги отрезка кривой на плоскости, заданной параметрически?
21. Как найти длину дуги отрезка кривой в пространстве, заданной параметрически?

22. Как найти площадь поверхности, образованной вращением кривой вокруг оси *Ox*?
23. Как найти площадь поверхности, образованной вращением кривой вокруг оси *Oy*?

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Вычислить интегралы:

1. $\int \mathrm{ctg}^5 x\, dx$;

2. $\int \frac{x^5+2}{x^3-x}\, dx$;

3. $\int \frac{4x^2-x+1}{x^3+1}\, dx$;

4. $\int \frac{1}{x^3-2x^2+x}\, dx$;

5. $\int x\,\mathrm{arctg} x\, dx$;

6. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^{-\frac{2}{3}}-1}}\, dx$.

Найти:

7. Длину дуги кривой, заданной явной формулой

$$y=\ln\cos x, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{3};$$

8. Длину дуги кривой, заданной параметрическими формулами

$$x=e^t\sin t, \quad y=e^t\cos t, \quad \ln 2 \le t \le \ln 3;$$

9. Площадь фигуры, расположенной в I квадранте координатной плоскости и ограниченной линиями

$$y=-x^2+4, \quad y=3x, \quad y=0;$$

10. Объем тела, образованного при вращении вокруг оси Ox фигуры, описанной в задании 9.

ЛИТЕРАТУРА

Основная:

1. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А. Математический анализ в вопросах и задачах: Учебное пособие / Под ред. В.Ф. Бутузова – М.: Физматлит, 2001.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Сборник задач по высшей математике: Учебное пособие. – М.: Физматлит, 2001.
3. Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М., Фридман М.Н. Высшая математика для экономистов: Учебник для вузов. - М.: ЮНИТИ, 2003.
4. Натансон И.П. Краткий курс высшей математики. - СПб.: Издательство «Лань», 2005.

Дополнительная:

5. Ведина О.И., Десницкая В.Н., Варфоломеева Г.Б., Тарасюк А.Ф. Математика. Математический анализ для экономистов: Учебник. – М.: Инф.-изд. дом «Филинъ», Рилант, 2001.
6. Гурова З.И., Каролинская С.Н., Осипова А.П. Математический анализ. Начальный курс с примерами и задачами. / Под ред. А.И. Кибзуна – М.: Физматлит, 2003.
7. Сборник задач по высшей математике для экономистов: Учебное пособие. / Под ред. В.И.Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2004.
8. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т. 1,2.- М.: Физматлит, 2002.
9. Шипачев В.С. Высшая математика. - М.: Высшая школа, 2002.