Доктор физико-математических наук, профессор

К. Л. САМАРОВ

МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие по разделу

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

СОДЕРЖАНИЕ

1. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1.1 Частные производные первого порядка

Частной производной $\frac{\partial u}{\partial x}$ функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ по переменной x является производная функции переменной x, полученной из исходной функции при условии, что остальные переменные фиксированы. Частные производные функции по другим переменным $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ определяются аналогично.

1.2 Градиент функции

Градиентом функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ в точке $A = (x_0, y_0, z_0)$ называется вектор, координаты которого равны частным производным функции в этой точке:

$$\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_A ; \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_A ; \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_A \right).$$

В направлении градиента функция имеет наибольший рост.

1.3 Касательная плоскость к поверхности

Если поверхность в трехмерном пространстве задана уравнением

$$z = f(x, y),$$

то уравнение касательной плоскости к поверхности в точке $A = (x_0, y_0, z_0)$, где $z_0 = f(x_0, y_0)$, имеет вид

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_A (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_A (y - y_0).$$

1.4 Нормаль к поверхности

- Нормалью к поверхности в трехмерном пространстве называется прямая линия, перпендикулярная к касательной плоскости и проходящая через точку касания.
- Если поверхность в трехмерном пространстве задана уравнением

$$z = f(x, y),$$

то уравнение нормали к поверхности в точке $A = (x_0, y_0, z_0)$, где $z_0 = f(x_0, y_0)$, имеет вид

$$\frac{x - x_0}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_A\right)} = \frac{y - y_0}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_A\right)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

1.5 Производная по направлению, заданному вектором

Производной от функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ в точке $A = (x_0, y_0, z_0)$ по направлению, заданному вектором $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$, называется число, которое определяется по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{a}} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_A \cdot a_x + \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_A \cdot a_y + \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_A \cdot a_z \right).$$

Таким образом, производная функции по направлению, заданному вектором $\vec{a}$, равна скалярному произведению градиента этой функции на единичный вектор, задающий направление $\vec{a}$:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{a}} = \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}, grad\ u \right).$$

1.6 Поверхность уровня функции трех и более переменных

Поверхностью уровня функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ называется множество точек трехмерного пространства, координаты которых удовлетворяют уравнению $f(x, y, z) = const$.

1.7 Линия уровня функции двух переменных

Линией уровня функции двух переменных $u = f(x, y)$ называется множество точек двумерного пространства, координаты которых удовлетворяют уравнению $f(x, y) = const$.

1.8 Однородная функция. Степень однородности функции

Функция $u = f(x, y, z)$ называется однородной функцией степени однородности k, если для любого числа $\lambda\ (\lambda \neq 0)$ выполнено соотношение

$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^k \cdot f(x, y, z).$$

1.9 Первый дифференциал функции

Первый дифференциал функции двух переменных $u = f(x, y)$ в точке $A = (x_0, y_0)$ определяется по формуле

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_A \cdot dx + \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_A \cdot dy$$

и является в рассматриваемой точке A функцией двух переменных dx, dy.

1.10 Частные производные высших порядков

Частные производные функции двух переменных $u = f(x, y)$ второго порядка определяются по формулам

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

1.11 Второй дифференциал функции

Второй дифференциал функции двух переменных $u = f(x, y)$ в точке $A = (x_0, y_0)$ определяется по формуле

$$d^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x}\Big|_A \cdot (dx)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\Big|_A \cdot (dx) \cdot (dy) + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y}\Big|_A \cdot (dy)^2$$

и так же, как и первый дифференциал, является в рассматриваемой точке A функцией двух переменных dx, dy.

В случае, если функция зависит не от двух, а от другого количества переменных, в приведенных выше определениях нужно сделать соответствующие изменения.

Пример 1. Для функции

$$z = \sqrt{\frac{x}{y}}$$

в точке $A = (4;\ 1)$ найти:

а) частные производные по переменным x и y;

б) градиент;

в) производную по направлению вектора $\vec{a} = (1;-1)$;

г) первый дифференциал;

д) второй дифференциал.

Решение. Проведем следующие вычисления:

а) $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}},\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{3}{2}},$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{A(4,1)} = \frac{1}{4},\ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{A(4,1)} = -1.$$

б) $$\operatorname{grad} z\Big|_{A(4,1)} = \left(\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{A(4,1)} ; \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{A(4,1)} \right) = \left(\frac{1}{4}; -1 \right).$$

в) $$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},\quad \left.\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}\right|_{A(4,1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{4} \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) \right) = \frac{5}{4\sqrt{2}}.$$

г) $$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} dx - \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{3}{2}} dy,$$

$$dz\Big|_{A(4,1)}=\frac{1}{4}dx-dy.$$

д) $$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}\right)=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}y^{-\frac{1}{2}},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial x}\Big|_{A(4,1)}=-\frac{1}{32},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{3}{2}}\right)=-\frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{3}{2}},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{A(4,1)}=-\frac{1}{8},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}\right)=-\frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{3}{2}},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\Big|_{A(4,1)}=-\frac{1}{8},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{3}{2}}\right)=\frac{3}{4}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{5}{2}},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial y}\Big|_{A(4,1)}=\frac{3}{2},$$

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial x}(dx)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(dx)\cdot(dy)+\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial y}(dy)^2,$$

$$d^2z\Big|_{A(4,1)}=-\frac{1}{32}(dx)^2-\frac{1}{4}(dx)\cdot(dy)+\frac{3}{2}(dy)^2.$$

2. ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

2.1 Критическая точка функции нескольких переменных

Критической точкой функции нескольких переменных, называется точка, в которой все частные производные этой функции равны нулю или не существуют.

В данном разделе будем рассматривать только такую ситуацию, когда частные производные функции существуют и равны нулю.

Критические точки функции являются точками, подозрительными на экстремум.

2.2 Экстремум функции нескольких переменных. Схема исследования

Чтобы понять, существует ли экстремум в подозрительной на экстремум точке функции двух переменных $z=z(x,y)$, необходимо:

1. Вычислить в рассматриваемой точке вторые частные производные

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial x},\ B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\ C=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial y}.$$

2. Подставить найденные значения вторых частных производных в формулу для второго дифференциала функции $z=z(x,y)$:

$$d^2z=A\cdot(dx)^2+2B\cdot(dx)\cdot(dy)+C\cdot(dy)^2.$$

3. Исследовать знак функции d^2z в зависимости от значений dx и dy, при условии, что эти переменные одновременно не обращаются в нуль.

4. Если при любых значениях dx и dy, одновременно не обращающихся в нуль, функция d^2z положительна, то в рассматриваемой подозрительной на экстремум точке минимум.

5. Если при любых значениях dx и dy, одновременно не обращающихся в нуль, функция d^2z отрицательна, то в рассматриваемой подозрительной на экстремум точке максимум.

6. Если функция d^2z меняет знак, то в рассматриваемой подозрительной на экстремум точке экстремума нет.

7. В остальных случаях требуется гораздо более сложное дополнительное исследование.

Исследование знака функции d^2z в подозрительной на экстремум точке осуществляется по следующей схеме:

1. Сначала вычисляется значение выражения $\Delta=AC-B^2$.

2. В случае $\Delta<0$ в рассматриваемой критической точке экстремума нет, в случае $\Delta=0$ необходимы дополнительные исследования.

3. В случае $\Delta>0, A>0$, что влечет за собой условие $C>0$, в рассматриваемой критической точке минимум; в случае $\Delta>0, A<0$, что влечет за собой условие $C<0$, в рассматриваемой критической точке максимум.

Пример 2. Исследовать функцию

$$z = 6x^2y^3 - 6x^2 - 9y^2 + 1$$

на экстремумы.

Решение. Сначала найдем критические точки:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12xy^3 - 12x = 0, \\ 18x^2y^2 - 18y = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x\left(y^3 - 1\right) = 0, \\ 18y\left(x^2y - 1\right) = 0. \end{cases}$$

Следовательно, существует три критических точки $M_1(0;\ 0)$, $M_2(1;\ 1)$, $M_3(-1;\ 1)$.

Вычислим вторые частные производные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial x} = 12y^3 - 12,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 36xy^2,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial y} = 36x^2y - 18.$$

В точке $M_1(0;\ 0)$

$$A = 12y^3 - 12\Big|_{(0;0)} = -12 < 0,\ B = 36xy^2\Big|_{(0;0)} = 0,\ C = 36x^2y - 18\Big|_{(0;0)} = -18 < 0,$$

$$\Delta = AC - B^2 = 216 - 0 > 0\ ,$$

следовательно, эта точка является точкой максимума, причем $z_{\max} = z(0;0) = 1$.

В точке $M_2(1;\ 1)$

$$A = 12y^3 - 12\Big|_{(1;1)} = 0,\ B = 36xy^2\Big|_{(1;1)} = 36,$$
$$C = 36x^2y^2 - 18\Big|_{(1;1)} = 18, \Delta = -1296 < 0,$$

следовательно, в этой точке экстремума нет.

В точке $M_3(-1;\ 1)$

$$A = 12y^3 - 12\Big|_{(1;1)} = 0,\ B = 36xy^2\Big|_{(-1;1)} = -36,$$
$$C = 36x^2y^2 - 18\Big|_{(-1;1)} = 18, \Delta = -1296 < 0,$$

следовательно, в этой точке экстремума нет.

2.3 Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой ограниченной области. Схема исследования

Наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x, y)$ в замкнутой ограниченной области находятся путем сравнения значений функции в критических точках внутри области со значениями функции в критических и в угловых точках границы области.

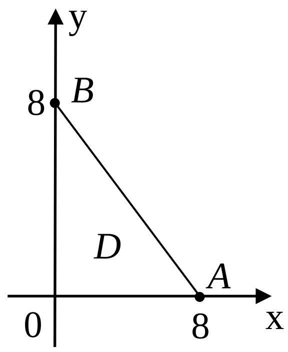
Пример 3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = xy - 2x - y$$

в области D, заданной неравенствами

$$\{x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 8\}.$$

Решение. Найдем критические точки внутри области D (см. рисунок):



$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 2 = 0, \\ x - 1 = 0. \end{cases}$$

Следовательно, единственной критической точкой внутри области D является точка $C = (1; 2)$.

Теперь найдем критические точки на внутренних участках границы D.

Для этого рассмотрим сначала участок AO. Поскольку

$$y = 0,\ z = -2x,\ x \in (0; 8),\ z' = -2 \neq 0,$$

то на этом участке нет критических точек.

Рассмотрим теперь участок *BO*. Поскольку

$$x=0,\ z=-y,\ y\in(0;8),\ z'=-1\neq 0,$$

то на этом участке так же нет критических точек.

Рассмотрим участок *AB*. На этом участке

$$y=8-x,\ x\in(0;8),\ z=x(8-x)-2x-8+x=-x^2+7x-8,$$

$$z'=-2x+7=0,\ x=3{,}5\in(0;\ 8), y=8-3{,}5=4{,}5\in(0;\ 8)\,.$$

Таким образом, на этом участке существует критическая точка $E=(3{,}5;\ 4{,}5)$.

В заключение сравним значения функции z в точках $C(1;\ 2)$, $E(3{,}5;\ 4{,}5)$, $O(0;\ 0)$, $A(8;\ 0)$ и $B(0;\ 8)$:

$$\begin{aligned}
&z(C)=z(1;\ 2)=-2;\\
&z(E)=z(3{,}5;\ 4{,}5)=4{,}25;\\
&z(O)=z(0;\ 0)=0;\\
&z(A)=z(8;\ 0)=-16;\\
&z(B)=z(0;\ 8)=-8.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\max_D z=z(3{,}5;\ 4{,}5)=4{,}25\,,$$
$$\min_D z=z(8;\ 0)=-16.$$

3. УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. МЕТОД МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА

3.1 Понятие условного экстремума. Уравнения связей

Под условным экстремумом понимается задача о нахождении экстремума функции нескольких переменных

$$u=f(x_1,...,x_n)$$

в случае, когда переменные $x_1,...,x_n$ удовлетворяют одному или нескольким уравнениям (условиям) связи

$$\varphi_1(x_1,...,x_n)=0, \varphi_2(x_1,...,x_n)=0,..., \varphi_k(x_1,...,x_n)=0 \quad (1\le k<n).$$

3.2 Функция Лагранжа. Множители Лагранжа. Схема исследования

Задача об условном экстремуме решается при помощи метода множителей Лагранжа, который заключается в следующем:

А) По формуле

$$L=f(x_1,...,x_n)+\lambda_1\cdot\varphi_1(x_1,...,x_n)+...+\lambda_k\cdot\varphi_k(x_1,...,x_n)$$

вводится в рассмотрение функция Лагранжа

$$L=L(x_1,...,x_n,\lambda_1,...,\lambda_k),$$

зависящая от $n+k$ переменных $x_1,...,x_n,\lambda_1,...,\lambda_k$. Переменные $\lambda_1,...,\lambda_k$ являются произвольными числами и называются множителями Лагранжа.

Б) Решается задача о нахождении критических точек функции Лагранжа.

В) Проводится исследование на экстремум каждой подозрительной на экстремум точки функции Лагранжа. Исследование проводится с учетом того, что дифференциалы $dx_1,...,dx_n$ переменных $x_1,...,x_n$ связаны k соотношениями

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}dx_1+\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}dx_2+...+\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}dx_n=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial\varphi_k}{\partial x_1}dx_1+\dfrac{\partial\varphi_k}{\partial x_2}dx_2+...+\dfrac{\partial\varphi_k}{\partial x_n}dx_n=0. \end{cases}$$

Пример 4. Найти экстремум функции $u=xy$ при условии $x+y=1$.

Решение. Введем функцию Лагранжа

$$L=L(x,y,\lambda)=xy+\lambda(x+y-1).$$

Найдем для функции Лагранжа точки, подозрительные на экстремум:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = \dfrac{\partial\left(xy + \lambda(x+y-1)\right)}{\partial x} = y + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = \dfrac{\partial\left(xy + \lambda(x+y-1)\right)}{\partial y} = x + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = \dfrac{\partial\left(xy + \lambda(x+y-1)\right)}{\partial \lambda} = x + y - 1 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\lambda, \\ y = -\lambda, \\ -2\lambda - 1 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}, \\ y = \dfrac{1}{2}, \\ \lambda = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Итак, у функции Лагранжа существует единственная подозрительная на экстремум точка

$$A = \left(x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}, \lambda = -\frac{1}{2} \right),$$

а сама функция Лагранжа имеет вид

$$L = xy - \frac{1}{2}(x + y - 1).$$

Теперь, воспользовавшись соотношениями

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial x} = 0, \ \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial y} = 0, \ \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = 1, \ \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 1 ,$$

вычислим второй дифференциал функции Лагранжа в точке A:

$$d^2 L = 2dx \cdot dy .$$

Воспользовавшись условием $x + y = 1$, найдем соотношение между дифференциалами dx и dy:

$$d\,(x + y - 1) = dx + dy = 0 \Rightarrow dy = -dx .$$

Поэтому

$$d^2 L = -2(dx)^2 .$$

Поскольку второй дифференциал $d^2 L$ везде, за исключением точки $dx = 0$, отрицателен, то точка $A = (x = 0{,}5, y = 0{,}5)$ является точкой максимума.

Замечание. Пример 3.1.можно решить и по-другому. Действительно, если подставить в соотношение $u = xy$ выражение $y = 1 - x$, то функция u принимает вид $u = u(x) = x - x^2$, и задача нахождения условного экстремума функции двух переменных x и y превращается в задачу нахождения экстремума функции одного переменного x.

Пример 5. Найти экстремум функции $u = 3x + 4y$ при условии $x^2 + y^2 = 1$.

Решение. Введем функцию Лагранжа

$$L = L(x, y, \lambda) = 3x + 4y + \lambda\left(x^2 + y^2 - 1\right).$$

Найдем для функции Лагранжа точки, подозрительные на экстремум:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = \dfrac{\partial\left(3x + 4y + \lambda\left(x^2 + y^2 - 1\right)\right)}{\partial x} = 3 + 2\lambda x = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = \dfrac{\partial\left(3x + 4y + \lambda\left(x^2 + y^2 - 1\right)\right)}{\partial y} = 4 + 2\lambda y = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = \dfrac{\partial\left(\left(3x + 4y + \lambda\left(x^2 + y^2 - 1\right)\right)\right)}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 1 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{3}{2\lambda}, \\ y = -\dfrac{2}{\lambda}, \\ \dfrac{9}{4\lambda^2} + \dfrac{4}{\lambda^2} = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{3}{5}, \\ y_1 = -\dfrac{4}{5}, \\ \lambda_1 = \dfrac{5}{2}, \end{cases} \begin{cases} x_2 = \dfrac{3}{5}, \\ y_2 = \dfrac{4}{5}, \\ \lambda_2 = -\dfrac{5}{2}. \end{cases}$$

Итак, у функции Лагранжа существуют две подозрительные на экстремум точки:

$$A_1 = \left(x_1 = -\frac{3}{5}, y_1 = -\frac{4}{5}, \lambda_1 = \frac{5}{2}\right), \ A_2 = \left(x_2 = \frac{3}{5}, y_2 = \frac{4}{5}, \lambda_2 = -\frac{5}{2}\right).$$

В первом случае функция Лагранжа имеет вид

$$L_1 = 3x + 4y + \frac{5}{2}\left(x^2 + y^2 - 1\right).$$

Воспользовавшись соотношениями

$$\frac{\partial^2 L_1}{\partial x \partial x} = 5,\ \frac{\partial^2 L_1}{\partial y \partial y} = 5,\ \frac{\partial^2 L_1}{\partial y \partial x} = 0,\ \frac{\partial^2 L_1}{\partial x \partial y} = 0\ ,$$

вычислим второй дифференциал функции Лагранжа L_1 в точке A_1:

$$d^2 L_1 = 5(dx)^2 + 5(dy)^2 .$$

Воспользовавшись условием $x^2 + y^2 = 1$, найдем соотношение между дифференциалами dx и dy в точке A_1:

$$d\left(x^2 + y^2 - 1\right) = 2xdx + 2ydy = 0 \Rightarrow$$

$$2x\Big|_{A_1} dx + 2y\Big|_{A_1} dy = -\frac{6}{5}dx - \frac{8}{5}dy = 0 \Rightarrow dy = -\frac{3}{4}dx\ .$$

Поэтому

$$d^2 L_1 = \frac{125}{16}(dx)^2 .$$

Поскольку второй дифференциал $d^2 L_1$ везде, за исключением точки $dx = 0$, положителен, то точка

$$A_1 = \left(x_1 = -\frac{3}{5}, y_1 = -\frac{4}{5}\right)$$

является точкой минимума.

Во втором случае функция Лагранжа имеет вид

$$L_2 = 3x + 4y - \frac{5}{2}\left(x^2 + y^2 - 1\right).$$

Воспользовавшись соотношениями

$$\frac{\partial^2 L_2}{\partial x \partial x} = -5,\ \frac{\partial^2 L_2}{\partial y \partial y} = -5,\ \frac{\partial^2 L_2}{\partial y \partial x} = 0,\ \frac{\partial^2 L_2}{\partial x \partial y} = 0\ ,$$

вычислим второй дифференциал функции Лагранжа L_2 в точке A_2:

$$d^2 L_2 = -5(dx)^2 - 5(dy)^2 .$$

Воспользовавшись условием $x^2+y^2=1$, найдем соотношение между дифференциалами dx и dy в точке A_2:

$$d\left(x^2+y^2-1\right)=2xdx+2ydy=0\Rightarrow$$

$$2x\Big|_{A_2}dx+2y\Big|_{A_2}dy=\frac{6}{5}dx+\frac{8}{5}dy=0\Rightarrow dy=-\frac{3}{4}dx.$$

Поэтому

$$d^2L_2=-\frac{125}{16}(dx)^2.$$

Поскольку второй дифференциал d^2L_2 везде, за исключением точки $dx=0$, отрицателен, то точка

$$A_2=\left(x_2=\frac{3}{5},y_2=\frac{4}{5}\right)$$

является точкой максимума.

4. НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

4.1. Графический метод решения задач нелинейного программирования с двумя переменными

Ранее мы изучали задачи на отыскание экстремумов функций при наличии ограничений в форме равенств. Целью настоящего раздела являются задачи на отыскание экстремумов функций с ограничениями в форме неравенств.

Начнем с наиболее простого случая, а именно, с таких задач, которые допускают графический метод решения, и изложим этот метод на следующем примере.

Пример 4.1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$Z=x^2+y^2-8x-6y+25 \qquad (4.1.1)$$

при наличии ограничений

$$\begin{cases} x \le 3, \\ y \le 6, \\ 2x + y - 6 \ge 0. \end{cases} \qquad (4.1.2)$$

Решение. Система ограничений (4.1.2) задает на координатной плоскости *XOY* прямоугольный треугольник *ABC* с прямым углом *C* (рис. 13).

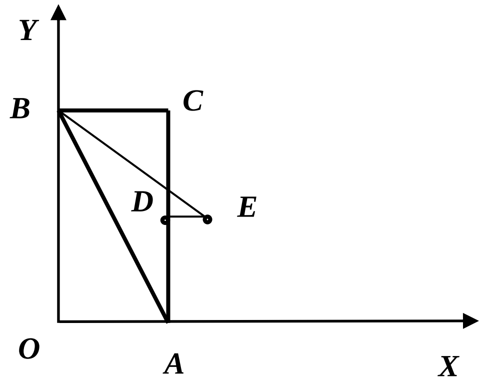


Рис. 13

Прямые *AC*, *BC* и *AB* определяются уравнениями $x = 3$, $y = 6$ и $y = 6 - 2x$, соответственно, причем *A* = (3;0), *B* = (0;6), *C* = (3;6).

Выделяя в формуле (4.1.1) полные квадраты по переменным x и y, преобразуем эту формулу к следующему виду:

$$Z = (x-4)^2 + (y-3)^2. \qquad (4.1.3)$$

Если ввести новую переменную $Z_1 = \sqrt{Z}$, то формула (4.1.3) примет вид

$$Z_1^2 = (x-4)^2 + (y-3)^2 \qquad (4.1.4)$$

и будет задавать окружности с центром в точке $E = (4;3)$ и радиусами Z_1.

Опустив из точки *E* перпендикуляр на прямую *AC*, получим точку *D* с координатами $\{x = 3, y = 3\}$, причем длина отрезка *ED* равна 1.

Теперь найдем длину отрезка *EB*:

$$EB = \sqrt{(4-0)^2 + (3-6)^2} = 5.$$

Из рис. 13 вытекает, что окружности (4.1.4) пересекают треугольник *ABC* тогда и только тогда, когда их радиусы Z_1 удовлетворяют неравенству $1 \le Z_1 \le 5$. В случае $Z_1 = 1$ окружность, заданная уравнением (4.1.4), касается прямой *AC* в точке *D*, а в случае $Z_1 = 5$ окружность, заданная уравнением (4.1.4), проходит через точку *B*.

В случае $Z_1 = 1$ выполнено соотношение

$$Z = Z_1^2 = 1^2 = 1,$$

а в случае $Z_1 = 5$ – соотношение

$$Z = Z_1^2 = 5^2 = 25.$$

Следовательно, при наличии ограничений (4.1.2) *наименьшее* значение функции (4.1.1) равно 1 и достигается в точке $\{x = 3, y = 3\}$. *Наибольшее* значение функции (4.1.1) равно 25 и достигается в точке $\{x = 0, y = 6\}$.

Решение Примера 4.1. завершено.

4.2. Задача нелинейного программирования с n переменными. Теорема Куна-Таккера

- *Стандартной формой* задачи нелинейного программирования с n переменными называют задачу о нахождении *максимума* или *минимума* функции

$$Z = f(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{4.2.1}$$

(*целевой функции*) при наличии ограничений

$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le 0, \ i = 1, ..., m \tag{4.2.2}$$

в случае, когда нелинейной является функция (4.2.1) или хотя бы одна из функций (4.2.2), при этом часть ограничений (4.2.2) может иметь форму равенств.

- Функция $L = L(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$, определенная соотношением

$$L = L(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x_1, x_2, ..., x_n), \tag{4.2.3}$$

называется *функцией Лагранжа* для задачи (4.2.1), (4.2.2).

- Числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ называются *множителями Лагранжа.*

Теорема Куна-Таккера. Если в точке $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ n – мерного пространства достигается *максимум* функции (4.2.1) при наличии ограничений (4.2.2), то в этой точке выполняются следующие условия:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \ i = 1, 2, \ldots, n, \\ \lambda_i g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \ i = 1, \ldots, m, \\ \lambda_i \le 0, \ i = 1, \ldots, m. \end{cases} \tag{4.2.4}$$

В этом случае точка $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ называется *стационарной* точкой функции (4.2.1) при наличии ограничений (4.2.2).

Если в точке n – мерного пространства $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ достигается *минимум* функции (4.2.1) при наличии ограничений (4.2.2), то в этой точке выполняются следующие условия:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \ i = 1, 2, \ldots, n, \\ \lambda_i g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \ i = 1, \ldots, m, \\ \lambda_i \ge 0, \ i = 1, \ldots, m. \end{cases} \tag{4.2.5}$$

В этом случае точка $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ также называется *стационарной* точкой функции (4.2.1) при наличии ограничений (4.2.2),

Задача 4.2. Найти максимум функции

$$u = 4x - 6y^2 + z^4 \tag{4.2.6}$$

при наличии ограничений

$$\begin{cases} z \ge x - 2y^2 - 3, \\ z \le 1. \end{cases} \tag{4.2.7}$$

Решение. Перепишем систему ограничений (4.2.7) в необходимом для применения теоремы Куна-Таккера виде:

$$\begin{cases} x-2y^2-z-3\le 0, \\ z-1\le 0. \end{cases}$$

Составим функцию Лагранжа L с множителями Лагранжа λ_1 и λ_2:

$$L=L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=4x-6y^2+z^4+\lambda_1\left(x-2y^2-z-3\right)+\lambda_2(z-1).$$

Воспользуемся условиями Куна-Таккера (4.2.4):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}=4+\lambda_1=0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=-12y-4\lambda_1 y=0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial z}=4z^3-\lambda_1+\lambda_2=0, \\ \lambda_1\left(x-2y^2-z-3\right)=0, \\ \lambda_2(z-1)=0, \\ \lambda_1\le 0,\ \lambda_2\le 0. \end{cases} \tag{4.2.8}$$

Следовательно,

$$\begin{cases} \lambda_1=-4, \\ y=0, \\ 4z^3+4+\lambda_2=0, \\ x-2y^2-z-3=0, \\ \lambda_2(z-1)=0, \\ \lambda_2\le 0. \end{cases} \tag{4.2.9}$$

В случае $\lambda_2=0$ из системы (4.2.9) получаем:

$$\begin{cases} 4z^3=-4,\ z=-1, \\ x=2y^2+z+3=2. \end{cases}$$

Таким образом, точка

$$\left\{x=2,\ y=0,\ z=-1,\ \lambda_1=-4,\ \lambda_2=0\right\} \tag{4.2.10}$$

является решением системы (4.2.8).

В случае $\lambda_2<0$ из системы (4.2.9) получаем:

$$\begin{cases} z = 1, \\ y = 0, \\ x = 2y^2 + z + 3 = 4, \\ \lambda_2 = -4z^3 - 4 = -8. \end{cases}$$

Таким образом, точка

$$\{x = 4,\ y = 0,\ z = 1, \lambda_1 = -4, \lambda_2 = -8\} \tag{4.2.11}$$

также является решением системы (4.2.8).

Из формул (4.2.10) и (4.2.11) вытекает, что у функции (4.2.6) при наличии ограничений (4.2.7) существуют две стационарные точки: точка M_1 с координатами $\{x = 2, y = 0, z = -1\}$ и точка M_2 с координатами $\{x = 4, y = 0, z = 1\}$. При этом

$$u(M_1) = u(x = 2,\ y = 0,\ z = -1) = 4 \cdot 2 - 0 + 1 = 9,$$

$$u(M_2) = u(x = 4,\ y = 0,\ z = 1) = 4 \cdot 4 - 0 + 1 = 17.$$

Ответ. Максимум функции (4.2.6) при наличии ограничений (4.2.7) равен 17 и достигается в точке $\{x = 4,\ y = 0,\ z = 1\}$.

<u>Замечание.</u> Точки M_1 и M_2 обращают в равенства первое и второе из ограничений системы (4.2.7), соответственно.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что называется частной производной первого порядка функции нескольких переменных?
2. Что такое градиент функции нескольких переменных?
3. Что такое производная функции нескольких переменных по направлению вектора?
4. Что такое первый дифференциал функции нескольких переменных?
5. Как написать уравнение касательной плоскости к поверхности?
6. Что называется нормалью к поверхности?
7. Как написать уравнение нормали к поверхности?
8. Что называется линией уровня функции двух переменных?
9. Что называется поверхностью уровня функции трех переменных?
10. Что такое частная производная второго порядка функции нескольких переменных?
11. Что такое второй дифференциал функции нескольких переменных?
12. Что такое критическая точка функции нескольких переменных?
13. Обязана ли критическая точка быть точкой экстремума?
14. В чем состоит схема исследования функции нескольких переменных на экстремум?
15. Как найти наибольшее и наименьшее значения функции нескольких переменных в замкнутой ограниченной области?
16. Что такое условный экстремум функции нескольких переменных?
17. Что такое уравнение связи?
18. Что такое функция Лагранжа?
19. Что такое множители Лагранжа?
20. В чем состоит схема исследования функции нескольких переменных на условный экстремум?
21. Что называется стандартной формой задачи нелинейного программирования?

22.Как формулируется теорема Куна-Таккера?

23.Что называется стационарной точкой?

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

А. Дана функция двух переменных

$$f(x,y)=3x^2y+y^3-12x-15y+1.$$

Найти:

1. Частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$;
2. Градиент функции $f(x,y)$ в точке $(1;3)$;
3. Производную функции $f(x,y)$ по направлению вектора $(-4;-3)$ в точке $(1;3)$;
4. Первый дифференциал функции $f(x,y)$ в точке $(1;1)$;
5. Критические точки функции $f(x,y)$;
6. Вторые частные производные

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y};$$

7. Второй дифференциал функции $f(x,y)$;
8. Экстремумы функции $f(x,y)$;
9. Наибольшее и наименьшее значения функции $f(x,y)$ на множестве

$$\{-3\le x\le 3; -3\le y\le 3\}.$$

Дана функция двух переменных

$$g(x,y)=1-4x-4y.$$

10. Найти экстремумы функции $g(x,y)$ при условии

$$x^2-2y^2=8.$$

В. Найти наименьшее значение целевой функции

$$Z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

при наличии ограничения

$$(x-5)^2 + (y-12)^2 \le 4,$$

и определить точку $(x_0,\ y_0)$, в которой наименьшее значение целевой функции достигается.

ЛИТЕРАТУРА

Основная:

1. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А. Математический анализ в вопросах и задачах: Учебное пособие / Под ред. В.Ф. Бутузова – М.: Физматлит, 2001.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Сборник задач по высшей математике: Учебное пособие. – М.: Физматлит, 2001.
3. Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М., Фридман М.Н. Высшая математика для экономистов: Учебник для вузов. – М.: ЮНИТИ, 2003.
4. Натансон И.П. Краткий курс высшей математики. – СПб.: Издательство «Лань», 2005.

Дополнительная:

5. Ведина О.И., Десницкая В.Н., Варфоломеева Г.Б., Тарасюк А.Ф. Математика. Математический анализ для экономистов: Учебник. – М.: Инф.-изд. дом «Филинъ», Рилант, 2001.
6. Геворкян Г.С. Высшая математика. Основы математического анализа: Учебник для вузов. – М.: Физматлит, 2004.
7. Сборник задач по высшей математике для экономистов: Учебное пособие. / Под ред. В.И.Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2004.
8. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т. 1,2.- М.: Физматлит, 2002.
9. Шипачев В.С. Высшая математика. – М.: Высшая школа, 2002.