Доктор физико-математических наук, профессор

К. Л. САМАРОВ

МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие по разделу

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

СОДЕРЖАНИЕ

1. МНОЖЕСТВА, ФУНКЦИИ И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

1.1 Множества и операции над ними

- Множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A и B, называется *объединением (суммой)* множеств и обозначается $A \bigcup B$ или $A+B$.

- Множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат как множеству A, так и множеству B, называется *пересечением (произведением)* множеств и обозначается $A \bigcap B$ или $A \cdot B$.

- Множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству A, но не принадлежат множеству B, называется *разностью* множеств A и B и обозначается $A \setminus B$.

- Если $A \subset B$, то разность множеств $B \setminus A$ называется *дополнением множества A до множества B*.

- Множество $(A \setminus B) \bigcup (B \setminus A)$ называется *симметрической разностью* множеств A и B и обозначается $A \blacktriangle B$.

Пример 1.1.1. Рассмотрим два числовых множества:

$$A = \{-3, 1, 4, 7\}, \quad B = \{-5, 0, 1, 8\}.$$

Найти множества: $A+B$, $A \cdot B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \blacktriangle B$.

Решение. Воспользовавшись приведенными определениями, получаем:

$$A+B = \{-5, -3, 1, 4, 7, 8\},\ A \cdot B = \{1\},\ A \setminus B = \{-3, 4, 7\},$$

$$B \setminus A = \{-5, 0, 8\},\ A \blacktriangle B = \{-5, -3, 4, 7, 8\}.$$

1.2 Числовые функции одного переменного

- Пусть X – некоторое числовое множество. На множестве X задана *числовая функция* f, если указан закон, по которому каждому элементу x из множества X *ставится в соответствие* некоторое число $y = f(x)$.

- Число x называется *аргументом* функции f или *независимой переменной*, а множество X называется областью *определения функции* f.

- Множество Y всех тех и только тех элементов $\{y\}$, таких, что $y = f(x)$ при $x \in X$, называется *множеством значений* функции f.

- Часто в задачах известна формула, задающая *соответствие (закон, функцию)* f, и требуется найти наиболее широкое множество, для каждого элемента которого определено соответствие f. В этом случае указанная задача формулируется так: – «Найти область определения функции $y = f(x)$».

- Иногда в задачах требуется найти не только область определения функции, но и ее множество значений.

Пример 1.2.1. Найти область определения функции

$$y = \ln 2x + \sqrt{\frac{x+2}{3-x}}.$$

Решение. Область определения данной функции задается системой неравенств

$$\begin{cases} 2x > 0, \\ \dfrac{x+2}{3-x} \geq 0, \end{cases}$$

которая эквивалентна системе неравенств

$$\begin{cases} x > 0, \\ x < 3, \\ x \geq -2. \end{cases}$$

Решением этой системы является интервал $x \in (0, 3)$.

Ответ. $x \in (0, 3)$.

Пример 1.2.2. Найти множество значений функции

$$y = x^2 + 4x + 3.$$

Решение. Поскольку

$$x^2 + 4x + 3 = x^2 + 4x + 4 - 1 = (x+2)^2 - 1 = y \geq -1,$$

то для каждого числа $y \geq -1$ существует решение уравнения

$$x^2 + 4x + 3 = y,$$

определяемое формулой

$$x = -2 \pm \sqrt{y+1}.$$

Ответ. Множество значений рассматриваемой функции имеет вид: $[-1, +\infty)$.

1.3 Числовые последовательности

- *Бесконечной числовой последовательностью* $\{a_n, n \in N\}$ называется числовая функция, областью определения которой является множество N натуральных чисел.

- Часто последовательность задается с помощью *явной* формулы, например,

$$a_n = 2^n, \ n \in N,$$

или с помощью *рекуррентного* соотношения, например,

$$a_{n+2} = a_n + a_{n+1}; \quad a_1 = 1, a_2, = 1.$$

Существуют и другие способы задания последовательностей.

- Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной*, если существует число M такое, что при всех значениях n выполняется неравенство

$$|a_n| \le M.$$

- Последовательность, не являющаяся ограниченной, называется *неограниченной.*

- Важными частными случаями бесконечных последовательностей являются *арифметическая и геометрическая прогрессии*.

1.4 Вычисление пределов последовательностей и функций

- Число a называется *пределом* последовательности $\{a_n\}$, если для любого положительного числа ε найдется такое натуральное число M, что при всех $n > M$ выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$.

- Условие того, что число a является *пределом* последовательности $\{a_n\}$, записывается с помощью обозначения

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

или с помощью обозначения

$$a_n \to a \text{ при } n \to \infty .$$

- Число b называется *пределом функции* $f(x)$ при x, стремящемся к a, если для любого положительного числа ε найдется такое положительное число δ, что при всех $x \neq a$, удовлетворяющих неравенству $|x-a| < \delta$, будет выполняться неравенство $|f(x)-b| < \varepsilon$.

- Условие того, что число b является *пределом функции* $f(x)$ при x, стремящемся к a, записывается с помощью обозначения

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

или с помощью обозначения

$$f(x) \to b \text{ при } x \to a .$$

- Если при x, стремящемся к a, существуют пределы функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, то при x, стремящемся к a, существуют также и пределы суммы, разности и произведения этих функций, причем

$$\lim_{x\to a}\left(f_1(x)+f_2(x)\right) = \lim_{x\to a} f_1(x) + \lim_{x\to a} f_2(x),$$

$$\lim_{x\to a}\left(f_1(x)-f_2(x)\right) = \lim_{x\to a} f_1(x) - \lim_{x\to a} f_2(x),$$

$$\lim_{x\to a}\left(f_1(x)\cdot f_2(x)\right) = \lim_{x\to a} f_1(x) \cdot \lim_{x\to a} f_2(x).$$

Если, кроме того, $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) \neq 0$, то при x, стремящемся к a, существует предел дроби $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$, причем

$$\lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)}.$$

- Для пределов последовательностей справедливо аналогичное утверждение.

- Если при нахождении предела дроби выясняется, что пределы числителя и знаменателя дроби равны ∞, то вычисление такого предела называют *раскрытием неопределенности* $\frac{\infty}{\infty}$.

- В алгебраических выражениях неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$ раскрывается с помощью деления числителя и знаменателя на старший член выражения.

- Если при нахождении предела дроби выясняется, что пределы числителя и знаменателя дроби равны 0, то вычисление такого предела называют *раскрытием неопределенности* $\frac{0}{0}$.

- В алгебраических выражениях неопределенность $\frac{0}{0}$ при $x \to a$ раскрывается при помощи разложения на множители числителя и знаменателя рациональной дроби с последующим сокращением на соответствующую степень множителя (x - a).

- В тригонометрических выражениях неопределенность $\frac{0}{0}$ раскрывается с помощью *первого замечательного предела*

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1 .$$

- Если при нахождении предела степени некоторого выражения выясняется, что предел основания степени равен 1, а предел показателя степени равен ∞, то вычисление такого предела называют *раскрытием неопределенности* 1^{∞}.

- Неопределенность 1^{∞} раскрывается с помощью *второго замечательного предела*:

$$\lim_{\alpha \to 0} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e .$$

- *Второй замечательный предел* удобно использовать и в другой форме:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}=1.$$

- При решении задач на вычисление пределов часто используются следующие формулы:

$$a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b),\ \sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}};$$

$$a^3\pm b^3=(a\pm b)\cdot\left(a^2\mp ab+b^2\right);$$

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;$$

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),\ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a},\ x_1+x_2=-\frac{b}{a},a\neq 0;$$

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2};$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

- В случае $k>0$ выполнено соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}=0\ .$$

- В случае $0<a<1$ выполнено соотношение

$$\lim_{n\to\infty}a^n=0\,.$$

Пример 1.4.1. Найти предел последовательности

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+1}+3^{n+2}}{4^{n+2}+5}\,.$$

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+1}+3^{n+2}}{4^{n+2}+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 4^n+9\cdot 3^n}{16\cdot 4^n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+9\cdot\dfrac{3^n}{4^n}}{16+\dfrac{5}{4^n}}=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}.$$

Пример 1.4.2. Найти предел последовательности

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4+2n^2+n+1}-\sqrt{n^4-3n^2+5}\right).$$

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4+2n^2+n+1}-\sqrt{n^4-3n^2+5}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^4+2n^2+n+1\right)-\left(n^4-3n^2+5\right)}{\sqrt{n^4+2n^2+n+1}+\sqrt{n^4-3n^2+5}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+n-4}{\sqrt{n^4+2n^2+n+1}+\sqrt{n^4-3n^2+5}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(5+\frac{1}{n}-\frac{4}{n^2}\right)}{n^2\sqrt{1+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}}+n^2\sqrt{1-\frac{3}{n^2}+\frac{5}{n^4}}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(5+\frac{1}{n}-\frac{4}{n^2}\right)}{\sqrt{1+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}}+\sqrt{1-\frac{3}{n^2}+\frac{5}{n^4}}}=\frac{5}{1+1}=\frac{5}{2}.$$

Пример 1.4.3. Найти предел функции

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^3+8}{3x^2+x-10}.$$

Решение.

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^3+8}{3x^2+x-10}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)\cdot\left(x^2-2x+4\right)}{3(x+2)\cdot\left(x-\frac{5}{3}\right)}=\lim_{x\to-2}\frac{x^2-2x+4}{3\cdot\left(x-\frac{5}{3}\right)}=-\frac{12}{11}.$$

Пример 1.4.4. Найти предел функции

$$\lim_{x\to5}\frac{4x^2-9x-55}{\sqrt{4x+5}-\sqrt{20+x}}.$$

Решение.

$$\lim_{x\to5}\frac{4x^2-9x-55}{\sqrt{4x+5}-\sqrt{20+x}}=\lim_{x\to5}\frac{4(x-5)\left(x+\frac{11}{4}\right)\left(\sqrt{4x+5}+\sqrt{20+x}\right)}{(4x+5)-(20+x)}=$$

$$= \lim_{x\to 5} \frac{4(x-5)\left(x+\frac{11}{4}\right)\left(\sqrt{4x+5}+\sqrt{20+x}\right)}{3(x-5)} = \lim_{x\to 5} \frac{4}{3}\left(x+\frac{11}{4}\right)\left(\sqrt{4x+5}+\sqrt{20+x}\right) = .$$

$$= \frac{310}{3}$$

Пример 1.4.5. Найти предел функции

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3-2x^2}{\cos 3x-\cos 8x}.$$

Решение.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3-2x^2}{\cos 3x-\cos 8x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(x-2)}{2\sin\frac{5x}{2}\cdot\sin\frac{11x}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(x-2)\left(\frac{5x}{2}\right)\left(\frac{11x}{2}\right)}{2\left(\sin\frac{5x}{2}\right)\left(\sin\frac{11x}{2}\right)\left(\frac{5x}{2}\right)\left(\frac{11x}{2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{5x}{2}\right)}{\left(\sin\frac{5x}{2}\right)} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{11x}{2}\right)}{\left(\sin\frac{11x}{2}\right)} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{(x-2)}{2\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{11}{2}} = -\frac{4}{55}.$$

Пример 1.4.6. Найти предел функции

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin\frac{3x}{2}}{(2x-\pi)\cos 5x}.$$

Решение. Чтобы вычислить данный предел сделаем сначала замену переменного $x=\frac{\pi}{2}+z$. Поскольку $x\to\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow z\to 0$, получаем

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin\frac{3x}{2}}{(2x-\pi)\cos 5x} = \lim_{z\to 0} \frac{1+\sin\left(\frac{3\pi}{2}+3z\right)}{(\pi+2z-\pi)\cdot\cos\left(\frac{5\pi}{2}+5z\right)} = \lim_{z\to 0} \frac{1-\cos 3z}{2z\cdot(-\sin 5z)} =$$

$$= -\lim_{z\to 0} \frac{2\sin^2\frac{3z}{2}}{2z\cdot\sin 5z} = -\lim_{z\to 0} \frac{\sin^2\frac{3z}{2}\cdot\left(\frac{3z}{2}\right)^2\cdot(5z)}{z\cdot\left(\frac{3z}{2}\right)^2\cdot(\sin 5z)\cdot 5z} = -\lim_{z\to 0} \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{5} = -\frac{9}{20}.$$

Пример 1.4.7. Найти при $x \to \infty$ предел функции

$$f(x) = \left(\frac{3x-5}{3x+2}\right)^{4x-9}.$$

Решение. Для того, чтобы найти указанный предел, рассмотрим функцию $y = \ln f(x)$ и найдем ее предел при $x \to \infty$.

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left[\left(\frac{3x-5}{3x+2}\right)^{4x-9}\right] = \lim_{x\to\infty}(4x-9)\ln\left(\frac{3x+2-7}{3x+2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}(4x-9)\ln\left(1+\left(-\frac{7}{3x+2}\right)\right) = \lim_{x\to\infty}(-7)\left(\frac{4x-9}{3x+2}\right)\left(\frac{3x+2}{-7}\right)\ln\left(1+\left(-\frac{7}{3x+2}\right)\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}(-7)\left(\frac{4x-9}{3x+2}\right)\cdot \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\left(-\frac{7}{3x+2}\right)\right)}{\left(\frac{-7}{3x+2}\right)} = -\frac{28}{3}\cdot \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\left(-\frac{7}{3x+2}\right)\right)}{\left(\frac{-7}{3x+2}\right)} =$$

$$= -\frac{28}{3}\cdot 1 = -\frac{28}{3}.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-5}{3x+2}\right)^{4x-9} = e^{-\frac{28}{3}}.$$

Пример 1.4.8. Найти предел функции

$$\lim_{x\to-6}(x+7)^{\frac{x+2}{x^2+5x-6}}.$$

Решение. Для того, чтобы найти указанный предел, рассмотрим функцию $y = \ln f(x)$ и найдем ее предел при $x \to -6$.

$$\lim_{x\to-6}\ln\left[(x+7)^{\frac{x+2}{x^2+5x-6}}\right] = \lim_{x\to-6}\frac{x+2}{x^2+5x-6}\ln(x+7) =$$

$$= \lim_{x\to-6}\frac{(x+2)(x+6)}{x^2+5x-6}\cdot\frac{\ln(1+x+6)}{(x+6)} = \lim_{x\to-6}\frac{(x+2)(x+6)}{(x-1)(x+6)}\cdot\frac{\ln(1+x+6)}{(x+6)} =$$

$$= \lim_{x\to-6}\frac{(x+2)(x+6)}{(x-1)(x+6)}\cdot\lim_{x\to-6}\frac{\ln(1+x+6)}{(x+6)} = \frac{(-6+2)}{(-6-1)}\cdot 1 = \frac{4}{7}.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to -6} (x+7)^{\frac{x+2}{x^2+5x-6}} = e^{\frac{4}{7}}.$$

2. ТОЧКИ НЕПРЕРЫВНОСТИ И ТОЧКИ РАЗРЫВА ФУНКЦИЙ

- Функция $f(x)$ *непрерывна в точке* $x=a$, если она в ней определена и

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

- Все *элементарные* функции непрерывны в каждой точке своей области определения.

- Функция $f(x)$ непрерывна в точке $x=a$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие 4 условия:

1. У функции $f(x)$ существует *конечный левосторонний предел:*

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a(x<a)} f(x).$$

2. У функции $f(x)$ существует *конечный правосторонний предел:*

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a(x>a)} f(x).$$

3. Левосторонний и правосторонний пределы равны:

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x).$$

В этом случае

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a} f(x).$$

4. Выполнено соотношение

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

- Функция *терпит в точке* $x=a$ *разрыв,* если она не является непрерывной в этой точке.

- Функция $f(x)$ терпит в точке $x = a$ *устранимый разрыв,* если существуют, конечны и совпадают оба односторонних предела, но, либо

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x) \neq f(a),$$

либо $f(x)$ не определена в точке $x = a$.

- Функция $f(x)$ терпит в точке $x = a$ *скачок*, если существуют и конечны оба односторонних предела, но

$$\lim_{x \to a-0} f(x) \neq \lim_{x \to a+0} f(x).$$

- Устранимый разрыв и скачок называют *разрывами первого рода.*
- Функция $f(x)$ имеет в точке $x = a$ *разрыв второго рода,* если хотя бы один из односторонних пределов не существует или бесконечен.

Пример 2.1. Найти возможные точки разрыва, определить их характер и изобразить на схематическом чертеже поведение функции

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & -\infty < x \leq 0, \\ x - x^2, & 0 < x < 1, \\ \ln x, & 1 \leq x < +\infty. \end{cases}$$

Решение.

В интервалах (− ∞; 0), (0; 1) и (1; +∞) функция $f(x)$ непрерывна, как элементарная функция в своей области определения. Следовательно, разрыв возможен лишь в точках $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$. Рассмотрим сначала точку $x_1 = 0$. В этой точке

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{x \to 0-0} (x+2) = 2\ ,$$

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{x \to 0-0} \left(x - x^2\right) = 0\ ,$$

$$f(0) = 2.$$

Таким образом, функция $f(x)$ в точке $x_1 = 0$ терпит скачок.

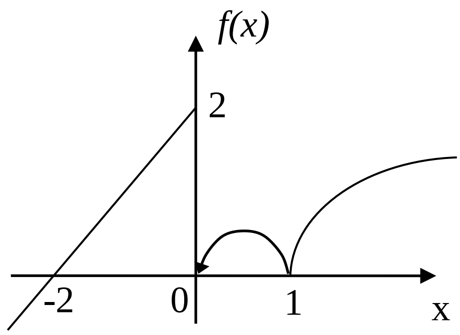
Перейдем теперь к точке $x_2 = 1$. В этой точке

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} \left(x - x^2\right) = 0,$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} \ln x = \ln 1 = 0 ,$$

$$f(1) = 0.$$

Таким образом, функция $f(x)$ в точке $x_2 = 1$ непрерывна.



Пример 2.2. Найти возможные точки разрыва, определить их характер и изобразить на схематическом чертеже поведение функции

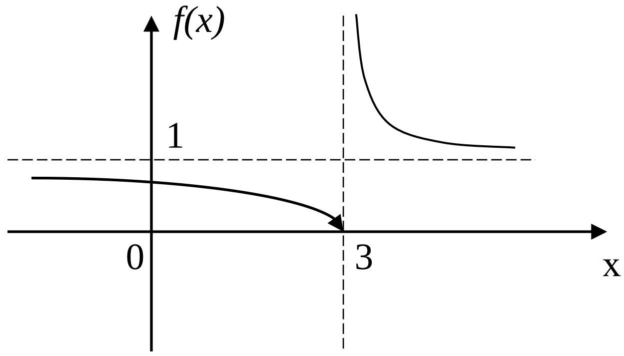
$$f(x) = e^{\frac{1}{x-3}}.$$

Решение. Функция $f(x)$ не определена в точке $x = 3$, причем

$$\lim_{x\to 3-0} e^{\frac{1}{x-3}} = 0,$$

$$\lim_{x\to 3+0} e^{\frac{1}{x-3}} = +\infty,$$

следовательно, в точке $x = 3$ функция $f(x)$ терпит разрыв II рода.



Пример 2.3. Найти возможные точки разрыва, определить их характер и изобразить на схематическом чертеже поведение функции

$$f(x)=\frac{18}{3^{\frac{x}{x-1}}-9}.$$

Решение. Функция $f(x)$ не определена в точке $x=1$, а также при тех значениях x, когда

$$3^{\frac{x}{x-1}}-9=0 .$$

Найдем эти значения x:

$$3^{\frac{x}{x-1}}=9 \Leftrightarrow \frac{x}{x-1}=2 \Leftrightarrow x=2x-2 \Leftrightarrow x=2 .$$

Таким образом, функция не определена в точках $x_1=1$ и $x_2=2$.

Рассмотрим сначала точку $x_1=1$. В этой точке

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{18}{3^{\frac{x}{x-1}}-9}=\frac{18}{0-9}=-2.$$

Кроме того,

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{18}{3^{\frac{x}{x-1}}-9}=0 .$$

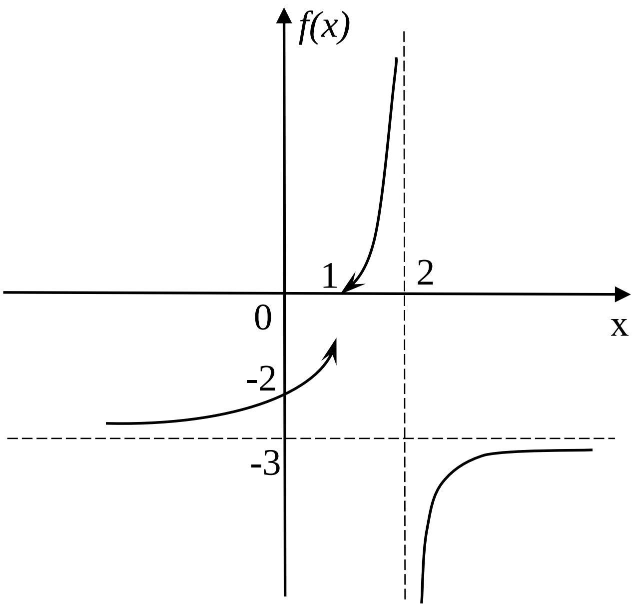
Следовательно, в точке $x_1=1$ функция $f(x)$ терпит разрыв I рода.

Рассмотрим теперь точку $x_2=2$. В этой точке

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{18}{3^{\frac{x}{x-1}}-9}=\frac{18}{3^{\frac{2}{1-0}}-9}=\frac{18}{3^{2+0}-9}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to 2+0}\frac{18}{3^{\frac{x}{x-1}}-9}=\frac{18}{3^{\frac{2}{1+0}}-9}=\frac{18}{3^{2-0}-9}=-\infty.$$

Таким образом, в точке $x_2=2$ функция $f(x)$ терпит разрыв II рода.



3. ПРОИЗВОДНЫЕ ФУНКЦИЙ

- Производные элементарных функций приведены в таблице производных:

$$(1)' = 0;\ \left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1};$$
$$\left(e^x\right)' = e^x;\ \left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a;$$
$$(\ln x)' = \frac{1}{x};\ (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a};$$
$$(\sin x)' = \cos x;\ (\cos x)' = -\sin x;$$
$$(\mathrm{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};\ (\mathrm{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};\ (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$
$$(\mathrm{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};\ (\mathrm{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

- При вычислении производных используются следующие свойства (символом C здесь и далее обозначается произвольное число):

$$(C \cdot u)' = C \cdot u';$$
$$(u \pm v)' = u' \pm v';$$
$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v';$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}.$$

- Производная *сложной функции (функции от функции)* вычисляется по формуле

$$\left(f(z(x))\right)' = f'(z) \cdot z'(x).$$

- Формула для производной сложной функции часто используется для вычисления производной от выражения *«функция в степени функция»:*

$$\left(f(x)^{g(x)}\right)' = \left(e^{g(x) \cdot \ln(f(x))}\right)' = e^{\left(g(x) \cdot \ln(f(x))\right)'} =$$

$$= e^{g'(x) \cdot \ln(f(x)) + g(x) \cdot \left(\ln(f(x)\right)'} = e^{g'(x) \cdot \ln(f(x)) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}}.$$

Замечание. Предыдущие выкладки можно несколько сократить, если прологарифмировать исходную функцию, а производную взять после этого.

- Для вычисления производной *от обратной функции* используется формула

$$z'(x) = \frac{1}{x'(z)}.$$

- Для вычисления производной от функции $y = y(x)$, которая является решением уравнения $F(x,y) = 0$ (*неявно заданная функция*), необходимо продифференцировать по x тождество $F(x, y(x)) = 0$, не забывая о том, что его левая часть является сложной функцией от x.

- Если функция $y = y(x)$ задана системой уравнений

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$$

(параметрическое задание функции), то

$$y'(x)=y'(t(x))=y'(t)\cdot t'(x)=\frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

Пример 3.1. Найти производную функции

$$y=\left(\frac{3}{x^5}-\sqrt[7]{x^2}+5\right)^8.$$

Решение.

$$y'=8\left(3x^{-5}-x^{\frac{2}{7}}+5\right)^7\cdot\left(3\cdot(-5)\cdot x^{-6}-\frac{2}{7}x^{-\frac{5}{7}}\right)=-8\left(\frac{3}{x^5}-\sqrt[7]{x^2}+5\right)\cdot\left(\frac{15}{x^6}+\frac{2}{7\sqrt[7]{x^5}}\right).$$

Пример 3. 2. Найти производную функции

$$y=7^{\frac{1}{5x-3}}.$$

Решение.

$$y=e^{\ln 7\cdot(5x-3)^{-1}}\Rightarrow y'=e^{\ln 7\cdot(5x-3)^{-1}}\cdot\ln 7\cdot(-1)\cdot(5x-3)^{-2}\cdot 5=7^{\frac{1}{5x-3}}\cdot\ln 7\cdot(-5)\cdot(5x-3)^{-2}.$$

Пример 3. 3. Найти производную функции

$$y=\frac{x}{\arcsin 2x}.$$

Решение.

$$y'=\frac{1\cdot\arcsin 2x-x\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\cdot 2}{\arcsin^2 2x}=\frac{\arcsin 2x\cdot\sqrt{1-4x^2}-2x}{\arcsin^2 2x\cdot\sqrt{1-4x^2}}.$$

Пример 3. 4. Найти производную функции

$$y=\ln\sqrt[3]{\frac{x^7(x^4+5)}{e^{3x+8}}}.$$

Решение.

$$y=\frac{1}{3}\left(7\ln x+\ln(x^4+5)-(3x+8)\right)\Rightarrow y'=\frac{1}{3}\left(\frac{7}{x}+\frac{4x^3}{x^4+5}-3\right).$$

Пример 3. 5. Найти производную функции

$$y = \sqrt[5]{\frac{e^{2x-3}\cdot(4x+7)}{x^6}}\,.$$

Решение. Сначала прологарифмируем функцию:

$$\ln y = \frac{1}{5}\left(2x - 3 + \ln(4x+7) - 6\ln x\right).$$

Возьмем теперь производную от обеих частей предыдущего равенства:

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = \frac{1}{5}\cdot\left(2 - \frac{4}{4x+7} - \frac{6}{x}\right) \Rightarrow y' = \frac{1}{5}\cdot\left(2 - \frac{4}{4x+7} - \frac{6}{x}\right)\cdot\sqrt[5]{\frac{e^{2x-3}(4x+7)}{x^6}}\,.$$

Пример 3. 6. Найти производную функции

$$y = \left(\frac{1}{x+5}\right)^{3x-8}.$$

Решение. Логарифмируя функцию, получим

$$\ln y = - \ (3x-8)\ln(x+5)\ .$$

Возьмем теперь производную от обеих частей предыдущего равенства:

$$\frac{y'}{y} = -3\ln(x+5) - (3x-8)\frac{1}{x+5} \Rightarrow y' = -\left(3\ln(x+5) + \frac{3x-8}{x+5}\right)\left(\frac{1}{x+5}\right)^{3x-8}.$$

Пример 3.7. Найти производную функции $y = y(x)$, которая является решением уравнения

$$e^{x+2y} + xy = 5\,.$$

Решение. Взяв производные от обеих частей уравнения, получим

$$e^{x+2y}(1+2y') + y + xy' = 0\,.$$

Выразим теперь y' из этого соотношения:

$$y'\left(2e^{x+2y}+x\right)=-y-e^{x+2y},$$

$$y'=-\frac{y+e^{x+2y}}{2e^{x+2y}+x}.$$

Пример 3.8. Найти производную функции $y = y(x)$, которая задана параметрически:

$$\begin{cases} x=t-\dfrac{1}{t}, \\ y=t^2+2\ln t. \end{cases}$$

Решение.

$$y'(x)=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{2t+\dfrac{2}{t}}{1+\dfrac{1}{t^2}}=\frac{2\left(t^2+1\right)t^2}{t\left(t^2+1\right)}=2t.$$

4. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИЙ

4.1 Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

- Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она достигает на нем своего *наибольшего* значения

$$M=\max_{[a,\, b]} f(x)$$

и *наименьшего* значения

$$m=\min_{[a,\, b]} f(x).$$

- *Критическими* точками непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции называются такие значения переменной $x\in(a,b)$, которые удовлетворяют уравнению $f'(x)=0$, а также такие значения переменной $x\in(a,b)$, в которых производная функции $y=f(x)$ не существует.

- Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$ достаточно найти критические точки функции $y = f(x)$ и определить M и m, сравнивая значения $f(a)$, $f(b)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$,….

Пример 4.1.1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = x - 3\cdot\sqrt[3]{x} \quad \text{на отрезке } [-\frac{1}{8}; 8].$$

Решение. Для того чтобы найти критические точки, вычислим производную функции:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

Решая уравнение $f'(x) = 0$, получим

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2} = 1 \Leftrightarrow x = 1 \in \left(-\frac{1}{8};\ 8\right).$$

Заметим также, что производная функции не существует в точке $x = 0$.

Таким образом, у функции на рассматриваемом отрезке имеется две критических точки: $x_1 = 0, x_2 = 1$.

Сравним значения, которые принимает функция в этих точках, а также на концах отрезка:

$$f(0) = 0,\ f(1) = -2,\ f\left(-\frac{1}{8}\right) = -\frac{1}{8} + \frac{3}{2} = \frac{11}{8},\ f(8) = 2\ .$$

Следовательно,

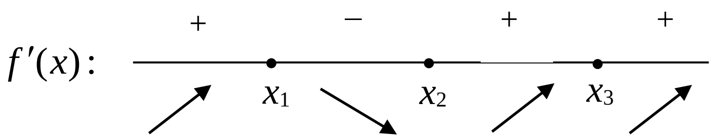
$$M = \max_{\left[-\frac{1}{8};\ 8\right]} f(x) = f(8) = 2,$$

$$m = \min_{\left[-\frac{1}{8};\ 8\right]} f(x) = f(1) = -2\ .$$

4.2 Исследование функции на экстремумы

Исследование функции на экстремум проводится по следующей схеме:

- Находим критические точки $x_1,\ x_2, \dots$ функции $y = f(x)$.
- Находим знаки производной $f'(x)$ в интервалах между критическими точками.
- Анализируя, как ведут себя знаки производной $f'(x)$ при переходе через критическую точку, устанавливаем наличие и тип экстремума.
- Рассмотрим, например, следующий рисунок.



В этой ситуации в точке $x = x_1$ у функции $y = f(x)$ максимум, в точке $x = x_2$ – минимум, в точке $x = x_3$ экстремума нет.

Пример 4.2.1. Исследовать функцию $f(x) = x - \ln x$ на экстремумы.

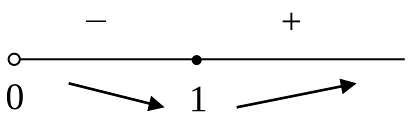
Решение. Областью определения функции $f(x)$ является интервал $(0; +\infty)$. Найдем производную:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}.$$

Точка $x = 0$ некритическая, так как $f(x)$ в ней не определена. Единственной критической точкой функции является точка $x = 1$:

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1.$$

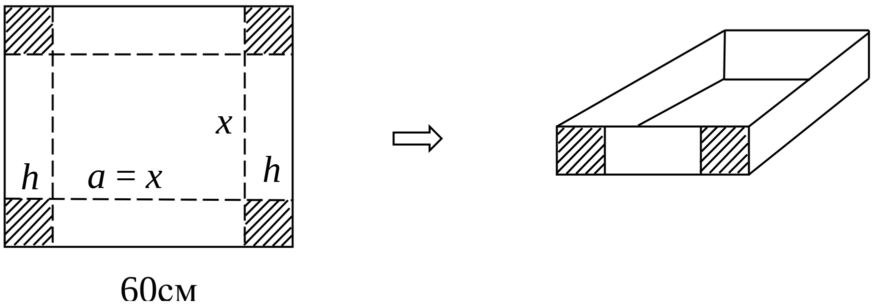
Знаки производной функции изображены на следующем рисунке.



Из рисунка видно, что производная при переходе через точку $x=1$ меняет знак с минуса на плюс. Следовательно, у функции $y=f(x)$ в точке $x=1$ минимум, причем

$$f(1)=1-\ln 1=1.$$

Пример 4.2.2. Из квадратного листа картона изготавливается коробка без крышки следующим образом:



Найти наибольший объем и соответствующие размеры коробки, если длина стороны заготовки равна 60 см.

Решение. Поскольку основанием коробки является квадрат, то объем коробки $V=a^2h$. Пусть $a=x$, тогда

$$h=\frac{60-x}{2}\Rightarrow V=x^2\cdot\frac{60-x}{2}=0{,}5\cdot\left(60x^2-x^3\right),\ 0<x<60.$$

Чтобы исследовать функцию $V(x)$ на экстремумы, найдем её производную:

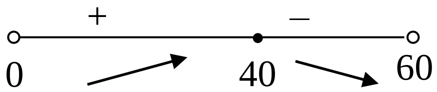
$$V'=0{,}5\left(120x-3x^2\right)=1{,}5x(40-x).$$

Теперь найдем критические точки:

$$V'=0\Rightarrow x_1=40,\ x_2=0\notin(0;\ 60).$$

Итак, у функции существует единственная критическая точка $x_1=40$.

Анализируя знак производной, получим следующий рисунок.



Таким образом,

$$V_{\max} = V(40) = 1600 \cdot \frac{(60-40)}{2} = 16000$$

Ответ. Наибольший объем коробки достигается при a = 40 см., h = 10 см. и равен 16000 куб. см.

4.3 Правило Лопиталя

- Часто при вычислении пределов для раскрытия неопределенностей типа $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ удобно использовать следующее правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)}.$$

Пример 4.3.1. Найти предел

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{3x}}{x}.$$

Решение. Применяя правило Лопиталя, получаем:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{3x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(e^{3x}\right)'}{(x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{3e^{3x}}{1} = \infty.$$

Пример 4.3.2. Найти предел

$$\lim_{x\to 0} x\ln x.$$

Решение. Применяя правило Лопиталя, получаем:

$$\lim_{x\to 0} x\ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = -\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = -\lim_{x\to 0} x = 0.$$

4.4 Выпуклость функции, точки перегиба

- Функция $f(x)$ называется *выпуклой вверх* в интервале (a,b), если в каждой точке этого интервала выполнено условие $f''(x) \le 0$.

- Функция $f(x)$ называется *выпуклой вниз* в интервале (a,b), если в каждой точке этого интервала выполнено условие $f''(x) \ge 0$.

- Если при переходе через точку x_0 функция $f(x)$ *меняет направление выпуклости*, то точка x_0 называется *точкой перегиба.*

- Если в точке $(x_0, f(x_0))$ к графику функции $y = f(x)$ проведена касательная, а x_0 – точка перегиба функции, то при переходе через точку x_0 график функции переходит с одной стороны касательной на другую.

- Точки перегиба функции *следует искать* среди тех точек, в которых вторая производная функции *равна нулю или не существует.*

Пример 4.4.1. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции

$$f(x) = x^4 - 6x^2.$$

Решение. Поскольку

$$f'(x) = 4x^3 - 12x,$$

и

$$f''(x) = 12x^2 - 12 = 12\left(x^2 - 1\right),$$

то $f''(x) > 0$ при $x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$, и $f''(x) < 0$ при $x \in (-1,1)$. Таким образом, в области $x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$ функция $f(x)$ выпукла вниз, а в области $x \in (-1,1)$ функция $f(x)$ выпукла вверх. В точках $x = \pm 1$ вторая производная функции $f(x)$ равна нулю, а при переходе через эти точки меняет знак, следовательно, точки $x = \pm 1$ являются точками перегиба.

4.5 Формула Тейлора

Если функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0, имеет в этой окрестности производные до $(n-1)$ - го порядка включительно, и существует производная $f^n(x_0)$, то

$$\varepsilon(x,x_0)=\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right](x-x_0)^{-n}\to 0 \text{ при } x\to x_0 .$$

Таким образом, справедлива формула, называемая формулой Тейлора:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\varepsilon(x,x_0)(x-x_0)^n . \qquad (4.5.1)$$

Многочлен

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

называется многочленом Тейлора n - го порядка функции $f(x)$ в точке x_0, а функция

$$r_n(x)=\varepsilon(x,x_0)(x-x_0)^n , \qquad (4.5.2)$$

где $\varepsilon(x,x_0)\to 0$ при $x\to x_0$, называется остаточным членом формулы Тейлора в форме Пеано.

Для остаточного члена в форме Пеано часто используется следующее обозначение:

$$\varepsilon(x,x_0)(x-x_0)^n=o(x-x_0)^n .$$

Замечание. Если справедливо соотношение

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k+\varepsilon(x,x_0)(x-x_0)^n ,$$

где a_k – числа, а $\varepsilon(x,x_0)\to 0$ при $x\to x_0$, то

$$\sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k .$$

Другими словами, разложение функции в сумму многочлена n - го порядка и остаточного члена в форме Пеано единственно и совпадает с формулой Тейлора.

В случае $x_0 = 0$ формула (4.5.1) называется формулой Маклорена и принимает вид

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(0)}{k!} x^k + \varepsilon(x)\, x^n , \qquad (4.5.3)$$

где $\varepsilon(x) \to 0$ при $x \to 0$.

Пример 4.5.1. Разложить функцию

$$y = \frac{1}{1-x^2}$$

по формуле Маклорена до $o\left(x^6\right)$.

Решение. Воспользовавшись формулой для суммы убывающей геометрической прогрессии, получим:

$$y = \frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10} + \ldots = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8\left(1 + x^2 + \ldots\right) =$$
$$= 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8\left(\frac{1}{1-x^2}\right) = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + o\left(x^6\right).$$

Ответ. Искомое разложение имеет следующий вид:

$$y = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + o\left(x^6\right).$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что такое объединение множеств?
2. Что такое разность множеств?
3. Что такое пересечение множеств?
4. Что называется числовой последовательностью?
5. Какие существуют способы задания числовых последовательностей?
6. Что такое предел числовой последовательности?
7. Какими свойствами обладают пределы числовых последовательностей?
8. Что такое предел функции?
9. Какими свойствами обладают пределы функций?
10. Что называется первым замечательным пределом?
11. Что называется вторым замечательным пределом?
12. Какая функция называется непрерывной?
13. Какими свойствами обладает функция, непрерывная на отрезке?
14. На какие типы делятся точки разрыва функций?
15. Как вычисляется производная произведения двух функций?
16. Как вычисляется производная частного двух функций?
17. Как вычисляется производная сложной функции?
18. Как вычисляется производная функции, заданной неявно?
19. Как вычисляется производная функции, заданной параметрически?
20. Как вычисляется производная обратной функции?
21. Что называется критической точкой функции?
22. Всегда ли критическая точка является точкой экстремума?
23. Как осуществляется исследование функции на экстремум?
24. Как найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке?
25. В чем состоит правило Лопиталя?
26. Какая функция называется выпуклой вверх?

27. Какая функция называется выпуклой вниз?
28. Что называется точкой перегиба?
29. Как найти точки перегиба?
30. Что такое формула Тейлора для функции?
31. Что такое остаточный член в форме Пеано?

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Дана функция

$$y(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}.$$

Выяснить:

1. Обладает ли эта функция свойствами четности, нечетности, периодичности или нет.

Найти:

2. Область определения функции $y(x)$;
3. Множество значений функции $y(x)$;
4. Предел

$$\lim_{x \to 2} \left(y(x) - \frac{8}{x^2 - 4} \right);$$

5. Предел

$$\lim_{x \to -2} \left(y(x) - \frac{8}{x^2 - 4} \right);$$

6. Точки разрыва функции $y(x)$ и определить их тип;
7. Первую и вторую производные функции $y(x)$
8. Интервалы возрастания и убывания функции $y(x)$;
9. Точки максимума и минимума функции $y(x)$;
10. Точки перегиба функции $y(x)$;
11. Асимптоты функции $y(x)$.

Построить:

12. График функции $y(x)$.

Разложить:

13. Функцию $y(x)$ по формуле Маклорена до $o(x^7)$.

ЛИТЕРАТУРА

Основная:

1. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А. Математический анализ в вопросах и задачах: Учебное пособие / Под ред. В.Ф. Бутузова – М.: Физматлит, 2001.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Сборник задач по высшей математике: Учебное пособие. – М.: Физматлит, 2001.
3. Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М., Фридман М.Н. Высшая математика для экономистов: Учебник для вузов. - М.: ЮНИТИ, 2003.
4. Натансон И.П. Краткий курс высшей математики. - СПб.: Издательство «Лань», 2005.

Дополнительная:

5. Ведина О.И., Десницкая В.Н., Варфоломеева Г.Б., Тарасюк А.Ф. Математика. Математический анализ для экономистов: Учебник. – М.: Инф.-изд. дом «Филинъ», Рилант, 2001.
6. Гурова З.И., Каролинская С.Н., Осипова А.П. Математический анализ. Начальный курс с примерами и задачами. / Под ред. А.И. Кибзуна – М.: Физматлит, 2003.
7. Сборник задач по высшей математике для экономистов: Учебное пособие. / Под ред. В.И.Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2004.
8. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т. 1,2.- М.: Физматлит, 2002.
9. Шипачев В.С. Высшая математика. - М.: Высшая школа, 2002.