Доктор физико-математических наук, профессор

К. Л. САМАРОВ

МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие по разделу

Дифференциальные уравнения

СОДЕРЖАНИЕ

1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1.1 Дифференциальные уравнения 1-го порядка

1.1.1 Понятие дифференциального уравнения. Порядок уравнения

- Пусть x – независимая переменная, $y = y(x)$ – искомая неизвестная функция. Дифференциальным уравнением называют уравнение, содержащие производную или производные неизвестной функции.

- Порядком дифференциального уравнения называют порядок старшей производной неизвестной функции, входящей в это уравнение.

1.1.2 Дифференциальное уравнение 1-го порядка, разрешенное относительно производной. Постановка задачи Коши

- Уравнения вида

$$f(x, y, y') = 0$$

называют дифференциальными уравнениями 1-го порядка.

- Уравнения вида

$$y' = f(x, y)$$

называют дифференциальными уравнениями 1-го порядка, разрешенными относительно производной.

- Задачей Коши для дифференциального уравнения 1-го порядка, разрешенного относительно производной, называют задачу об отыскании решения уравнения, удовлетворяющего начальному условию:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x = x_0) = y_0. \end{cases}$$

1.1.3 Дифференциальные уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными. Схема решения

Дифференциальные уравнения вида

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

называют уравнениями с разделяющимися переменными.

Решение уравнений с разделяющимися переменными осуществляется по следующей схеме:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx.$$

Пример 1. Предприятие инвестирует в новое производство денежные средства, причем инвестиции уменьшаются со скоростью, прямо пропорциональной инвестируемым в данный момент времени средствам с коэффициентом пропорциональности 0,08. Найти закон изменения инвестиций со временем и объем инвестиций за 4 года, если в начальный момент времени инвестиции составили 1000 денежных единиц.

Решение. Пусть объем инвестируемых средств $s = s(t)$, где t – время. По условию задачи объем инвестируемых средств является решением следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{ds}{dt} = -0{,}08st, \\ s(t=0) = 1000. \end{cases}$$

Решим сначала уравнение

$$\frac{ds}{dt} = -0{,}08st,$$

которое является уравнением с разделяющимися переменными:

$$\int \frac{ds}{s} = -0{,}08 \cdot \int tdt \Rightarrow \ln|s| = -0{,}04 \cdot t^2 + \ln c \Rightarrow$$
$$|s| = e^{-0{,}04 \cdot t^2 + \ln c} \Rightarrow s = c \cdot e^{-0{,}04 \cdot t^2}.$$

Итак, общее решение дифференциального уравнения

$$\frac{ds}{dt} = -0{,}08st$$

имеет вид

$$s(t) = c \cdot e^{-0{,}04 \cdot t^2},$$

где c – произвольная постоянная.

Найдем значение произвольной постоянной c, воспользовавшись начальным условием:

$$s(t=0) = 1000 = c \cdot e^{-0{,}04 \cdot 0^2} = c.$$

Таким образом, решение рассматриваемой задачи Коши имеет вид

$$s(t) = 1000 \cdot e^{-0{,}04 \cdot t^2}.$$

Следовательно, объем инвестиций за 4 года

$$s(t=4) = 1000 \cdot e^{-0{,}04 \cdot 16} = 1000 \cdot e^{-0{,}64} = 527{,}29.$$

1.1.4 Однородные дифференциальные уравнения 1-го порядка. Схема решения

Дифференциальные уравнения вида

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

называют однородными.

Решение однородных уравнений осуществляется при помощи перехода от переменной y к новой переменной z по формулам:

$$y = z \cdot x, \; y' = z' \cdot x + z.$$

В результате исходное уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными:

$$z' \cdot x + z = f(z) \Rightarrow \frac{dz}{dx} \cdot x = f(z) - z \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{f(z) - z}{x} \Rightarrow \frac{dz}{f(z) - z} = \frac{dx}{x}.$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения:

$$(3x^2+5y^2)y'=3xy.$$

Решение. Преобразуем это уравнение к более удобному виду:

$$(3x^2+5y^2)y'=3xy \Rightarrow y'=\frac{3xy}{3x^2+5y^2} \Rightarrow y'=\frac{3\frac{y}{x}}{3+5\left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Совершая теперь замену переменной

$$y=zx,\ y'=z'x+z,$$

получим

$$\frac{dz}{dx}x+z=\frac{3z}{3+5z^2},$$

$$\frac{dz}{dx}x=\frac{3z}{3+5z^2}-z=\frac{3z-3z-5z^3}{3+5z^2}=-\frac{5z^3}{3+5z^2},$$

$$-\frac{3+5z^2}{5z^3}dz=\frac{dx}{x},$$

$$-\int\frac{3+5z^2}{5z^3}dz=\int\frac{dx}{x} \Rightarrow -\frac{3}{5}\int\frac{dz}{z^3}-\int\frac{dz}{z}=\ln|x| \Rightarrow \frac{3}{10z^2}=\ln|z|+\ln|x|+\ln|c|.$$

Следовательно,

$$\ln|czx|=\frac{3}{10z^2} \Rightarrow |czx|=e^{\frac{3}{10z^2}} \Rightarrow czx=\pm e^{\frac{3}{10z^2}} \Rightarrow zx=\pm\frac{1}{c}e^{\frac{3}{10z^2}} \Rightarrow zx=c_1e^{\frac{3}{10z^2}}.$$

Возвращаясь к переменой y, находим общее решение исходного уравнения в виде

$$y=c_1e^{\frac{3x^2}{10y^2}},$$

где c_1 – произвольная постоянная.

1.1.5 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения 1-го порядка. Схема решения

Дифференциальные уравнения вида

$$y' + p\cdot y = q,$$

где $p = p(x), q = q(x)$, называют линейными неоднородными дифференциальными уравнениями 1-го порядка.

Решение таких уравнений осуществляется по следующей схеме:

1. Ищется решение дифференциального уравнения вида

$$v' + p\cdot v = 0,$$

которое называют линейным однородным дифференциальным уравнением 1-го порядка.

2. В исходном уравнении совершается переход от переменной y к переменной u по формулам

$$y = u\cdot v, \quad y' = u'\cdot v + u\cdot v' .$$

3. Полученное для переменной u уравнение решается так:

$$\begin{gathered} u'\cdot v + u\cdot v' + p\cdot u\cdot v = q \Rightarrow u'\cdot v + u\cdot(v' + p\cdot v) = q \Rightarrow \\ \Rightarrow u'\cdot v = q \Rightarrow u' = \frac{q}{v} \Rightarrow u = \int \frac{q}{v}dx \end{gathered}.$$

Пример 3. Найти общее решение линейного неоднородного уравнения

$$xy' + 3y = 3e^{x^3}.$$

Решение. Преобразуем сначала уравнение к виду

$$y' + \frac{3}{x}y = \frac{3}{x}e^{x^3}$$

и найдем, в соответствии с изложенным выше, какое-нибудь решение линейного однородного уравнения

$$v' + \frac{3v}{x} = 0,$$

где $v = v(x)$ – новая переменная. Получаем:

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{3v}{x} \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -3\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln v = -3\ln x \Rightarrow \ln v = \ln \frac{1}{x^3} \Rightarrow v = \frac{1}{x^3}.$$

Совершая замену переменной

$$y = u \cdot v, \; y' = u'v + uv',$$

преобразуем исходное уравнение

$$y' + \frac{3}{x} y = \frac{3}{x} e^{x^3} \Rightarrow u'v + uv' + \frac{3uv}{x} = \frac{3}{x} e^{x^3} \Rightarrow u'v + u\left(v' + \frac{3v}{x}\right) = \frac{3}{x} e^{x^3}.$$

Таким образом, переменная u удовлетворяет уравнению

$$u' \cdot \frac{1}{x^3} = \frac{3}{x} e^{x^3},$$

решение которого уже труда не представляет:

$$u' = 3x^2 e^{x^3} \Rightarrow u = 3\int x^2 e^{x^3} dx = \int e^{x^3} dx^3 = e^{x^3} + c.$$

Следовательно, общее решение исходного уравнения имеет вид:

$$y = u \cdot v = \left(e^{x^3} + c\right) \cdot \frac{1}{x^3}.$$

1.1.6 Уравнения Бернулли. Схема решения

Дифференциальные уравнения вида

$$y' + p \cdot y + q \cdot y^n = 0,$$

где $p = p(x), q = q(x)$, а n – любое число, отличное от 1, называют уравнениями Бернулли.

Решение таких уравнений осуществляется по следующей схеме:

1. Сначала уравнение Бернулли делится на y^n:

$$y' \cdot y^{-n} + p \cdot y^{1-n} + q = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{1-n}\left(y^{1-n}\right)' + p \cdot y^{1-n} + q = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(y^{1-n}\right)' + (1-n) \cdot p \cdot y^{1-n} + (1-n) \cdot q = 0.$$

2. В полученном уравнении производится замена переменного $z = y^{1-n}$.

3. Возникшее уравнение

$$z' + (1-n) \cdot p \cdot z + (1-n) \cdot q = 0$$

является линейным неоднородным дифференциальным уравнением 1-го порядка, которое решается описанным выше способом.

1.2 Дифференциальные уравнения 2-го порядка

Дифференциальные уравнения вида

$$f(x,\ y,\ y', y'') = 0$$

называют дифференциальными уравнениями 2-го порядка.

1.2.1 Схема решения дифференциального уравнения вида $f(x, y', y'') = 0$

Дифференциальные уравнения вида

$$f(x, y', y'') = 0$$

можно решить при помощи перехода от переменной y к новой переменной z по формулам

$$y' = z(x),\ y'' = z'(x).$$

1.2.2 Схема решения дифференциального уравнения вида $f(y, y', y'') = 0$

Дифференциальные уравнения вида

$$f(y, y', y'') = 0$$

можно решить при помощи перехода от переменной y к новой переменной z по формулам

$$y' = z(y), \quad y'' = z \cdot z'.$$

Пример 4. Решить задачу Коши

$$yy'' = (y')^2, y(0) = 1, y'(0) = 2.$$

Решение. Совершая в уравнении замену переменной

$$y' = z(y),$$

получим

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot z \Rightarrow y \cdot y'' = y \cdot \frac{dz}{dy} \cdot z = (y')^2 = z^2.$$

Итак, исходное уравнение в новых переменных имеет вид

$$y \cdot \frac{dz}{dy} \cdot z = z^2.$$

Решим это уравнение:

$$y\frac{dz}{dy}z = z^2 \Rightarrow y\frac{dz}{dy} = z \Rightarrow \int \frac{dz}{z} = \int \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln|z| = \ln|y| + \ln|c| \Rightarrow$$
$$\ln|z| = \ln|cy| \Rightarrow z = \pm cy \Rightarrow z = c_1 y.$$

Возвращаясь к переменной y, получаем уравнение

$$y' = c_1 y.$$

Воспользовавшись начальными условиями, находим значение постоянной c_1:

$$y(0) = 1,\ y'(0) = 2 \Rightarrow c_1 = 2.$$

Далее получаем

$$y' = c_1 y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2y \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = 2\int dx \Rightarrow \ln|y| = 2x + \ln|c_2| \Rightarrow$$

$$y = \pm c_2 e^{2x} \Rightarrow y = c_3 e^{2x}$$

Воспользовавшись начальными условиями, находим значение постоянной c_3:

$$y(0) = 1 = c_3.$$

Таким образом, функция $y = e^{2x}$ является решением исходной задачи Коши.

1.3 Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами

1.3.1 Однородные линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Характеристический многочлен, характеристические корни. Схема решения

Дифференциальные уравнения вида

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

где a, b, c – числа, называют линейными однородными дифференциальными уравнениями 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

Решение таких уравнений осуществляется по следующей схеме:

1. Сначала решается квадратное уравнение

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0,$$

которое называют характеристическим уравнением для исходного дифференциального уравнения.

2. Если характеристическое уравнение имеет два различных вещественных корня λ_1 и λ_2, то общее решение исходного дифференциального уравнения имеет вид

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x},$$

где c_1 и c_2 – произвольные числа.

3. Если характеристическое уравнение имеет два совпавших вещественных корня $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, то общее решение исходного дифференциального уравнения имеет вид

$$y = e^{\lambda x}(c_1 + c_2 x),$$

где c_1 и c_2 – произвольные числа.

3. Если характеристическое уравнение имеет два комплексно-сопряженных корня $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ и $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, то общее решение исходного дифференциального уравнения имеет вид

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \sin\beta x + c_2 \cos\beta x),$$

где c_1 и c_2 – произвольные числа.

- Линейное однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + \omega^2 y = 0,$$

где $\omega \neq 0$ – вещественное число, называют уравнением гармонических колебаний.

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$y = c_1 \sin\omega x + c_2 \cos\omega x,$$

где c_1 и c_2 – произвольные числа. Число ω называют частотой гармонических колебаний.

Пример 5. Решить задачу Коши

$$y'' - 6y' + 9y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 7.$$

Решение. Составим сначала характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 6x + 9 = 0.$$

Это уравнение имеет два совпавших корня $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 3$. Следовательно, общим решением исходного дифференциального уравнения является функция

$$y = e^{3x}(c_1 + c_2 x).$$

Вычислим производную этой функции:

$$y' = e^{3x}(3c_1 + c_2 + 3c_2 x).$$

Подставляя в выражения для y и y' начальные условия

$$y(0) = 2, y'(0) = 7,$$

получим систему уравнений:

$$\begin{cases} c_1 = 2, \\ 3c_1 + c_2 = 7, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 2, \\ c_2 = 1. \end{cases}$$

Таким образом, функция $y = e^{3x}(2 + x)$ – решение исходной задачи Коши.

Пример 6. Решить задачу Коши

$$y'' - 4y' + 13y = 0, y(0) = 5, y'(0) = 0.$$

Решение. Составим сначала характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0.$$

Это уравнение имеет два комплексно-сопряженных корня

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{-9} = 2 \pm 3i.$$

Следовательно, общим решением исходного дифференциального уравнения является функция

$$y = e^{2x}(c_1 \sin 3x + c_2 \cos 3x).$$

Вычислим производную этой функции:

$$y' = e^{2x}((2c_1 - 3c_2)\sin 3x + (3c_1 + 2c_2)\cos 3x).$$

Воспользовавшись начальными условиями, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} c_2 = 5, \\ 3c_1 + 2c_2 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_2 = 5, \\ c_2 = -\dfrac{10}{3}. \end{cases}$$

Таким образом,

$$y = e^{2x}\left(-\frac{10}{3}\sin 3x + 5\cos 3x\right)$$

– искомое решение задачи Коши.

1.3.2 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами

- Дифференциальные уравнения вида

$$ay'' + by' + cy = f(x),$$

где a, b, c – числа, называют линейными неоднородными дифференциальными уравнениями 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

- Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y = y_о + y_ч,$$

где $y_о$ – общее решение однородного уравнения, а $y_ч$ – какое-нибудь решение неоднородного уравнения (частное решение).

Пример 7. Решить задачу Коши

$$y'' - 5y' + 4y = 8e^{5x}, y(0) = 7, y'(0) = 6.$$

Решение. Найдем сначала общее решение однородного уравнения

$$y'' - 5y' + 4y = 0.$$

Для этого составим характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0.$$

Это уравнение имеет два различных вещественных корня: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 4$.

Следовательно, общим решением однородного уравнения является функция

$$y_o = c_1 e^x + c_2 e^{4x}.$$

Найдем теперь какое-нибудь частное решение неоднородного уравнения

$$y'' - 5y' + 4y = 8e^{5x}.$$

Будем искать его в виде

$$y = Ae^{5x}.$$

Тогда

$$y' = 5Ae^{5x},\ y'' = 25Ae^{5x}.$$

Подставив эти выражения в уравнение, получим:

$$25Ae^{5x} - 25Ae^{5x} + 4Ae^{5x} = 8e^{5x} \Rightarrow 4A = 8,\ A = 2 \Rightarrow y = 2e^{5x}.$$

Теперь можно выписать общее решение неоднородного уравнения:

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{4x} + 2e^{5x}.$$

Вычислим производную:

$$y' = c_1 e^{x} + 4c_2 e^{4x} + 10e^{5x}.$$

Воспользовавшись начальными условиями, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 + 2 = 7, \\ y'(0) = c_1 + 4c_2 + 10 = 6, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 8, \\ c_2 = -3. \end{cases}$$

Искомое решение задачи Коши имеет вид:

$$y = 8e^{x} - 12e^{4x} + 10e^{5x}.$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что называется дифференциальным уравнением?
2. Что такое порядок дифференциального уравнения?
3. Как ставится задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка?
4. Что называется дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными?
5. В чем состоит схема решения дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными?
6. Что называется однородным дифференциальным уравнением первого порядка?
7. В чем состоит схема решения однородного дифференциального уравнения первого порядка?
8. Что называется линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка?
9. В чем состоит схема решения линейного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка?
10. Что называется уравнением Бернулли?
11. В чем состоит схема решения уравнения Бернулли?
12. Какие дифференциальные уравнения второго порядка решаются при помощи понижения порядка?
13. В чем состоит схема решения дифференциальных уравнений, допускающих понижение порядка?
14. Как ставится задача Коши для дифференциального уравнения второго порядка?
15. Что называется линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами?

16. Что называется характеристическим многочленом для дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами?
17. В чем состоит схема решения линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами?
18. Что называется линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами?
19. В чем состоит схема решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами?

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Решить задачи Коши:

1. $y'y^2\left(3+e^x\right)-e^x=0, \quad y(0)=1;$

2. $xy'=\left(y+\sqrt{xy}\right), \quad y(1)=4;$

3. $\left(xy'-1\right)\ln x=2y, \quad y(e)=3;$

4. $y'=y^4\cos x+y\,\mathrm{tg}\,x, \quad y(\pi)=1;$

5. $y''=2yy', \quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1, \quad y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=2;$

6. $y''-3y'-28y=0, \quad y\left(0\right)=-2, \quad y'\left(0\right)=-25;$

7. $y''-6y'+9y=0, \quad y\left(0\right)=\dfrac{1}{2}, \quad y'\left(0\right)=3;$

8. $y''-10y'+41y=0, \quad y\left(0\right)=2, \quad y'\left(0\right)=14;$

9. $y''+\dfrac{1}{4}y=3\sin x, \quad y\left(0\right)=10, \quad y'\left(0\right)=-1.$

ЛИТЕРАТУРА

Основная:

1. Ахтямов А.М. Математика для социологов и экономистов: Учебное пособие./Под ред. Беклемишева Д.В. – М.: Физматлит, 2005.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Сборник задач по высшей математике: Учебное пособие. – М.: Физматлит, 2001.
3. Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М., Фридман М.Н. Высшая математика для экономистов: Учебник для вузов. – М.: ЮНИТИ, 2003.
4. Натансон И.П. Краткий курс высшей математики. – СПб.: Издательство «Лань», 2005.

Дополнительная:

5. Егоров А.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. – М.: Физматлит, 2005.
6. Романко В.К. Курс дифференциальных уравнеий и вариационного исчисления. – М.: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2006.
7. Сборник задач по высшей математике для экономистов: Учебное пособие. / Под ред. В.И.Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2004.
8. Щипачев В.С. Задачник по высшей математике. – М.: Высшая школа, 2000.
9. Шипачев В.С. Высшая математика. – М.: Высшая школа, 2002.